!CHAPTER 3

THE EUCLIDEAN ALGORITHM¡

! **1.** Principal lemma for the Euclidean Algorithm. ¡

```
├ ∀n ( ω[n]
      ⇒ ∀a∀b ( ≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]
                ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                           & (λR) = (c+2)
                           & (R´1) = a
                           & (R´2) = b
                           & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                           & (R´(c+2)) = 0
                           & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                                 (R´i)
                                  = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                      + (R´(i+2)) )
                                  & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                           & ∀S∀T∀d
                             ( (λS) = d
                               & (λT) = (d+2)
                               & (T´1) = a
                               & (T´2) = b
                               & (T´(d+2)) = 0
                               & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                     (T´i)
                                      = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                          + (T´(i+2)) )
                                      & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))]
                                    )
                               ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) ) )     ¡
```

! We proceed by induction, taking ϕ to be

```
  ∀a∀b ( ≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]
         ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                    & (λR) = (c+2)
                    & (R´1) = a
                    & (R´2) = b
                    & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                    & (R´(c+2)) = 0
                    & ∀i (  ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                          (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                    + (R´(i+2)) )
                          & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                    & ∀S∀T∀d
                      ( (λS) = d
                        & (λT) = (d+2)
                        & (T´1) = a
                        & (T´2) = b
                        & (T´(d+2)) = 0
                        & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                              (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                        + (T´(i+2)) )
```

```
                                   & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                             ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) )
```

It must be shown that

```
∀a∀b ( ≤[a,0] & <[0,b] & ≤[b,a]
       ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                   & (λR) = (c+2)
                   & (R´1) = a
                   & (R´2) = b
                   & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                   & (R´(c+2)) = 0
                   & ∀i (  ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                           (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                     + (R´(i+2)) )
                           & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                   & ∀S∀T∀d
                     ( (λS) = d
                       & (λT) = (d+2)
                       & (T´1) = a
                       & (T´2) = b
                       & (T´(d+2)) = 0
                       & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                              (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                        + (T´(i+2)) )
                              & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                       ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) )
```

and

```
∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m] &
   ∀a∀b ( ≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]
          ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                      & (λR) = (c+2)
                      & (R´1) = a
                      & (R´2) = b
                      & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                      & (R´(c+2)) = 0
                      & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                             (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                       + (R´(i+2)) )
                             & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                      & ∀S∀T∀d
                        ( (λS) = d
                          & (λT) = (d+2)
                          & (T´1) = a
                          & (T´2) = b
                          & (T´(d+2)) = 0
                          & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                 (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                           + (T´(i+2)) )
                                 & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                          ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) )
   ⇒
```

```
      ∀a∀b ( ≤[a,m] & <[0,b] & ≤[b,a]
             ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                         & (λR) = (c+2)
                         & (R´1) = a
                         & (R´2) = b
                         & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                         & (R´(c+2)) = 0
                         & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                                (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                           + (R´(i+2)) )
                                & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                         & ∀S∀T∀d
                           ( (λS) = d
                             & (λT) = (d+2)
                             & (T´1) = a
                             & (T´2) = b
                             & (T´(d+2)) = 0
                             & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                    (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                               + (T´(i+2)) )
                                    & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                             ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) ) )          ¡

! To prove:

    ∀a∀b ( ≤[a,0] & <[0,b] & ≤[b,a]
           ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                       & (λR) = (c+2)
                       & (R´1) = a
                       & (R´2) = b
                       & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                       & (R´(c+2)) = 0
                       & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                              (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                         + (R´(i+2)) )
                              & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                       & ∀S∀T∀d
                         ( (λS) = d
                           & (λT) = (d+2)
                           & (T´1) = a
                           & (T´2) = b
                           & (T´(d+2)) = 0
                           & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                  (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                             + (T´(i+2)) )
                                  & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                           ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) )              ¡

  a,b                                          ,! 1 (Prem)     ¡

    ≤[a,0] & <[0,b] & ≤[b,a]                   ,! 2 (Prem)     ¡

    ≤[a,0]                                     ,! 3 (&E: 2)    ¡

    <[0,b]                                     ,! 4 (&E: 2)    ¡
```

≤[**b**,**a**] ,! 5 (&E: 2) ¡

(≤[**a**,0] ⇒ **a** = 0) ,! 6 (∀E: V3.25) ¡

≤[**a**,0] ⇒ **a** = 0 ,! 7 (()E: 6) ¡

a = 0 ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

≤[**b**,0] ,! 9 (=E: 5,8) ¡

(≤[**b**,0] ⇒ **b** = 0) ,! 10 (∀E: V3.25) ¡

≤[**b**,0] ⇒ **b** = 0 ,! 11 (()E: 10) ¡

b = 0 ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

<[0,0] ,! 13 (=E: 4,12) ¡

¬ <[0,0] ,! 14 (∀E: V4.12) ¡

¬ ∃Q∃R∃c ((λQ) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a**
& (R´2) = b
& (R´(c+1)) = (**a** Δ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
\+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1)))
\+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ Q ≣ S & R ≣ T))
,! 15 (Prem) ¡

ℑ ,! 16 (ℑI: 13,14) ¡

¬ ∃Q∃R∃c ((λQ) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a**
& (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** Δ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
\+ (R´(i+2)))

```
             & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
             & ∀S∀T∀d
               ( (λS) = d
                 & (λT) = (d+2)
                 & (T´1) = a
                 & (T´2) = b
                 & (T´(d+2)) = 0
                 & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                        (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                  + (T´(i+2)) )
                 & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                 ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) )
⇒ ℱ
                                          ,! 17 (⇒I: 15,16)  ¡

¬¬ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
             & (λR) = (c+2)
             & (R´1) = a
             & (R´2) = b
             & (R´(c+1)) = (a ∆ b)
             & (R´(c+2)) = 0
             & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                    (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                              + (R´(i+2)) )
                    & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
             & ∀S∀T∀d
               ( (λS) = d
                 & (λT) = (d+2)
                 & (T´1) = a
                 & (T´2) = b
                 & (T´(d+2)) = 0
                 & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                        (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                  + (T´(i+2)) )
                 & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                 ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) )
                                          ,! 18 (¬I: 17)     ¡

∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
          & (λR) = (c+2)
          & (R´1) = a
          & (R´2) = b
          & (R´(c+1)) = (a ∆ b)
          & (R´(c+2)) = 0
          & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                 (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                           + (R´(i+2)) )
                 & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
          & ∀S∀T∀d
            ( (λS) = d
              & (λT) = (d+2)
              & (T´1) = a
              & (T´2) = b
              & (T´(d+2)) = 0
```

```
                  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                         (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                   + (T´(i+2)) )
                         & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                  ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                                                   ,! 19 (¬E: 18)      ¡

≤[a,0] & <[0,b] & ≤[b,a]
⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
             & (λR) = (c+2)
             & (R´1) = a
             & (R´2) = b
             & (R´(c+1)) = (a ∆ b)
             & (R´(c+2)) = 0
             & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                    (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                              + (R´(i+2)) )
                    & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
             & ∀S∀T∀d
               ( (λS) = d
                 & (λT) = (d+2)
                 & (T´1) = a
                 & (T´2) = b
                 & (T´(d+2)) = 0
                 & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                        (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                  + (T´(i+2)) )
                        & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                 ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                                                   ,! 20 (⇒I: 2,19)    ¡

( ≤[a,0] & <[0,b] & ≤[b,a]
  ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
               & (λR) = (c+2)
               & (R´1) = a
               & (R´2) = b
               & (R´(c+1)) = (a ∆ b)
               & (R´(c+2)) = 0
               & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                      (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                + (R´(i+2)) )
                      & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
               & ∀S∀T∀d
                 ( (λS) = d
                   & (λT) = (d+2)
                   & (T´1) = a
                   & (T´2) = b
                   & (T´(d+2)) = 0
                   & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                          (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                    + (T´(i+2)) )
                          & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                   ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
                                                   ,! 21 (()I: 20)     ¡
```

```
∀a∀b ( ≤[a,0] & <[0,b] & ≤[b,a]
       ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                   & (λR) = (c+2)
                   & (R´1) = a
                   & (R´2) = b
                   & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                   & (R´(c+2)) = 0
                   & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                          (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                     + (R´(i+2)) )
                          & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                   & ∀S∀T∀d
                     ( (λS) = d
                       & (λT) = (d+2)
                       & (T´1) = a
                       & (T´2) = b
                       & (T´(d+2)) = 0
                       & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                              (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                         + (T´(i+2)) )
                              & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                       ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
                                        ,! 22 (∀I: 1,21)    ¡

! To prove:

  ∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m] &
     ∀a∀b ( ≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]
            ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                        & (λR) = (c+2)
                        & (R´1) = a
                        & (R´2) = b
                        & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                        & (R´(c+2)) = 0
                        & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                               (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                          + (R´(i+2)) )
                               & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                        & ∀S∀T∀d
                          ( (λS) = d
                            & (λT) = (d+2)
                            & (T´1) = a
                            & (T´2) = b
                            & (T´(d+2)) = 0
                            & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                   (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                              + (T´(i+2)) )
                                   & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                            ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
     ⇒
     ∀a∀b ( ≤[a,m] & <[0,b] & ≤[b,a]
            ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
```

```
                              & (λR) = (c+2)
                              & (R´1) = a
                              & (R´2) = b
                              & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                              & (R´(c+2)) = 0
                              & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                                     (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                                + (R´(i+2)) )
                                     & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                              & ∀S∀T∀d
                                ( (λS) = d
                                  & (λT) = (d+2)
                                  & (T´1) = a
                                  & (T´2) = b
                                  & (T´(d+2)) = 0
                                  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                         (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                                    + (T´(i+2)) )
                                         & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                                  ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) ) )          ¡

n,m                                            ,! 23 (Prem)        ¡

  ω[n] & σ[n,m] &
  ∀a∀b ( ≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]
         ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                    & (λR) = (c+2)
                    & (R´1) = a
                    & (R´2) = b
                    & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                    & (R´(c+2)) = 0
                    & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                           (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                      + (R´(i+2)) )
                           & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                    & ∀S∀T∀d
                      ( (λS) = d
                        & (λT) = (d+2)
                        & (T´1) = a
                        & (T´2) = b
                        & (T´(d+2)) = 0
                        & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                               (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                          + (T´(i+2)) )
                               & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                        ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
                                               ,! 24 (Prem)        ¡

  ω[n] & σ[n,m]                                ,! 25 (&E: 24)      ¡

  ∀a∀b ( ≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]
         ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                    & (λR) = (c+2)
                    & (R´1) = a
```

```
                     & (R´2) = b
                     & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                     & (R´(c+2)) = 0
                     & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                            (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                      + (R´(i+2)) )
                          & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                     & ∀S∀T∀d
                       ( (λS) = d
                         & (λT) = (d+2)
                         & (T´1) = a
                         & (T´2) = b
                         & (T´(d+2)) = 0
                         & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                          + (T´(i+2)) )
                              & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                        ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) )
                                             ,! 26 (&E: 24)       ¡

    ( ω[n] & σ[n,m] ⇒ m = (n + 1) )          ,! 27 (∀E: V2.48)    ¡

    ω[n] & σ[n,m] ⇒ m = (n + 1)              ,! 28 (()E: 27)      ¡

    m = (n + 1)                              ,! 29 (⇒E: 25,28)    ¡

      a,b                                    ,! 30 (Prem)         ¡

        ≤[a,m] & <[0,b] & ≤[b,a]             ,! 31 (Prem)         ¡

        ≤[a,m]                               ,! 32 (&E: 31)       ¡

        <[0,b]                               ,! 33 (&E: 31)       ¡

        ≤[b,a]                               ,! 34 (&E: 31)       ¡

        ≤[a,(n + 1)]                         ,! 35 (=E: 29,32)    ¡

        ( ≤[a,(n + 1)] ⇒ ≤[a,n] ∨ a = (n + 1) )
                                             ,! 36 (∀E: V3.54)    ¡

        ≤[a,(n + 1)] ⇒ ≤[a,n] ∨ a = (n + 1)
                                             ,! 37 (()E: 36)      ¡

        ≤[a,n] ∨ a = (n + 1)                 ,! 38 (⇒E: 35,37)    ¡

          ≤[a,n]                             ,! 39 (Prem)         ¡

          ≤[a,n] & <[0,b]                    ,! 40 (&I: 33,39)    ¡

          ≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]           ,! 41 (&I: 34,40)    ¡

! Applying the induction hypothesis...                            ¡

          ( ≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]
            ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                     & (λR) = (c+2)
```

```
                    & (R´1) = a
                    & (R´2) = b
                    & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                    & (R´(c+2)) = 0
                    & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                          (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                    + (R´(i+2)) )
                          & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                    & ∀S∀T∀d
                      ( (λS) = d
                        & (λT) = (d+2)
                        & (T´1) = a
                        & (T´2) = b
                        & (T´(d+2)) = 0
                        & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                              (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                        + (T´(i+2)) )
                              & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                       ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
                                   ,! 42 (∀E: 26)      ¡

≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]
⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                  & (λR) = (c+2)
                  & (R´1) = a
                  & (R´2) = b
                  & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                  & (R´(c+2)) = 0
                  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                        (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                  + (R´(i+2)) )
                        & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                  & ∀S∀T∀d
                    ( (λS) = d
                      & (λT) = (d+2)
                      & (T´1) = a
                      & (T´2) = b
                      & (T´(d+2)) = 0
                      & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                            (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                      + (T´(i+2)) )
                            & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                     ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                                   ,! 43 (()E: 42)      ¡


∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                & (λR) = (c+2)
                & (R´1) = a
                & (R´2) = b
                & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                & (R´(c+2)) = 0
                & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                      (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
```

```
                                        + (R´(i+2)) )
                           & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                      & ∀S∀T∀d
                        ( (λS) = d
                          & (λT) = (d+2)
                          & (T´1) = a
                          & (T´2) = b
                          & (T´(d+2)) = 0
                          & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                 (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                           + (T´(i+2)) )
                                 & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                         ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) )
                                              ,! 44 (⇒E: 41,43)   ¡

≤[a,n]
⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
              & (λR) = (c+2)
              & (R´1) = a
              & (R´2) = b
              & (R´(c+1)) = (a Δ b)
              & (R´(c+2)) = 0
              & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                     (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                               + (R´(i+2)) )
                     & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
              & ∀S∀T∀d
                ( (λS) = d
                  & (λT) = (d+2)
                  & (T´1) = a
                  & (T´2) = b
                  & (T´(d+2)) = 0
                  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                         (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                   + (T´(i+2)) )
                         & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                 ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) )
                                              ,! 45 (⇒I: 39,44)   ¡

  a = (n + 1)                                 ,! 46 (Prem)        ¡

  ( ≤[b,a] ⇒ ω[b] & ω[a] )                    ,! 47 (∀E: V3.5)    ¡

  ≤[b,a] ⇒ ω[b] & ω[a]                        ,! 48 (()E: 47)     ¡

  ω[b] & ω[a]                                 ,! 49 (⇒E: 34,48)   ¡

  ω[b]                                        ,! 50 (&E: 49)      ¡

  ω[a]                                        ,! 51 (&E: 49)      ¡

  ω[a] & ω[b]                                 ,! 52 (&I: 50,51)   ¡

  ( <[0,b] ⇒ ¬ b = 0 )                        ,! 53 (∀E: V4.14)   ¡
```

<[0,**b**] ⇒ ¬ **b** = 0 ,! 54 (()E: 53) ¡

¬ **b** = 0 ,! 55 (⇒E: 33,54) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] & ¬ **b** = 0 ,! 56 (&I: 52,55) ¡

(ω[**a**] & ω[**b**] & ¬ **b** = 0
⇒ ∃q∃r (**a** = ((q x **b**) + r) & <[r,**b**]))
,! 57 (∀E: V8.66) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] & ¬ **b** = 0
⇒ ∃q∃r (**a** = ((q x **b**) + r) & <[r,**b**])
,! 58 (()E: 57) ¡

∃q∃r (**a** = ((q x **b**) + r) & <[r,**b**])
,! 59 (⇒E: 56,58) ¡

∃r (**a** = ((**q** x **b**) + r) & <[r,**b**])
,! 60 (∃E: 59) ¡

(**a** = ((**q** x **b**) + **r**) & <[**r**,**b**]) ,! 61 (∃E: 60) ¡

a = ((**q** x **b**) + **r**) & <[**r**,**b**] ,! 62 (()E: 61) ¡

a = ((**q** x **b**) + **r**) ,! 63 (&E: 62) ¡

<[**r**,**b**] ,! 64 (&E: 63) ¡

(**r** = 0 ∨ ¬ **r** = 0) ,! 65 (∀E: I3.4) ¡

r = 0 ∨ ¬ **r** = 0 ,! 66 (()E: 65) ¡

r = 0 ,! 67 (Prem) ¡

∃F ((λF) = 1 & (F´1) = **q**) ,! 68 (∀E: C1.53) ¡

((λ**Q**) = 1 & (**Q**´1) = **q**) ,! 69 (∃E: 68) ¡

(λ**Q**) = 1 & (**Q**´1) = **q** ,! 70 (()E: 69) ¡

(λ**Q**) = 1 ,! 71 (&E: 70) ¡

(**Q**´1) = **q** ,! 72 (&E: 70) ¡

∃F ((λF) = 3 & (F´1) = **a** & (F´2) = **b** & (F´3) = 0)
,! 73 (∀E: C2.39) ¡

((λ**R**) = 3 & (**R**´1) = **a** & (**R**´2) = **b** & (**R**´3) = 0)
,! 74 (∃E: 73) ¡

(λ**R**) = 3 & (**R**´1) = **a** & (**R**´2) = **b** & (**R**´3) = 0
,! 75 (()E: 74) ¡

(λ**R**) = 3 ,! 76 (&E: 75) ¡

(**R**´1) = **a** ,! 77 (&E: 75) ¡

(**R**´2) = **b** ,! 78 (&E: 75) ¡

(**R**´3) = 0 ,! 79 (&E: 75) ¡

(λ**R**) = (1+2) & (**R**´1) = **a** & (**R**´2) = **b** & (**R**´(1+2)) = 0
,! 80 (=E: V2.71,75) ¡

(λ**Q**) = 1 & (λ**R**) = (1+2) & (**R**´1) = **a** & (**R**´2) = **b**
& (**R**´(1+2)) = 0
,! 81 (&I: 71,80) ¡

(**R**´(1+1)) = **b** ,! 82 (=E: V2.69,78) ¡

a = ((**q** x **b**) + **r**) & **r** = 0 ,! 83 (&I: 63,67) ¡

(**a** = ((**q** x **b**) + **r**) & **r** = 0 ⇒ **b**|**a**)
,! 84 (∀E: VI1.51) ¡

a = ((**q** x **b**) + **r**) & **r** = 0 ⇒ **b**|**a**
,! 85 (()E: 84) ¡

b|**a** ,! 86 (⇒E: 83,85) ¡

b|**a** & ¬ **b** = 0 ,! 87 (&I: 55,86) ¡

(**b**|**a** & ¬ **b** = 0 ⇒ (**a** Δ **b**) = **b**)
,! 88 (∀E: VI5.46) ¡

b|**a** & ¬ **b** = 0 ⇒ (**a** Δ **b**) = **b** ,! 89 (()E: 88) ¡

(**a** Δ **b**) = **b** ,! 90 (⇒E: 87,89) ¡

(**R**´(1+1)) = (**a** Δ **b**) ,! 91 (=E: 82,90) ¡

(λ**Q**) = 1 & (λ**R**) = (1+2) & (**R**´1) = **a** & (**R**´2) = **b**
& (**R**´(1+1)) = (**a** Δ **b**) & (**R**´(1+2)) = 0
,! 92 (&I: 81,91) ¡

i ,! 93 (Prem) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,1] ,! 94 (Prem) ¡

(≤[1,**i**] & ≤[**i**,1] ⇒ 1 = **i**)
,! 95 (∀E: V3.22) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,1] ⇒ 1 = **i** ,! 96 (()E: 95) ¡

1 = **i** ,! 97 (⇒E: 94,96) ¡

(**R**´1) = ((**q** x **b**) + **r**) & <[**r**,**b**]
,! 98 (=E: 62,77) ¡

```
(R´1) = (((Q´1) x b) + r) & <[r,b]
                              ,! 99 (=E: 72,98)    ¡

(R´1) = (((Q´1) x (R´(1+1))) + r)
& <[r,(R´(1+1))]
                              ,! 100 (=E: 82,99)   ¡

(R´1) = (((Q´1) x (R´(1+1))) + 0)
& <[0,(R´(1+1))]
                              ,! 101 (=E: 67,100) ¡

(R´(1+2)) = 0                 ,! 102 (&E: 80)      ¡

(R´1) = (((Q´1) x (R´(1+1))) + (R´(1+2)))
& <[(R´(1+2)),(R´(1+1))]
                              ,! 103 (=E: 101,102)
                                                   ¡

≤[1,i] & ≤[i,1] ⇒
(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))]
                              ,! 104 (⇒I: 94,103)
                                                   ¡

( ≤[1,i] & ≤[i,1] ⇒
  (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
  & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                              ,! 105 (()I: 104)    ¡

∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,1] ⇒
     (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
     & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                              ,! 106 (∀I: 93,105) ¡

(λQ) = 1 & (λR) = (1+2) & (R´1) = a & (R´2) = b
& (R´(1+1)) = (a Δ b) & (R´(1+2)) = 0
& ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,1] ⇒
       (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
       & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                              ,! 107 (&I: 92,106) ¡

S,T,d                         ,! 108 (Prem)        ¡

(λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = a
& (T´2) = b
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
       (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                 + (T´(i+2)) )
       & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                              ,! 109 (Prem)        ¡

(λS) = d                      ,! 110 (&E: 109)     ¡
```

```
(λT) = (d+2)                   ,! 111 (&E: 109)    ¡

(T´1) = a                      ,! 112 (&E: 109)    ¡

(T´2) = b                      ,! 113 (&E: 109)    ¡

(T´(d+2)) = 0                  ,! 114 (&E: 109)    ¡

∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
     (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
               + (T´(i+2)) )
      & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                               ,! 115 (&E: 109)    ¡

( (λS) = d ⇒ ω[d] )            ,! 116 (∀E: C1.22)  ¡

(λS) = d ⇒ ω[d]                ,! 117 (()E: 116)   ¡

ω[d]                           ,! 118 (⇒E: 110,117)
                                                   ¡

  d = 0                        ,! 119 (Prem)       ¡

  (T´(0+2)) = 0                ,! 120 (=E: 114,119)
                                                   ¡

  (T´2) = 0                    ,! 121 (=E: V2.68)  ¡

  b = 0                        ,! 122 (=E: 113,121)
                                                   ¡

  𝔉                            ,! 123 (𝔉I: 55,122)
                                                   ¡

d = 0 ⇒ 𝔉                      ,! 124 (⇒I: 119,123)
                                                   ¡

¬ d = 0                        ,! 125 (¬I: 124)    ¡

ω[d] & ¬ d = 0                 ,! 126 (⇒E: 118,125)
                                                   ¡

( ω[d] & ¬ d = 0 ⇒ ≤[1,d] )
                               ,! 127 (∀E: V3.38)  ¡

ω[d] & ¬ d = 0 ⇒ ≤[1,d]        ,! 128 (()E: 127)   ¡

≤[1,d]                         ,! 129 (⇒E: 126,128)
                                                   ¡

≤[1,1] & ≤[1,d]                ,! 130 (&I: V3.49,129)
                                                   ¡

( ≤[1,1] & ≤[1,d] ⇒
  (T´1) = ( ((S´1) x (T´(1+1))) + (T´(1+2)) )
  & <[(T´(1+2)),(T´(1+1))] )
                               ,! 131 (∀E: 115)    ¡
```

≤[1,1] & ≤[1,**d**] ⇒
(**T**´1) = (((**S**´1) x (**T**´(1+1))) + (**T**´(1+2)))
& <[(**T**´(1+2)),(**T**´(1+1))]
,! 132 (()E: 131) ¡

(**T**´1) = (((**S**´1) x (**T**´(1+1))) + (**T**´(1+2)))
& <[(**T**´(1+2)),(**T**´(1+1))]
,! 133 (⇒E: 130,132)
¡

(**T**´1) = (((**S**´1) x (**T**´2)) + (**T**´(1+2)))
& <[(**T**´(1+2)),(**T**´2)]
,! 134 (=E: V2.69,133)
¡

(**T**´1) = (((**S**´1) x (**T**´2)) + (**T**´3))
& <[(**T**´3),(**T**´2)]
,! 135 (=E: V2.71,134)
¡

(**T**´1) = (((**S**´1) x **b**) + (**T**´3))
& <[(**T**´3),**b**]
,! 136 (=E: 113,135)
¡

(**T**´1) = (((**S**´1) x **b**) + (**T**´3))
,! 137 (&E: 136) ¡

<[(**T**´3),**b**] ,! 138 (&E: 136) ¡

a = (((**S**´1) x **b**) + (**T**´3))
,! 139 (=E: 112,137)
¡

a = (((**S**´1) x **b**) + (**T**´3)) & <[(**T**´3),**b**]
,! 140 (&I: 138,139)
¡

a = (((**S**´1) x **b**) + (**T**´3)) & <[(**T**´3),**b**]
& **a** = ((**q** x **b**) + **r**) & <[**r**,**b**]
,! 141 (&I: 62,140) ¡

ω[((**S**´1) x **b**)] & ω[(**T**´3)] ,! 142 (𝕋E: V1.7,139)
¡

ω[((**S**´1) x **b**)] ,! 143 (&E: 142) ¡

ω[(**T**´3)] ,! 144 (&E: 142) ¡

f T & (**T**D)[3] ,! 145 (𝕋E: III8.20,
144) ¡

ω[(**S**´1)] & ω[**b**] ,! 146 (𝕋E: V7.9,143)
¡

ω[(**S**´1)] ,! 147 (&E: 146) ¡

f S & (**S**D)[1] ,! 148 (𝕋E: III8.20,

147) ¡

(**a** = (((**S**´1) x **b**) + (**T**´3)) & <[(**T**´3),**b**]
& **a** = ((**q** x **b**) + **r**) & <[**r**,**b**]
⇒ **q** = (**S**´1) & **r** = (**T**´3))
,! 149 (∀E: V8.68;
(**S**´1): III8.20,147;
(**T**´3): III8.20,145) ¡

a = (((**S**´1) x **b**) + (**T**´3)) & <[(**T**´3),**b**]
& **a** = ((**q** x **b**) + **r**) & <[**r**,**b**]
⇒ **q** = (**S**´1) & **r** = (**T**´3)
,! 150 (()E: 149) ¡

q = (**S**´1) & **r** = (**T**´3) ,! 151 (⇒E: 141,150) ¡

q = (**S**´1) ,! 152 (&E: 151) ¡

r = (**T**´3) ,! 153 (&E: 152) ¡

0 = (**T**´3) ,! 154 (&E: 67,153) ¡

≤[2,**d**] ,! 155 (Prem) ¡

≤[1,2] & ≤[2,**d**] ,! 156 (&I: V3.50,155) ¡

(≤[1,2] & ≤[2,**d**] ⇒
(**T**´2) = (((**S**´2) x (**T**´(2+1))) + (**T**´(2+2)))
& <[(**T**´(2+2)),(**T**´(2+1))])
,! 157 (∀E: 115) ¡

≤[1,2] & ≤[2,**d**] ⇒
(**T**´2) = (((**S**´2) x (**T**´(2+1))) + (**T**´(2+2)))
& <[(**T**´(2+2)),(**T**´(2+1))]
,! 158 (()E: 157) ¡

(**T**´2) = (((**S**´2) x (**T**´(2+1))) + (**T**´(2+2)))
& <[(**T**´(2+2)),(**T**´(2+1))]
,! 159 (⇒E: 156,158) ¡

<[(**T**´(2+2)),(**T**´(2+1))] ,! 160 (&E: 159) ¡

<[(**T**´(2+2)),(**T**´3)] ,! 161 (=E: V2.70,160) ¡

<[(**T**´(2+2)),0] ,! 162 (=E: 154,161) ¡

f T & (**T**D)[(2+2)] ,! 163 (𝕋E: III8.20,
162) ¡

¬ <[(**T**´(2+2)),0] ,! 164 (∀E: V4.13;
(**T**´(2+2)): III8.20,163) ¡

ℑ ,! 165 (ℑI: 162,164) ¡

≤[2,**d**] ⇒ ℑ ,! 166 (⇒I: 155,165) ¡

¬ ≤[2,**d**] ,! 167 (¬I: 166) ¡

≤[1,**d**] & ¬ ≤[2,**d**] ,! 168 (&I: 129,167) ¡

≤[1,**d**] & ¬ ≤[(1+1),**d**] ,! 169 (&I: V2.69,168) ¡

(≤[1,**d**] & ¬ ≤[(1+1),**d**] ⇒ 1 = **d**)
,! 170 (∀E: V3.70) ¡

≤[1,**d**] & ¬ ≤[(1+1),**d**] ⇒ 1 = **d**
,! 171 (()E: 170) ¡

1 = **d** ,! 172 (⇒E: 169,171) ¡

(λ**S**) = 1 ,! 173 (=E: 110,172) ¡

(λ**Q**) = 1 & (λ**S**) = 1 ,! 174 (&I: 71,173) ¡

(**Q**´1) = (**S**´1) ,! 175 (=E: 72,152) ¡

(λ**Q**) = 1 & (λ**S**) = 1 & (**Q**´1) = (**S**´1)
,! 176 (=E: 174,175) ¡

((λ**Q**) = 1 & (λ**S**) = 1 & (**Q**´1) = (**S**´1) ⇒ **Q** ≣ **S**)
,! 177 (∀E: C1.43) ¡

(λ**Q**) = 1 & (λ**S**) = 1 & (**Q**´1) = (**S**´1) ⇒ **Q** ≣ **S**
,! 178 (()E: 177) ¡

Q ≣ **S** ,! 179 (⇒E: 176,178) ¡

(λ**T**) = (1+2) ,! 180 (=E: 111,172) ¡

(λ**T**) = 3 ,! 181 (=E: V2.71,180) ¡

(λ**R**) = 3 & (λ**T**) = 3 ,! 182 (&I: 76,181) ¡

(**R**´1) = (**T**´1) ,! 183 (=E: 77,112) ¡

(λ**R**) = 3 & (λ**T**) = 3 & (**R**´1) = (**T**´1)
,! 184 (&I: 182,184) ¡

(**R**´2) = (**T**´2) ,! 185 (=E: 78,113) ¡

```
(λR) = 3 & (λT) = 3 & (R´1) = (T´1)
& (R´2) = (T´2)
                                  ,! 186 (&I: 184,185)
                                                     ¡

(R´3) = (T´3)                     ,! 187 (=E: 79,154) ¡

(λR) = 3 & (λT) = 3 & (R´1) = (T´1)
& (R´2) = (T´2) & (R´3) = (T´3)
                                  ,! 188 (&I: 186,187)
                                                     ¡

( (λR) = 3 & (λT) = 3 & (R´1) = (T´1)
  & (R´2) = (T´2) & (R´3) = (T´3)
  ⇒ R ≣ T )
                                  ,! 189 (∀E: C1.45)  ¡

(λR) = 3 & (λT) = 3 & (R´1) = (T´1)
& (R´2) = (T´2) & (R´3) = (T´3)
⇒ R ≣ T
                                  ,! 190 (()E: 189)   ¡

R ≣ T                             ,! 191 (⇒E: 188,190)
                                                     ¡

Q ≣ S & R ≣ T                     ,! 192 (&I: 179,191)
                                                     ¡

 (λS) = d
 & (λT) = (d+2)
 & (T´1) = a
 & (T´2) = b
 & (T´(d+2)) = 0
 & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
        (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)) )
        & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
 ⇒ Q ≣ S & R ≣ T
                                  ,! 193 (⇒I: 109,192)
                                                     ¡

 ( (λS) = d
   & (λT) = (d+2)
   & (T´1) = a
   & (T´2) = b
   & (T´(d+2)) = 0
   & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
          (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                   + (T´(i+2)) )
          & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
   ⇒ Q ≣ S & R ≣ T )
                                  ,! 194 (()I: 193)   ¡

∀S∀T∀d  ( (λS) = d
          & (λT) = (d+2)
          & (T´1) = a
```

```
            & (T´2) = b
            & (T´(d+2)) = 0
            & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                   (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                             + (T´(i+2)) )
                   & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
            ⇒ Q ≣ S & R ≣ T )
                               ,! 195 (∀I: 108,194)
                                                   ¡

(λQ) = 1 & (λR) = (1+2) & (R´1) = a & (R´2) = b
& (R´(1+1)) = (a ∆ b) & (R´(1+2)) = 0
& ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,1] ⇒
       (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
       & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
& ∀S∀T∀d  ( (λS) = d
            & (λT) = (d+2)
            & (T´1) = a
            & (T´2) = b
            & (T´(d+2)) = 0
            & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                   (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                             + (T´(i+2)) )
                   & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
            ⇒ Q ≣ S & R ≣ T )
                               ,! 196 (&I: 107,195)
                                                   ¡

( (λQ) = 1 & (λR) = (1+2) & (R´1) = a & (R´2) = b
  & (R´(1+1)) = (a ∆ b) & (R´(1+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,1] ⇒
         (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
         & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
  & ∀S∀T∀d  ( (λS) = d
              & (λT) = (d+2)
              & (T´1) = a
              & (T´2) = b
              & (T´(d+2)) = 0
              & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                     (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                               + (T´(i+2)) )
                     & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
              ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                               ,! 197 (()I: 196)   ¡

∃c ( (λQ) = c & (λR) = (c+2) & (R´1) = a & (R´2) = b
     & (R´(c+1)) = (a ∆ b) & (R´(c+2)) = 0
     & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
            (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
                     + (R´(i+2)))
            & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
     & ∀S∀T∀d  ( (λS) = d
                 & (λT) = (d+2)
                 & (T´1) = a
```

& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **Q** ≡ S & **R** ≡ T))
,! 198 (∃I: 197) ¡

∃R∃c ((λ**Q**) = c & (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a** & (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** Δ **b**) & (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((**Q**´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
& ∀S∀T∀d ((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **Q** ≡ S & R ≡ T))
,! 199 (∃I: 198) ¡

∃Q∃R∃c ((λQ) = c & (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a** & (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** Δ **b**) & (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
& ∀S∀T∀d ((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i)
= (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),
(T´(i+1))])
⇒ Q ≡ S & R ≡ T))
,! 200 (∃I: 199) ¡

r = 0
⇒ ∃Q∃R∃c ((λQ) = c & (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a** & (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** Δ **b**) & (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒

```
                    (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
                               + (R´(i+2)))
                    & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
             & ∀S∀T∀d  ( (λS) = d
                        & (λT) = (d+2)
                        & (T´1) = a
                        & (T´2) = b
                        & (T´(d+2)) = 0
                        & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                               (T´i)
                               = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                   + (T´(i+2)) )
                               & <[(T´(i+2)),
                                   (T´(i+1))] )
                        ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) )
                               ,! 201 (⇒I: 67,200)
                                                   ¡

¬ r = 0                        ,! 202 (Prem)       ¡

≤[b,(n+1)]                     ,! 203 (=E: 34,46)  ¡

  b = (n+1)                    ,! 204 (Prem)       ¡

  a = b                        ,! 205 (=E: 46,204) ¡

  ( ω[b] ⇒ b|b )               ,! 206 (∀E: VI1.10) ¡

  ω[b] ⇒ b|b                   ,! 207 (()E: 206)   ¡

  b|b                          ,! 208 (⇒E: 50,207)
                                                   ¡

  b|a                          ,! 209 (=E: 205,208)
                                                   ¡

  a = ((q x b) + r) & <[r,b] & b|a
                               ,! 210 (&I: 61,209) ¡

  ( a = ((q x b) + r) & <[r,b] & b|a ⇒ r = 0 )
                               ,! 211 (∀E: VI1.55) ¡

  a = ((q x b) + r) & <[r,b] & b|a ⇒ r = 0
                               ,! 212 (()E: 211)   ¡

  r = 0                        ,! 213 (⇒E: 210,212)
                                                   ¡

  ℱ                            ,! 214 (ℱI: 202,213)
                                                   ¡

b = (n+1) ⇒ ℱ                  ,! 215 (⇒I: 204,214)
                                                   ¡

¬ b = (n+1)                    ,! 216 (¬I: 215)    ¡

≤[b,(n+1)] & ¬ b = (n+1)       ,! 217 (&I: 203,216)
                                                   ¡
```

(≤[**b**,(**n**+1)] & ¬ **b** = (**n**+1) ⇒ ≤[**b**,**n**])
,! 218 (∀E: V3.53) ¡

≤[**b**,(**n**+1)] & ¬ **b** = (**n**+1) ⇒ ≤[**b**,**n**]
,! 219 (()E: 218) ¡

≤[**b**,**n**] ,! 220 (⇒E: 217,219) ¡

ω[(**q** x **b**)] & ω[**r**] ,! 221 (ℿE: V1.7,63) ¡

ω[**r**] ,! 222 (&E: 221) ¡

ω[**r**] & ¬ **r** = 0 ,! 223 (&I: 202,222) ¡

(ω[**r**] & ¬ **r** = 0 ⇒ <[0,**r**]) ,! 224 (∀E: V4.15) ¡

ω[**r**] & ¬ **r** = 0 ⇒ <[0,**r**] ,! 225 (()E: 224) ¡

<[0,**r**] ,! 226 (⇒E: 223,225) ¡

≤[**b**,**n**] & <[0,**r**] ,! 227 (&I: 220,226) ¡

(<[**r**,**b**] ⇒ ≤[**r**,**b**]) ,! 228 (∀E: V4.5) ¡

<[**r**,**b**] ⇒ ≤[**r**,**b**] ,! 229 (()E: 228) ¡

≤[**r**,**b**] ,! 230 (⇒E: 64,229) ¡

≤[**b**,**n**] & <[0,**r**] & ≤[**r**,**b**] ,! 231 (&I: 227,230) ¡

! Applying the induction hypothesis... ¡

(≤[**b**,**n**] & <[0,**r**] & ≤[**r**,**b**]
⇒ ∃Q∃R∃c ((λQ) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **b**
& (R´2) = **r**
& (R´(c+1)) = (**b** Δ **r**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **b**
& (T´2) = **r**

```
                    & (T´(d+2)) = 0
                    & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                          (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                   + (T´(i+2)) )
                          & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                   ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
                                        ,! 232 (∀E: 26)     ¡

≤[b,n] & <[0,r] & ≤[r,b]
⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
              & (λR) = (c+2)
              & (R´1) = b
              & (R´2) = r
              & (R´(c+1)) = (b Δ r)
              & (R´(c+2)) = 0
              & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                     (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                              + (R´(i+2)) )
                     & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
              & ∀S∀T∀d
                ( (λS) = d
                  & (λT) = (d+2)
                  & (T´1) = b
                  & (T´2) = r
                  & (T´(d+2)) = 0
                  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                        (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                 + (T´(i+2)) )
                        & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                 ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                                        ,! 233 (()E: 232)   ¡

∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
           & (λR) = (c+2)
           & (R´1) = b
           & (R´2) = r
           & (R´(c+1)) = (b Δ r)
           & (R´(c+2)) = 0
           & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                  (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                           + (R´(i+2)) )
                  & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
           & ∀S∀T∀d
             ( (λS) = d
               & (λT) = (d+2)
               & (T´1) = b
               & (T´2) = r
               & (T´(d+2)) = 0
               & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                     (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                              + (T´(i+2)) )
                     & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
              ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                                        ,! 234 (⇒E: 231,233)
```

¡

∃R∃c ((λ**Q**) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **b**
& (R´2) = **r**
& (R´(c+1)) = (**b** ∆ **r**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((**Q**´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **b**
& (T´2) = **r**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **Q** ≡ S & R ≡ T))

,! 235 (∃I: 234) ¡

∃c ((λ**Q**) = c
& (λ**R**) = (c+2)
& (**R**´1) = **b**
& (**R**´2) = **r**
& (**R**´(c+1)) = (**b** ∆ **r**)
& (**R**´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1)))
+ (**R**´(i+2)))
& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **b**
& (T´2) = **r**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **Q** ≡ S & **R** ≡ T))

,! 236 (∃I: 235) ¡

((λ**Q**) = **c**
& (λ**R**) = (**c**+2)
& (**R**´1) = **b**
& (**R**´2) = **r**
& (**R**´(**c**+1)) = (**b** ∆ **r**)
& (**R**´(**c**+2)) = 0

```
   & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
          (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                   + (R´(i+2)) )
          & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
   & ∀S∀T∀d
     ( (λS) = d
       & (λT) = (d+2)
       & (T´1) = b
       & (T´2) = r
       & (T´(d+2)) = 0
       & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
              (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                       + (T´(i+2)) )
              & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
      ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                                        ,! 237 (∃I: 236)    ¡

(λQ) = c
 & (λR) = (c+2)
 & (R´1) = b
 & (R´2) = r
 & (R´(c+1)) = (b Δ r)
 & (R´(c+2)) = 0
 & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
        (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
        & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
 & ∀S∀T∀d
   ( (λS) = d
     & (λT) = (d+2)
     & (T´1) = b
     & (T´2) = r
     & (T´(d+2)) = 0
     & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
            (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                     + (T´(i+2)) )
            & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
    ⇒ Q ≣ S & R ≣ T )
                                        ,! 238 (()E: 237)   ¡

(λQ) = c                                ,! 239 (&E: 238)    ¡

(λR) = (c+2)                            ,! 240 (&E: 238)    ¡

(R´1) = b                               ,! 241 (&E: 238)    ¡

(R´2) = r                               ,! 242 (&E: 238)    ¡

(R´(c+1)) = (b Δ r)                     ,! 243 (&E: 238)    ¡

(R´(c+2)) = 0                           ,! 244 (&E: 238)    ¡

∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
     (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
     & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                                        ,! 245 (&E: 238)    ¡
```

```
∀S∀T∀d
( (λS) = d
  & (λT) = (d+2)
  & (T´1) = b
  & (T´2) = r
  & (T´(d+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
         (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)) )
         & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
 ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) )
                                   ,! 246 (&E: 238)    ¡

( (λQ) = c
  ⇒ (λ((1 ▪ q)^Q)) = (c+1)
     & (((1 ▪ q)^Q)´1) = q
     & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
           ⇒ (((1 ▪ q)^Q)´(i+1)) = (Q´i) ) )
                                   ,! 247 (∀E: C2.28)  ¡

(λQ) = c
⇒ (λ((1 ▪ q)^Q)) = (c+1)
   & (((1 ▪ q)^Q)´1) = q
   & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
         ⇒ (((1 ▪ q)^Q)´(i+1)) = (Q´i) )
                                   ,! 248 (()E: 247)   ¡

(λ((1 ▪ q)^Q)) = (c+1)
 & (((1 ▪ q)^Q)´1) = q
 & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
       ⇒ (((1 ▪ q)^Q)´(i+1)) = (Q´i) )
                                   ,! 249 (⇒E: 239,248)
                                                       ¡

(λ((1 ▪ q)^Q)) = (c+1)            ,! 250 (&E: 249)    ¡

(((1 ▪ q)^Q)´1) = q               ,! 251 (&E: 249)    ¡

∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
     ⇒ (((1 ▪ q)^Q)´(i+1)) = (Q´i) )
                                   ,! 252 (&E: 249)    ¡

ω[c] & ω[2]                        ,! 253 (𝕋E: V1.7,240)
                                                       ¡

( (λR) = (c+2)
  ⇒ (λ((1 ▪ a)^R)) = ((c+2)+1)
     & (((1 ▪ a)^R)´1) = a
     & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,(c+2)]
           ⇒ (((1 ▪ a)^R)´(i+1)) = (R´i) ) )
                                   ,! 254 (∀E: C2.28;
                                   (c+2): V1.7,253)    ¡
```

(λ**R**) = (**c**+2)
⇒ (λ((1 ▪ **a**)^**R**)) = ((**c**+2)+1)
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´1) = **a**
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(**c**+2)]
⇒ (((1 ▪ **a**)^**R**)´(i+1)) = (**R**´i))
,! 255 (()E: 254) ¡

(λ((1 ▪ **a**)^**R**)) = ((**c**+2)+1)
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´1) = **a**
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(**c**+2)]
⇒ (((1 ▪ **a**)^**R**)´(i+1)) = (**R**´i))
,! 256 (⇒E: 240,255) ¡

(λ((1 ▪ **a**)^**R**)) = ((**c**+2)+1) ,! 257 (&E: 256) ¡

(((1 ▪ **a**)^**R**)´1) = **a** ,! 258 (&E: 256) ¡

∀i (≤[1,i] & ≤[i,(**c**+2)]
⇒ (((1 ▪ **a**)^**R**)´(i+1)) = (**R**´i))
,! 259 (&E: 256) ¡

ω[**c**] & ω[2] & ω[1] ,! 260 (&I: IV9.2,253) ¡

(ω[**c**] & ω[2] & ω[1] ⇒ ((**c**+2)+1) = ((**c**+1)+2))
,! 261 (∀E: V2.19) ¡

ω[**c**] & ω[2] & ω[1] ⇒ ((**c**+2)+1) = ((**c**+1)+2)
,! 262 (()E: 261) ¡

((**c**+2)+1) = ((**c**+1)+2) ,! 263 (⇒E: 260,262) ¡

(λ((1 ▪ **a**)^**R**)) = ((**c**+1)+2) ,! 264 (=E: 257,263) ¡

(λ((1 ▪ **q**)^**Q**)) = (**c**+1)
& (λ((1 ▪ **a**)^**R**)) = ((**c**+1)+2)
,! 265 (&I: 250,264) ¡

(λ((1 ▪ **q**)^**Q**)) = (**c**+1)
& (λ((1 ▪ **a**)^**R**)) = ((**c**+1)+2)
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´1) = **a**
,! 266 (&I: 258,265) ¡

ω[**c**] ,! 267 (&E: 253) ¡

≤[1,2] & ω[**c**] ,! 268 (&I: V3.50,267) ¡

(≤[1,2] & ω[**c**] ⇒ ≤[1,(**c**+2)])
,! 269 (∀E: V3.32) ¡

≤[1,2] & ω[**c**] ⇒ ≤[1,(**c**+2)] ,! 270 (()E: 269) ¡

≤[1,(**c**+2)] ,! 271 (⇒E: 268,270) ¡

≤[1,1] & ≤[1,(**c**+2)] ,! 272 (&I: V3.49,271) ¡

(≤[1,1] & ≤[1,(**c**+2)]
⇒ (((1 ▪ **a**)^**R**)´(1+1)) = (**R**´1))
,! 273 (∀E: 259) ¡

≤[1,1] & ≤[1,(**c**+2)] ⇒ (((1 ▪ **a**)^**R**)´(1+1)) = (**R**´1)
,! 274 (()E: 273) ¡

(((1 ▪ **a**)^**R**)´(1+1)) = (**R**´1) ,! 275 (⇒E: 272,274) ¡

(((1 ▪ **a**)^**R**)´(1+1)) = **b** ,! 276 (=E: 241,275) ¡

(((1 ▪ **a**)^**R**)´2) = **b** ,! 277 (=E: V2.69) ¡

(λ((1 ▪ **q**)^**Q**)) = (**c**+1)
& (λ((1 ▪ **a**)^**R**)) = ((**c**+1)+2)
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´1) = **a**
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´2) = **b**
,! 278 (&I: 266,277) ¡

¬ **b** = 0 & **a** = ((**q** x **b**) + **r**) ,! 279 (&I: 55,63) ¡

(¬ **b** = 0 & **a** = ((**q** x **b**) + **r**)
⇒ (**a** Δ **b**) = (**b** Δ **r**))
,! 280 (∀E: VI5.56) ¡

¬ **b** = 0 & **a** = ((**q** x **b**) + **r**) ⇒ (**a** Δ **b**) = (**b** Δ **r**)
,! 281 (()E: 280) ¡

(**a** Δ **b**) = (**b** Δ **r**) ,! 282 (⇒E: 279,281) ¡

(**R**´(**c**+1)) = (**a** Δ **b**) ,! 283 (=E: 243,282) ¡

(ω[**c**] ⇒ ≤[1,(**c**+1)]) ,! 284 (∀E: V3.37) ¡

ω[**c**] ⇒ ≤[1,(**c**+1)] ,! 285 (()E: 284) ¡

≤[1,(**c**+1)] ,! 286 (⇒E: 267,285) ¡

(≤[1,2] & ω[**c**] ⇒ ≤[(**c**+1),(**c**+2)])

,! 287 (∀E: V3.29) ¡

≤[1,2] & ω[**c**] ⇒ ≤[(**c**+1),(**c**+2)]
,! 288 (()E: 287) ¡

≤[(**c**+1),(**c**+2)] ,! 289 (⇒E: 268,288) ¡

≤[1,(**c**+1)] & ≤[(**c**+1),(**c**+2)] ,! 290 (&I: 286,289) ¡

ω[**c**] & ω[1] ,! 291 (𝕋E: V1.7,289) ¡

(≤[1,(**c**+1)] & ≤[(**c**+1),(**c**+2)]
⇒ (((1 ▪ **a**)^**R**)´((**c**+1)+1)) = (**R**´(**c**+1)))
,! 292 (∀E: 259;
(**c**+1): V1.7,291) ¡

≤[1,(**c**+1)] & ≤[(**c**+1),(**c**+2)]
⇒ (((1 ▪ **a**)^**R**)´((**c**+1)+1)) = (**R**´(**c**+1))
,! 293 (()E: 292) ¡

(((1 ▪ **a**)^**R**)´((**c**+1)+1)) = (**R**´(**c**+1))
,! 294 (⇒E: 290,293) ¡

(((1 ▪ **a**)^**R**)´((**c**+1)+1)) = (**a** ∆ **b**)
,! 295 (=E: 283,294) ¡

(λ((1 ▪ **q**)^**Q**)) = (**c**+1)
& (λ((1 ▪ **a**)^**R**)) = ((**c**+1)+2)
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´1) = **a**
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´2) = **b**
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´((**c**+1)+1)) = (**a** ∆ **b**)
,! 296 (&I: 278,295) ¡

≤[2,2] & ω[**c**] ,! 297 (&I: V3.51,267) ¡

(≤[2,2] & ω[**c**] ⇒ ≤[(**c**+2),(**c**+2)])
,! 298 (∀E: V3.29) ¡

≤[1,2] & ω[**c**] ⇒ ≤[(**c**+2),(**c**+2)]
,! 299 (()E: 298) ¡

≤[(**c**+2),(**c**+2)] ,! 300 (⇒E: 268,299) ¡

≤[1,(**c**+2)] & ≤[(**c**+2),(**c**+2)] ,! 301 (&I: 271,300) ¡

(≤[1,(**c**+2)] & ≤[(**c**+2),(**c**+2)]
⇒ (((1 ▪ **a**)^**R**)´((**c**+2)+1)) = (**R**´(**c**+2)))

,! 302 (∀E: 259;
(**c**+2): V1.7,253) ¡

≤[1,(**c**+2)] & ≤[(**c**+2),(**c**+2)]
⇒ (((1 ▪ **a**)^**R**)´((**c**+2)+1)) = (**R**´(**c**+2))
,! 303 (()E: 302) ¡

(((1 ▪ **a**)^**R**)´((**c**+2)+1)) = (**R**´(**c**+2))
,! 304 (⇒E: 301,303)
¡

(((1 ▪ **a**)^**R**)´((**c**+2)+1)) = 0 ,! 305 (=E: 244,304)
¡

(((1 ▪ **a**)^**R**)´((**c**+1)+2)) = 0 ,! 306 (=E; 263,305)
¡

(λ((1 ▪ **q**)^**Q**)) = (**c**+1)
& (λ((1 ▪ **a**)^**R**)) = ((**c**+1)+2)
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´1) = **a**
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´2) = **b**
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´((**c**+1)+1)) = (**a** Δ **b**)
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´((**c**+1)+2)) = 0
,! 307 (&I: 296,306)
¡

i ,! 308 (Prem) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(**c**+1)] ,! 309 (Prem) ¡

≤[1,**i**] ,! 310 (&E: 309) ¡

≤[**i**,(**c**+1)] ,! 311 (&E): 309 ¡

(**i** = 1 ∨ ¬ **i** = 1) ,! 312 (∀E: I3.4) ¡

i = 1 ∨ ¬ **i** = 1 ,! 313 (()E: 312) ¡

(((1 ▪ **a**)^**R**)´1) = ((**q** x **b**) + **r**) & <[**r**,**b**]
,! 314 (=E: 62,258) ¡

(((1 ▪ **a**)^**R**)´1) = (((((1 ▪ **q**)^**Q**)´1) x **b**) + **r**)
& <[**r**,**b**]
,! 314 (=E: 251,314)
¡

(((1 ▪ **a**)^**R**)´1)
= (((((1 ▪ **q**)^**Q**)´1) x (((1 ▪ **a**)^**R**)´(1+1))) + **r**)
& <[**r**,(((1 ▪ **a**)^**R**)´(1+1))]
,! 315 (=E: 276,314)
¡

ω[2] & ω[**c**] ,! 316 (&I: IV9.11,267)
¡

(ω[2] & ω[**c**] ⇒ ≤[2,(**c**+2)])

```
                              ,! 317 (∀E: V3.34)  ¡

ω[2] & ω[c] ⇒ ≤[2,(c+2)]  ,! 318 (()E: 317)    ¡

≤[2,(c+2)]                ,! 319 (⇒E: 316,318)
                                                  ¡

≤[1,2] & ≤[2,(c+2)]       ,! 320 (&I: V3.50,319)
                                                  ¡

( ≤[1,2] & ≤[2,(c+2)]
  ⇒ (((1 ■ a)^R)´(2+1)) = (R´2) )
                              ,! 321 (∀E: 259)    ¡

≤[1,2] & ≤[2,(c+2)]
⇒ (((1 ■ a)^R)´(2+1)) = (R´2)
                              ,! 322 (()E: 321)   ¡

(((1 ■ a)^R)´(2+1)) = (R´2)
                              ,! 323 (⇒E: 320,322)
                                                  ¡

(((1 ■ a)^R)´3) = (R´2)
                              ,! 324 (=E: V2.70,323)
                                                  ¡

(((1 ■ a)^R)´(1+2)) = (R´2)
                              ,! 325 (=E: V2.71,324)
                                                  ¡

(((1 ■ a)^R)´(1+2)) = r   ,! 326 (=E: 242,325)
                                                  ¡

(((1 ■ a)^R)´1)
= (((((1 ■ q)^Q)´1) x (((1 ■ a)^R)´(1+1)))
   + (((1 ■ a)^R)´(1+2)))
& <[(((1 ■ a)^R)´(1+2)),(((1 ■ a)^R)´(1+1))]
                              ,! 327 (=E: 315,326)
                                                  ¡

  i = 1                       ,! 328 (Prem)       ¡

  (((1 ■ a)^R)´i)
  = (((((1 ■ q)^Q)´i) x (((1 ■ a)^R)´(i+1)))
     + (((1 ■ a)^R)´(i+2)))
  & <[(((1 ■ a)^R)´(i+2)),(((1 ■ a)^R)´(i+1))]
                              ,! 329 (=E: 327,328)
                                                  ¡

i = 1
⇒ (((1 ■ a)^R)´i)
   = (((((1 ■ q)^Q)´i) x (((1 ■ a)^R)´(i+1)))
      + (((1 ■ a)^R)´(i+2)))
   & <[(((1 ■ a)^R)´(i+2)),(((1 ■ a)^R)´(i+1))]
                              ,! 330 (⇒I: 328,329)
                                                  ¡
```

¬ **i** = 1 ,! 331 (Prem) ¡

≤[1,**i**] & ¬ **i** = 1 ,! 332 (&I: 310,331) ¡

(≤[1,**i**] & ¬ **i** = 1 ⇒ ≤[2,**i**])
,! 333 (∀E: V3.63) ¡

≤[1,**i**] & ¬ **i** = 1 ⇒ ≤[2,**i**]
,! 334 (()E: 333) ¡

≤[2,**i**] ,! 335 (⇒E: 332,334) ¡

≤[(1+1),**i**] ,! 336 (=E: V2.69,335) ¡

(≤[(1+1),**i**] ⇒ ≤[1,(**i**-1)])
,! 337 (∀E: V6.84) ¡

≤[(1+1),**i**] ⇒ ≤[1,(**i**-1)] ,! 338 (()E: 337) ¡

≤[1,(**i**-1)] ,! 339 (⇒E: 336,338) ¡

≤[**i**,(**c**+1)] & ≤[1,**i**] ,! 340 (&I: 310,311) ¡

(≤[**i**,(**c**+1)] & ≤[1,**i**] ⇒ ≤[(**i**-1),**c**])
,! 341 (∀E: V6.82) ¡

≤[**i**,(**c**+1)] & ≤[1,**i**] ⇒ ≤[(**i**-1),**c**]
,! 342 (()E: 341) ¡

≤[(**i**-1),**c**] ,! 343 (⇒E: 340,342) ¡

≤[1,(**i**-1)] & ≤[(**i**-1),**c**] ,! 344 (&I: 339,343) ¡

(≤[1,(**i**-1)] & ≤[(**i**-1),**c**] ⇒
(**R**´(**i**-1)) = (((**Q**´(**i**-1)) x (**R**´((**i**-1)+1)))
+ (**R**´((**i**-1)+2)))
& <[(**R**´((**i**-1)+2)),(**R**´((**i**-1)+1))])
,! 345 (∀E: 245;
(**i**-1): V5.7,310) ¡

≤[1,(**i**-1)] & ≤[(**i**-1),**c**] ⇒
(**R**´(**i**-1)) = (((**Q**´(**i**-1)) x (**R**´((**i**-1)+1)))
+ (**R**´((**i**-1)+2)))
& <[(**R**´((**i**-1)+2)),(**R**´((**i**-1)+1))]
,! 346 (()E: 345) ¡

(**R**´(**i**-1)) = (((**Q**´(**i**-1)) x (**R**´((**i**-1)+1)))
+ (**R**´((**i**-1)+2)))
& <[(**R**´((**i**-1)+2)),(**R**´((**i**-1)+1))]
,! 347 (⇒E: 344,346)

¡

(≤[i,**i**] ⇒ ((**i**-1) + 1) = **i**)
,! 348 (∀E: V6.3) ¡

≤[i,**i**] ⇒ ((**i**-1) + 1) = **i**
,! 349 (()E: 348) ¡

((**i**-1) + 1) = **i** ,! 350 (⇒E: 310,349)
¡

(**R**´(**i**-1)) = (((**Q**´(**i**-1)) x (**R**´**i**))
+ (**R**´((**i**-1)+2)))
& <[(**R**´((**i**-1)+2)),(**R**´**i**)]
,! 351 (=E: 347,350)
¡

≤[1,2] & ≤[1,**i**] ,! 352 (&I: V3.50,310)
¡

(≤[1,2] & ≤[1,**i**]
⇒ ((**i**-1) + 2) = (**i** + (2-1)))
,! 353 (∀E: V6.40) ¡

≤[1,2] & ≤[1,**i**] ⇒ ((**i**-1) + 2) = (**i** + (2-1))
,! 354 (()E: 353) ¡

((**i**-1) + 2) = (**i** + (2-1))
,! 355 (⇒E: 352,354)
¡

((**i**-1) + 2) = (**i**+1) ,! 356 (=E: V6.19) ¡

(**R**´(**i**-1)) = (((**Q**´(**i**-1)) x (**R**´**i**))
+ (**R**´(**i**+1)))
& <[(**R**´(**i**+1)),(**R**´**i**)]
,! 357 (=E: 351,356)
¡

≤[**i**,(**c**+1)] & ≤[(**c**+1),(**c**+2)]
,! 358 (&I: 289,311)
¡

(≤[**i**,(**c**+1)] & ≤[(**c**+1),(**c**+2)] ⇒ ≤[**i**,(**c**+2)])
,! 359 (∀E: V3.20;
(**c**+1): V1.7,291;
(**c**+2): V1.7,253) ¡

≤[**i**,(**c**+1)] & ≤[(**c**+1),(**c**+2)] ⇒ ≤[**i**,(**c**+2)]
,! 360 (()E: 359) ¡

≤[**i**,(**c**+2)] ,! 361 (⇒E: 358,360)
¡

(≤[1,**i**] ⇒ ≤[(**i**-1),**i**]) ,! 362 (∀E: V6.74) ¡

≤[1,**i**] ⇒ ≤[(**i**-1),**i**] ,! 363 (()E: 362) ¡

≤[(**i**-1),**i**] ,! 364 (⇒E: 310,363) ¡

≤[(**i**-1),**i**] & ≤[**i**,(**c**+2)] ,! 365 (&I: 361,364) ¡

(≤[(**i**-1),**i**] & ≤[**i**,(**c**+2)] ⇒ ≤[(**i**-1),(**c**+2)])
,! 366 (∀E: V3.20;
(**i**-1): V5.7,310;
(**c**+2): C1.7,253) ¡

≤[(**i**-1),**i**] & ≤[**i**,(**c**+2)] ⇒ ≤[(**i**-1),(**c**+2)]
,! 367 (()E: 366) ¡

≤[(**i**-1),(**c**+2)] ,! 368 (⇒E: 365,367) ¡

≤[1,(**i**-1)] & ≤[(**i**-1),(**c**+2)]
,! 369 (&I: 339,368) ¡

(≤[1,(**i**-1)] & ≤[(**i**-1),(**c**+2)]
⇒ (((1 ■ **a**)^**R**)´((**i**-1)+1)) = (**R**´(**i**-1)))
,! 370 (∀E: 259;
(**i**-1): V5.7,310) ¡

≤[1,(**i**-1)] & ≤[(**i**-1),(**c**+2)]
⇒ (((1 ■ **a**)^**R**)´((**i**-1)+1)) = (**R**´(**i**-1))
,! 371 (()E: 370) ¡

(((1 ■ **a**)^**R**)´((**i**-1)+1)) = (**R**´(**i**-1))
,! 372 (⇒E: 369,371) ¡

(((1 ■ **a**)^**R**)´**i**) = (**R**´(**i**-1))
,! 373 (=E: 350,372) ¡

(((1 ■ **a**)^**R**)´**i**) = (((**Q**´(**i**-1)) x (**R**´**i**))
+ (**R**´(**i**+1)))
& <[(**R**´(**i**+1)),(**R**´**i**)]
,! 374 (=E: 357,373) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(**c**+2)] ,! 375 (&I: 310,361) ¡

(≤[1,**i**] & ≤[**i**,(**c**+2)]
⇒ (((1 ■ **a**)^**R**)´(**i**+1)) = (**R**´**i**))
,! 376 (∀E: 259) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(**c**+2)]
⇒ (((1 ■ **a**)^**R**)´(**i**+1)) = (**R**´**i**)
,! 377 (()E: 376) ¡

(((1 ■ **a**)^**R**)´(**i**+1)) = (**R**´**i**)
,! 378 (⇒E: 375,377)

¡

(((1 ■ **a**)^**R**)´**i**)
= (((**Q**´(**i**-1)) x (((1 ■ **a**)^**R**)´(**i**+1)))
+ (**R**´(**i**+1)))
& <[(**R**´(**i**+1)),(((1 ■ **a**)^**R**)´(**i**+1))]
,! 379 (=E: 374,378)
¡

ω[**i**] & ω[1] ,! 380 (𝕋E: V1.7,356)
¡

ω[**i**] ,! 381 (&E: 380) ¡

(ω[**i**] ⇒ ≤[1,(**i**+1)]) ,! 382 (∀E: V3.37) ¡

ω[**i**] ⇒ ≤[1,(**i**+1)] ,! 383 (()E: 382) ¡

≤[1,(**i**+1)] ,! 384 (⇒E: 381,383)
¡

≤[(**i**-1),**c**] & ω[2] ,! 385 (&I: IV9.11,343)
¡

(≤[(**i**-1),**c**] & ω[2] ⇒ ≤[((**i**-1) + 2),(**c** + 2)])
,! 386 (∀E: V3.28;
(**i**-1): V5.7,310) ¡

≤[(**i**-1),**c**] & ω[2] ⇒ ≤[((**i**-1) + 2),(**c** + 2)]
,! 387 (()E: 386) ¡

≤[((**i**-1) + 2),(**c** + 2)] ,! 388 (⇒E: 385,387)
¡

≤[(**i**+1),(**c**+2)] ,! 389 (=E: 356,388)
¡

≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),(**c**+2)]
,! 390 (&I: 384,389)
¡

(≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),(**c**+2)]
⇒ (((1 ■ **a**)^**R**)´((**i**+1)+1)) = (**R**´(**i**+1)))
,! 391 (∀E: 259;
(**i**+1): V1.7,380) ¡

≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),(**c**+2)]
⇒ (((1 ■ **a**)^**R**)´((**i**+1)+1)) = (**R**´(**i**+1))
,! 392 (()E: 391) ¡

(((1 ■ **a**)^**R**)´((**i**+1)+1)) = (**R**´(**i**+1))
,! 393 (⇒E: 390,392)
¡

ω[**i**] & ω[1] & ω[1] ,! 394 (&I: IV9.2,380)
¡

(ω[i] & ω[1] & ω[1]
⇒ (i + (1 + 1)) = ((i + 1) + 1))
,! 395 (∀E: V2.14) ¡

ω[i] & ω[1] & ω[1]
⇒ (i + (1 + 1)) = ((i + 1) + 1)
,! 396 (()E: 395) ¡

(i + (1 + 1)) = ((i + 1) + 1)
,! 397 (⇒E: 394,396)
¡

(i + 2) = ((i + 1) + 1) ,! 398 (=E: V2.69,397)
¡

(((1 ▪ a)^R)´(i+2)) = (R´(i+1))
,! 399 (=E: 393,398)
¡

(((1 ▪ a)^R)´i)
= (((Q´(i-1)) x (((1 ▪ a)^R)´(i+1)))
+ (((1 ▪ a)^R)´(i+2)))
& <[(((1 ▪ a)^R)´(i+2)),(((1 ▪ a)^R)´(i+1))]
,! 400 (=E: 379,399)
¡

(≤[1,(i-1)] & ≤[(i-1),c]
⇒ (((1 ▪ q)^Q)´((i-1)+1)) = (Q´(i-1)))
,! 401 (∀E: 252;
(i-1): V5.7,310) ¡

≤[1,(i-1)] & ≤[(i-1),c]
⇒ (((1 ▪ q)^Q)´((i-1)+1)) = (Q´(i-1))
,! 402 (()E: 401) ¡

(((1 ▪ q)^Q)´((i-1)+1)) = (Q´(i-1))
,! 403 (⇒E: 344,402)
¡

(((1 ▪ q)^Q)´i) = (Q´(i-1))
,! 404 (=E: 350,403)
¡

(((1 ▪ a)^R)´i)
= (((((1 ▪ q)^Q)´i) x (((1 ▪ a)^R)´(i+1)))
+ (((1 ▪ a)^R)´(i+2)))
& <[(((1 ▪ a)^R)´(i+2)),(((1 ▪ a)^R)´(i+1))]
,! 405 (=E: 400,404)
¡

¬ i = 1
⇒ (((1 ▪ a)^R)´i)
= (((((1 ▪ q)^Q)´i) x (((1 ▪ a)^R)´(i+1)))
+ (((1 ▪ a)^R)´(i+2)))
& <[(((1 ▪ a)^R)´(i+2)),(((1 ▪ a)^R)´(i+1))]
,! 406 (⇒I: 331,405)

```
                                                                   ¡
      (((1 ■ a)^R)´i)
      = (((((1 ■ q)^Q)´i) x (((1 ■ a)^R)´(i+1)))
         + (((1 ■ a)^R)´(i+2)))
      & <[(((1 ■ a)^R)´(i+2)),(((1 ■ a)^R)´(i+1))]
                                    ,! 407 (∨E: 313,330,
                                                406)    ¡

    ≤[1,i] & ≤[i,(c+1)]
    ⇒ (((1 ■ a)^R)´i)
       = (((((1 ■ q)^Q)´i) x (((1 ■ a)^R)´(i+1)))
          + (((1 ■ a)^R)´(i+2)))
       & <[(((1 ■ a)^R)´(i+2)),(((1 ■ a)^R)´(i+1))]
                                    ,! 408 (⇒I: 309,407)
                                                        ¡

    ( ≤[1,i] & ≤[i,(c+1)]
      ⇒ (((1 ■ a)^R)´i)
         = (((((1 ■ q)^Q)´i) x (((1 ■ a)^R)´(i+1)))
            + (((1 ■ a)^R)´(i+2)))
         & <[(((1 ■ a)^R)´(i+2)),
              (((1 ■ a)^R)´(i+1))] )
                                    ,! 409 (()I: 408)   ¡

  ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,(c+1)]
       ⇒ (((1 ■ a)^R)´i)
          = (((((1 ■ q)^Q)´i) x (((1 ■ a)^R)´(i+1)))
             + (((1 ■ a)^R)´(i+2)))
          & <[(((1 ■ a)^R)´(i+2)),
               (((1 ■ a)^R)´(i+1))] )
                                    ,! 410 (∀I: 308,409)
                                                        ¡

  (λ((1 ■ q)^Q)) = (c+1)
  & (λ((1 ■ a)^R)) = ((c+1)+2)
  & (((1 ■ a)^R)´1) = a
  & (((1 ■ a)^R)´2) = b
  & (((1 ■ a)^R)´((c+1)+1)) = (a Δ b)
  & (((1 ■ a)^R)´((c+1)+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,(c+1)]
         ⇒ (((1 ■ a)^R)´i)
            = (((((1 ■ q)^Q)´i) x (((1 ■ a)^R)´(i+1)))
               + (((1 ■ a)^R)´(i+2)))
            & <[(((1 ■ a)^R)´(i+2)),
                 (((1 ■ a)^R)´(i+1))] )
                                    ,! 411 (&I: 307,410)
                                                        ¡

    S,T,d                           ,! 412 (Prem)       ¡

      (λS) = d
      & (λT) = (d+2)
```

& (**T**´1) = **a**
& (**T**´2) = **b**
& (**T**´(**d**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**d**] ⇒
(**T**´i) = (((**S**´i) x (**T**´(i+1)))
+ (**T**´(i+2)))
& <[(**T**´(i+2)),(**T**´(i+1))])
,! 413 (Prem) ¡

(λ**S**) = **d** ,! 414 (&E: 413) ¡

(λ**T**) = (**d**+2) ,! 415 (&E: 413) ¡

(**T**´1) = **a** ,! 416 (&E: 413) ¡

(**T**´2) = **b** ,! 417 (&E: 413) ¡

(**T**´(**d**+2)) = 0 ,! 418 (&E: 413) ¡

∀i (≤[1,i] & ≤[i,**d**] ⇒
(**T**´i) = (((**S**´i) x (**T**´(i+1)))
+ (**T**´(i+2)))
& <[(**T**´(i+2)),(**T**´(i+1))])
,! 419 (&E: 413) ¡

ω[**d**] & ω[2] ,! 420 (𝕋E: V1.7,415)
¡

ω[**d**] ,! 421 (&E: 420) ¡

d = 0 ,! 422 (Prem) ¡

(**T**´(0+2)) = 0 ,! 423 (=E: 415,422)
¡

(**T**´2) = 0 ,! 424 (=E: V2.68,423)
¡

b = 0 ,! 425 (=E: 417,424)
¡

ℑ ,! 426 (ℑI: 55,425)
¡

d = 0 ⇒ ℑ ,! 427 (⇒I: 422,426)
¡

¬ **d** = 0 ,! 428 (¬I: 427) ¡

ω[**d**] & ¬ **d** = 0 ,! 429 (&I: 421,428)
¡

(ω[**d**] & ¬ **d** = 0 ⇒ ≤[1,**d**])
,! 430 (∀E: V3.38) ¡

ω[**d**] & ¬ **d** = 0 ⇒ ≤[1,**d**] ,! 431 (( )E: 430) ¡

≤[1,**d**] ,! 432 (⇒E: 429,431)
¡

≤[1,1] & ≤[1,**d**] ,! 433 (&I: V3.49,432) ¡

(≤[1,1] & ≤[1,**d**] ⇒
(**T**´1) = (((**S**´1) x (**T**´(1+1))) + (**T**´(1+2)))
& <[(**T**´(1+2)),(**T**´(1+1))])
,! 434 (∀E: 419) ¡

≤[1,1] & ≤[1,**d**] ⇒
(**T**´1) = (((**S**´1) x (**T**´(1+1))) + (**T**´(1+2)))
& <[(**T**´(1+2)),(**T**´(1+1))]
,! 435 (()E: 434) ¡

(**T**´1) = (((**S**´1) x (**T**´(1+1))) + (**T**´(1+2)))
& <[(**T**´(1+2)),(**T**´(1+1))]
,! 436 (⇒E: 433,435) ¡

(**T**´1) = (((**S**´1) x (**T**´2)) + (**T**´(1+2)))
& <[(**T**´(1+2)),(**T**´2)]
,! 437 (=E: V2.69,436) ¡

(**T**´1) = (((**S**´1) x (**T**´2)) + (**T**´3))
& <[(**T**´3),(**T**´2)]
,! 438 (=E: V2.71,437) ¡

a = (((**S**´1) x (**T**´2)) + (**T**´3)) & <[(**T**´3),(**T**´2)]
,! 439 (=E: 416,438) ¡

a = (((**S**´1) x **b**) + (**T**´3)) & <[(**T**´3),**b**]
,! 440 (=E: 417,439) ¡

a = ((**q** x **b**) + **r**) & <[**r**,**b**]
& **a** = (((**S**´1) x **b**) + (**T**´3)) & <[(**T**´3),**b**]
,! 441 (&I: 62,440) ¡

a = (((**S**´1) x **b**) + (**T**´3))
,! 442 (&E: 440) ¡

ω[((**S**´1) x **b**)] & ω[(**T**´3)] ,! 443 (𝕋E: V1.7,442) ¡

ω[((**S**´1) x **b**)] ,! 444 (&E: 443) ¡

ω[(**T**´3)] ,! 445 (&E: 443) ¡

ω[(**S**´1)] & ω[**b**] ,! 446 (𝕋E: V7.9,444) ¡

ω[(**S**´1)] ,! 447 (&E: 446) ¡

f S & (**S**^{D})[1] ,! 448 (𝕋E: III8.20,

447) ¡

f T & (T^D)[3] ,! 449 (𝕋E: III8.20, 445) ¡

(a = ((q x b) + r) & <[r,b]
& a = (((S´1) x b) + (T´3)) & <[(T´3),b]
⇒ (S´1) = q & (T´3) = r)
,! 450 (∀E: V8.68; (S´1): III8.20,448; (T´3): III8.20,449) ¡

a = ((q x b) + r) & <[r,b]
& a = (((S´1) x b) + (T´3)) & <[(T´3),b]
⇒ (S´1) = q & (T´3) = r
,! 451 (()E: 450) ¡

(S´1) = q & (T´3) = r ,! 452 (⇒E: 441,451) ¡

(S´1) = q ,! 453 (&E: 452) ¡

≤[1,d] & (λS) = d ,! 454 (&I: 414,432) ¡

(≤[1,d] & (λS) = d
⇒ ∃g∃H ((λH) = (d-1) & S ≣ ((1 ▪ g)^H)))
,! 455 (∀E: C2.35) ¡

≤[1,d] & (λS) = d
⇒ ∃g∃H ((λH) = (d-1) & S ≣ ((1 ▪ g)^H))
,! 456 (()E: 455) ¡

∃g∃H ((λH) = (d-1) & S ≣ ((1 ▪ g)^H))
,! 457 (⇒E: 454,456) ¡

∃H ((λH) = (d-1) & S ≣ ((1 ▪ u)^H))
,! 458 (∃E: 457) ¡

((λU) = (d-1) & S ≣ ((1 ▪ u)^U))
,! 459 (∃E: 458) ¡

(λU) = (d-1) & S ≣ ((1 ▪ u)^U)
,! 460 (()E: 459) ¡

(λU) = (d-1) ,! 461 (&E: 460) ¡

S ≣ ((1 ▪ u)^U) ,! 462 (&E: 460) ¡

S ≣ ((1 ▪ u)^U) & (S´1) = q
,! 463 (&I: 453,462) ¡

θ U ,! 464 (𝕋E: C1.17,461)

¡

(θ **U** ⇒ (((1 ▪ **u**)^**U**)´1) = **u**)
,! 465 (∀E: C2.23) ¡

θ **U** ⇒ (((1 ▪ **u**)^**U**)´1) = **u**
,! 466 (()E: 465) ¡

(((1 ▪ **u**)^**U**)´1) = **u** ,! 467 (⇒E: 464,466)
¡

S ≣ ((1 ▪ **u**)^**U**) & (**S**´1) = **q**
& (((1 ▪ **u**)^**U**)´1) = **u**
,! 468 (&I: 463,467)
¡

(**S** ≣ ((1 ▪ **u**)^**U**) & (**S**´1) = **q**
& (((1 ▪ **u**)^**U**)´1) = **u**
⇒ **q** = **u**)
,! 469 (∀E: III8.29)
¡

S ≣ ((1 ▪ **u**)^**U**) & (**S**´1) = **q**
& (((1 ▪ **u**)^**U**)´1) = **u**
⇒ **q** = **u**
,! 470 (()E: 469) ¡

q = **u** ,! 471 (⇒E: 468,470)
¡

S ≣ ((1 ▪ **q**)^**U**) ,! 472 (=E: 462,471)
¡

(**T**´1) = **a** & (λ**T**) = (**d**+2) ,! 473 (&I: 415,416)
¡

((**T**´1) = **a** & (λ**T**) = (**d**+2)
⇒ ∃H ((λH) = ((**d**+2)-1) & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^H)))
,! 474 (∀E: C2.36;
(**d**+2): V1.7,420) ¡

(**T**´1) = **a** & (λ**T**) = (**d**+2)
⇒ ∃H ((λH) = ((**d**+2)-1) & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^H))
,! 475 (()E: 474) ¡

∃H ((λH) = ((**d**+2)-1) & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^H))
,! 476 (⇒E: 473,475)
¡

((λ**V**) = ((**d**+2)-1) & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**))
,! 477 (∃E: 476) ¡

(λ**V**) = ((**d**+2)-1) & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**)
,! 478 (()E: 477) ¡

(λ**V**) = ((**d**+2)-1) ,! 479 (&E: 478) ¡

T ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**) ,! 480 (&E: 478) ¡

≤[1,**d**] & ω[2] ,! 481 (&I: IV9.11,432) ¡

(≤[1,**d**] & ω[2] ⇒ ((**d**+2)-1) = ((**d**-1)+2))
,! 482 (∀E: V6.38) ¡

≤[1,**d**] & ω[2] ⇒ ((**d**+2)-1) = ((**d**-1)+2)
,! 483 (()E: 482) ¡

((**d**+2)-1) = ((**d**-1)+2) ,! 484 (⇒E: 481,483) ¡

(λ**V**) = ((**d**-1)+2) ,! 485 (=E: 479,484) ¡

(λ**U**) = (**d**-1) & (λ**V**) = ((**d**-1)+2)
,! 486 (&I: 461,485) ¡

θ **V** ,! 487 (𝕋E: C1.17,479) ¡

θ **V** & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**) ,! 488 (&I: 480,487) ¡

(**T**´(1+1)) = **b** ,! 489 (=E: V2.69,417) ¡

θ **V** & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**) & (**T**´(1+1)) = **b**
,! 490 (&I: 488,489) ¡

θ **V** & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**) & (**T**´(1+1)) = **b** & ≤[1,1]
,! 491 (&I: V3.49,490) ¡

(θ **V** & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**) & (**T**´(1+1)) = **b** & ≤[1,1]
⇒ (**V**´1) = **b**)
,! 492 (∀E: C2.27) ¡

θ **T** & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**) & (**T**´(1+1)) = **b** & ≤[1,1]
⇒ (**V**´1) = **b**
,! 493 (()E: 492) ¡

(**V**´1) = **b** ,! 494 (⇒E: 491,493) ¡

(λ**U**) = (**d**-1)
& (λ**V**) = ((**d**-1)+2)
& (**V**´1) = **b**
,! 495 (&I: 486,494)

¡

(**T**´3) = **r** ,! 496 (&E: 452) ¡

(**T**´(2+1)) = **r** ,! 497 (=E: V2.70,496)
¡

θ **V** & **T** ≡ ((1 ▪ **a**)^**V**) & (**T**´(2+1)) = **r**
,! 498 (&I: 488,497)
¡

θ **V** & **T** ≡ ((1 ▪ **a**)^**V**) & (**T**´(2+1)) = **r** & ≤[1,2]
,! 499 (&I: V3.50,498)
¡

(θ **V** & **T** ≡ ((1 ▪ **a**)^**V**) & (**T**´(2+1)) = **r** & ≤[1,2]
⇒ (**V**´2) = **r**)
,! 500 (∀E: C2.27) ¡

θ **T** & **T** ≡ ((1 ▪ **a**)^**V**) & (**T**´(2+1)) = **r** & ≤[1,2]
⇒ (**V**´2) = **r**
,! 501 (()E: 500) ¡

(**V**´2) = **r** ,! 502 (⇒E: 499,501)
¡

(λ**U**) = (**d**-1)
& (λ**V**) = ((**d**-1)+2)
& (**V**´1) = **b**
& (**V**´2) = **r**
,! 503 (&I: 495,502)
¡

ω[**d**] & ω[1] ,! 504 (&I: IV9.2,421)
¡

ω[**d**] & ω[1] & ω[1] ,! 505 (&I: IV9.2,504)
¡

(ω[**d**] & ω[1] & ω[1] ⇒ (**d**+(1+1)) = ((**d**+1)+1))
,! 506 (∀E: V2.14) ¡

ω[**d**] & ω[1] & ω[1] ⇒ (**d**+(1+1)) = ((**d**+1)+1)
,! 507 (()E: 506) ¡

(**d**+(1+1)) = ((**d**+1)+1) ,! 508 (⇒E: 505,507)
¡

(**d**+2) = ((**d**+1)+1) ,! 509 (=E: V2.69,508)
¡

(**T**´((**d**+1)+1)) = 0 ,! 510 (=E: 418,509)
¡

θ **V** & **T** ≡ ((1 ▪ **a**)^**V**) & (**T**´((**d**+1)+1)) = 0
,! 511 (&I: 488,510)
¡

(ω[d] ⇒ ≤[1,(d+1)]) ,! 513 (∀E: V3.37) ¡

ω[d] ⇒ ≤[1,(d+1)] ,! 514 (()E: 513) ¡

≤[1,(d+1)] ,! 515 (⇒E: 421,514) ¡

θ V & T ≣ ((1 ▪ a)^V) & (T´((d+1)+1)) = 0
& ≤[1,(d+1)]
,! 516 (&I: 511,515) ¡

(θ V & T ≣ ((1 ▪ a)^V) & (T´((d+1)+1)) = 0
& ≤[1,(d+1)]
⇒ (V´(d+1)) = 0)
,! 517 (∀E: C2.27;
(d+1): V1.7,504) ¡

θ V & T ≣ ((1 ▪ a)^V) & (T´((d+1)+1)) = 0
& ≤[1,(d+1)]
⇒ (V´(d+1)) = 0
,! 518 (()E: 517) ¡

(V´(d+1)) = 0 ,! 519 (⇒E: 516,518) ¡

≤[1,2] & ≤[1,d] ,! 520 (&I: V3.50,432) ¡

(≤[1,2] & ≤[1,d] ⇒ ((d-1) + 2) = (d + (2-1)))
,! 521 (∀E: V6.40) ¡

≤[1,2] & ≤[1,d] ⇒ ((d-1) + 2) = (d + (2-1))
,! 522 (()E: 521) ¡

((d-1) + 2) = (d + (2-1)) ,! 523 (⇒E: 520,522) ¡

((d-1) + 2) = (d + 1) ,! 524 (=E: V6.19,523) ¡

(V´((d-1) + 2)) = 0 ,! 525 (=E: 519,524) ¡

(λU) = (d-1)
& (λV) = ((d-1)+2)
& (V´1) = b
& (V´2) = r
& (V´((d-1)+2)) = 0
,! 526 (&I: 503,525) ¡

i ,! 527 (Prem) ¡

≤[1,i] & ≤[i,(d-1)] ,! 528 (Prem) ¡

≤[1,**i**] ,! 529 (&E: 528) ¡

≤[**i**,(**d**-1)] ,! 530 (&E: 528) ¡

≤[1,**i**] & ω[1] ,! 531 (&I: IV9.2,529) ¡

(≤[1,**i**] & ω[1] ⇒ ≤[1,(**i**+1)])
,! 532 (∀E: V3.31) ¡

≤[1,**i**] & ω[1] ⇒ ≤[1,(**i**+1)]
,! 533 (()E: 532) ¡

≤[1,(**i**+1)] ,! 534 (⇒E: 531,533) ¡

(≤[**i**,(**d**-1)] ⇒ ≤[(**i**+1),**d**])
,! 535 (∀E: V6.81) ¡

≤[**i**,(**d**-1)] ⇒ ≤[(**i**+1),**d**]
,! 536 (()E: 535) ¡

≤[(**i**+1),**d**] ,! 537 (⇒E: 530,536) ¡

≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),**d**]
,! 538 (&I: 534,537) ¡

ω[**i**] & ω[1] ,! 539 (𝕀E: V1.7,537) ¡

(≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),**d**] ⇒
(**T**´(**i**+1)) = (((**S**´(**i**+1)) x (**T**´((**i**+1)+1)))
+ (**T**´((**i**+1)+2)))
& <[(**T**´((**i**+1)+2)),(**T**´((**i**+1)+1))])
,! 540 (∀E: 419;
(**i**+1): V1.7,539) ¡

≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),**d**] ⇒
(**T**´(**i**+1)) = (((**S**´(**i**+1)) x (**T**´((**i**+1)+1)))
+ (**T**´((**i**+1)+2)))
& <[(**T**´((**i**+1)+2)),(**T**´((**i**+1)+1))]
,! 541 (()E: 540) ¡

(**T**´(**i**+1)) = (((**S**´(**i**+1)) x (**T**´((**i**+1)+1)))
+ (**T**´((**i**+1)+2)))
& <[(**T**´((**i**+1)+2)),(**T**´((**i**+1)+1))]
,! 542 (⇒E: 538,541) ¡

(≤[**i**,(**d**-1)] ⇒ ≤[**i**,**d**])
,! 543 (∀E: V3.75) ¡

≤[**i**,(**d**-1)] ⇒ ≤[**i**,**d**] ,! 544 (=E: 543) ¡

≤[i,d] ,! 545 (⇒E: 530,544) ¡

≤[i,d] & ω[1] ,! 546 (&I: IV9.2,545) ¡

(≤[i,d] & ω[1] ⇒ ≤[i,(d+1)])
,! 547 (∀E: V3.31) ¡

≤[i,d] & ω[1] ⇒ ≤[i,(d+1)]
,! 548 (()E: 547) ¡

≤[i,(d+1)] ,! 549 (⇒E: 546,548) ¡

(λV) = (d+1) ,! 550 (=E: 485,524) ¡

≤[i,(λV)] ,! 551 (=E: 549,550) ¡

≤[1,i] & ≤[i,(λV)] ,! 552 (&I: 529,551) ¡

≤[1,i] & ≤[i,(λV)] & T ≡ ((1 ▪ a)^V)
,! 553 (&I: 480,552) ¡

(≤[1,i] & ≤[i,(λV)] & T ≡ ((1 ▪ a)^V)
⇒ (T´(i+1)) = (V´i))
,! 554 (∀E: C2.25) ¡

≤[1,i] & ≤[i,(λV)] & T ≡ ((1 ▪ a)^V)
⇒ (T´(i+1)) = (V´i)
,! 555 (()E: 554) ¡

(T´(i+1)) = (V´i) ,! 556 (⇒E: 553,555) ¡

(V´i) = (((S´(i+1)) x (T´((i+1)+1)))
+ (T´((i+1)+2)))
& <[(T´((i+1)+2)),(T´((i+1)+1))]
,! 557 (=E: 542,556) ¡

(≤[i,d] & ω[1] ⇒ ≤[(i+1),(d+1)])
,! 558 (∀E: V3.28) ¡

≤[i,d] & ω[1] ⇒ ≤[(i+1),(d+1)]
,! 559 (()E: 558) ¡

≤[(i+1),(d+1)] ,! 560 (⇒E: 546,559) ¡

≤[(i+1),(λV)] ,! 561 (=E: 550,560) ¡

≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),(λ**V**)]
,! 562 (&I: 534,561)
¡

≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),(λ**V**)] & **T** ≡ ((1 ▪ **a**)^**V**)
,! 563 (&I: 480,562)
¡

(≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),(λ**V**)]
& **T** ≡ ((1 ▪ **a**)^**V**)
⇒ (**T**´((**i**+1)+1)) = (**V**´(**i**+1)))
,! 564 (∀E: C2.25;
(**i**+1): V1.7,539) ¡

≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),(λ**V**)] & **T** ≡ ((1 ▪ **a**)^**V**)
⇒ (**T**´((**i**+1)+1)) = (**V**´(**i**+1))
,! 565 (()E: 564) ¡

(**T**´((**i**+1)+1)) = (**V**´(**i**+1))
,! 566 (⇒E: 563,565)
¡

(**V**´**i**) = (((**S**´(**i**+1)) x (**V**´(**i**+1)))
+ (**T**´((**i**+1)+2)))
& <[(**T**´((**i**+1)+2)),(**V**´(**i**+1))]
,! 567 (=E: 557,566)
¡

≤[1,**i**] & ω[2] ,! 568 (&I: IV9.11,529)
¡

(≤[1,**i**] & ω[2] ⇒ ≤[1,(**i**+2)])
,! 569 (∀E: V3.31) ¡

≤[1,**i**] & ω[1] ⇒ ≤[1,(**i**+2)]
,! 570 (()E: 569) ¡

≤[1,(**i**+2)] ,! 571 (⇒E: 568,570)
¡

≤[**i**,(**d**-1)] & ω[2] ,! 572 (&I: IV9.11,530)
¡

≤[1,**d**] ,! 573 (𝕋E: V5.7,530)
¡

(≤[**i**,(**d**-1)] & ω[2] ⇒ ≤[(**i**+2),((**d**-1)+2)])
,! 574 (∀E: V3.28;
(**d**-1): V5.7,573) ¡

≤[**i**,(**d**-1)] & ω[2] ⇒ ≤[(**i**+2),((**d**-1)+2)]
,! 575 (()E: 574) ¡

≤[(**i**+2),((**d**-1)+2)] ,! 576 (⇒E: 572,575)
¡

≤[(**i**+2),(λ**V**)]   ,! 577 (=E: 485,576)
¡

≤[1,(**i**+2)] & ≤[(**i**+2),(λ**V**)]
,! 578 (&I: 571,577)
¡

≤[1,(**i**+2)] & ≤[(**i**+2),(λ**V**)] & **T** ≣ ((1 ■ **a**)^**V**)
,! 579 (&I: 480,578)
¡

ω[**i**] & ω[2]   ,! 580 (𝕋E: V1.7,577)
¡

(≤[1,(**i**+2)] & ≤[(**i**+2),(λ**V**)]
& **T** ≣ ((1 ■ **a**)^**V**)
⇒ (**T**´((**i**+2)+1)) = (**V**´(**i**+2)))
,! 581 (∀E: C2.25;
(**i**+2): V1.7,580)   ¡

≤[1,(**i**+2)] & ≤[(**i**+2),(λ**V**)] & **T** ≣ ((1 ■ **a**)^**V**)
⇒ (**T**´((**i**+2)+1)) = (**V**´(**i**+2))
,! 582 (()E: 581)   ¡

(**T**´((**i**+2)+1)) = (**V**´(**i**+2))
,! 583 (⇒E: 579,582)
¡

ω[**i**] & ω[1] & ω[2]   ,! 584 (&I: IV9.2,580)
¡

(ω[**i**] & ω[1] & ω[2]
⇒ ((**i**+1)+2) = ((**i**+2)+1))
,! 585 (∀E: V2.19) ¡

ω[**i**] & ω[1] & ω[2] ⇒ ((**i**+1)+2) = ((**i**+2)+1)
,! 586 (()E: 585)   ¡

((**i**+1)+2) = ((**i**+2)+1) ,! 587 (⇒E: 584,586)
¡

(**T**´((**i**+1)+2)) = (**V**´(**i**+2))
,! 588 (=E: 583,587)
¡

(**V**´**i**) = (((**S**´(**i**+1)) x (**V**´(**i**+1)))
+ (**V**´(**i**+2)))
& <[(**V**´(**i**+2)),(**V**´(**i**+1))]
,! 589 (=E: 567,588)
¡

≤[**i**,(λ**S**)]   ,! 590 (=E: 414,545)
¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**S**)]   ,! 591 (&I: 529,590)
¡

```
≤[1,i] & ≤[i,(λS)] & S ≣ ((1 ▪ u)^U)
                              ,! 592 (&I: 462,591)
                                                  ¡

( ≤[1,i] & ≤[i,(λS)] & S ≣ ((1 ▪ u)^U)
  ⇒ (S´(i+1)) = (U´i) )
                              ,! 593 (∀E: C2.25)  ¡

≤[1,i] & ≤[i,(λS)] & S ≣ ((1 ▪ u)^U)
⇒ (S´(i+1)) = (U´i)
                              ,! 594 (()E: 593)   ¡

(S´(i+1)) = (U´i)             ,! 595 (⇒E: 592,594)
                                                  ¡

(V´i) = ( ((U´i) x (V´(i+1))) + (V´(i+2)) )
& <[(V´(i+2)),(V´(i+1))]
                              ,! 596 (=E: 589,595)
                                                  ¡

≤[1,i] & ≤[i,(d-1)] ⇒
(V´i) = ( ((U´i) x (V´(i+1))) + (V´(i+2)) )
& <[(V´(i+2)),(V´(i+1))]
                              ,! 597 (⇒I: 528,596)
                                                  ¡

( ≤[1,i] & ≤[i,(d-1)] ⇒
 (V´i) = ( ((U´i) x (V´(i+1))) + (V´(i+2)) )
 & <[(V´(i+2)),(V´(i+1))] )
                              ,! 598 (()I: 597)   ¡

∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,(d-1)] ⇒
     (V´i) = ( ((U´i) x (V´(i+1))) + (V´(i+2)) )
     & <[(V´(i+2)),(V´(i+1))] )
                              ,! 599 (∀I: 527,598)
                                                  ¡

(λU) = (d-1)
& (λV) = ((d-1)+2)
& (V´1) = b
& (V´2) = r
& (V´((d-1)+2)) = 0
& ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,(d-1)] ⇒
       (V´i) = ( ((U´i) x (V´(i+1)))
                + (V´(i+2)) )
       & <[(V´(i+2)),(V´(i+1))] )
                              ,! 600 (&I: 526,599)
                                                  ¡

( (λU) = (d-1)
  & (λV) = ((d-1)+2)
  & (V´1) = b
  & (V´2) = r
  & (V´((d-1)+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,(d-1)] ⇒
```

```
          (V´i) = ( ((U´i) x (V´(i+1)))
                      + (V´(i+2)) )
           & <[(V´(i+2)),(V´(i+1))] )
   ⇒ Q ≣ U & R ≣ V )
                                ,! 601 (∀E: 246;
                                (d-1): V5.7,573)    ¡

(λU) = (d-1)
  & (λV) = ((d-1)+2)
  & (V´1) = b
  & (V´2) = r
  & (V´((d-1)+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,(d-1)] ⇒
          (V´i) = ( ((U´i) x (V´(i+1)))
                      + (V´(i+2)) )
           & <[(V´(i+2)),(V´(i+1))] )
   ⇒ Q ≣ U & R ≣ V
                                ,! 602 (()E: 601)   ¡

Q ≣ U & R ≣ V                   ,! 603 (⇒E: 600,602)
                                                    ¡

Q ≣ U                           ,! 604 (&E: 603)    ¡

R ≣ V                           ,! 605 (&E: 603)    ¡

( Q ≣ U ⇒ ((1 ▪ q)^Q) ≣ ((1 ▪ q)^U) )
                                ,! 606 (∀E: C2.4)   ¡

Q ≣ U ⇒ ((1 ▪ q)^Q) ≣ ((1 ▪ q)^U)
                                ,! 607 (()E: 606)   ¡

((1 ▪ q)^Q) ≣ ((1 ▪ q)^U) ,! 608 (⇒E: 604,607)
                                                    ¡

((1 ▪ q)^Q) ≣ ((1 ▪ q)^U) & S ≣ ((1 ▪ q)^U)
                                ,! 609 (&I: 472,608)
                                                    ¡

( ((1 ▪ q)^Q) ≣ ((1 ▪ q)^U) & S ≣ ((1 ▪ q)^U)
  ⇒ ((1 ▪ q)^Q) ≣ S )
                                ,! 610 (∀E: III1.17)
                                                    ¡

((1 ▪ q)^Q) ≣ ((1 ▪ q)^U) & S ≣ ((1 ▪ q)^U)
⇒ ((1 ▪ q)^Q) ≣ S
                                ,! 611 (()E: 610)   ¡

((1 ▪ q)^Q) ≣ S                 ,! 612 (⇒E: 609,611)
                                                    ¡

( R ≣ V ⇒ ((1 ▪ a)^R) ≣ ((1 ▪ a)^V) )
                                ,! 613 (∀E: C2.4)   ¡

R ≣ V ⇒ ((1 ▪ a)^R) ≣ ((1 ▪ a)^V)
                                ,! 614 (()E: 613)   ¡
```

((1 ▪ **a**)^**R**) ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**) ,! 615 (⇒E: 605,614)
¡

((1 ▪ **a**)^**R**) ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**) & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**)
,! 616 (&I: 480,615)
¡

(((1 ▪ **a**)^**R**) ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**) & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**)
⇒ ((1 ▪ **a**)^**R**) ≣ **T**)
,! 617 (∀E: III1.17)
¡

((1 ▪ **a**)^**R**) ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**) & **T** ≣ ((1 ▪ **a**)^**V**)
⇒ ((1 ▪ **a**)^**R**) ≣ **T**
,! 618 (()E: 617) ¡

((1 ▪ **a**)^**R**) ≣ **T** ,! 619 (⇒E: 616,618)
¡

((1 ▪ **q**)^**Q**) ≣ **S** & ((1 ▪ **a**)^**R**) ≣ **T**
,! 620 (&I: 612,619)
¡

(λ**S**) = **d**
& (λ**T**) = (**d**+2)
& (**T**´1) = **a**
& (**T**´2) = **b**
& (**T**´(**d**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**d**] ⇒
(**T**´i) = (((**S**´i) x (**T**´(i+1)))
+ (**T**´(i+2)))
& <[(**T**´(i+2)),(**T**´(i+1))])
⇒ ((1 ▪ **q**)^**Q**) ≣ **S** & ((1 ▪ **a**)^**R**) ≣ **T**
,! 621 (⇒I: 413,620)
¡

((λ**S**) = **d**
& (λ**T**) = (**d**+2)
& (**T**´1) = **a**
& (**T**´2) = **b**
& (**T**´(**d**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**d**] ⇒
(**T**´i) = (((**S**´i) x (**T**´(i+1)))
+ (**T**´(i+2)))
& <[(**T**´(i+2)),(**T**´(i+1))])
⇒ ((1 ▪ **q**)^**Q**) ≣ **S** & ((1 ▪ **a**)^**R**) ≣ **T**)
,! 622 (()I: 621) ¡

∀S∀T∀d ((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1)))

```
                 + (T´(i+2)) )
              & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
        ⇒ ((1 ▪ q)^Q) ≡ S & ((1 ▪ a)^R) ≡ T )
                          ,! 623 (∀I: 412,622)
                                              i

(λ((1 ▪ q)^Q)) = (c+1)
& (λ((1 ▪ a)^R)) = ((c+1)+2)
& (((1 ▪ a)^R)´1) = a
& (((1 ▪ a)^R)´2) = b
& (((1 ▪ a)^R)´((c+1)+1)) = (a Δ b)
& (((1 ▪ a)^R)´((c+1)+2)) = 0
& ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,(c+1)]
       ⇒ (((1 ▪ a)^R)´i)
          = (((((1 ▪ q)^Q)´i) x (((1 ▪ a)^R)´(i+1)))
             + (((1 ▪ a)^R)´(i+2)))
          & <[(((1 ▪ a)^R)´(i+2)),
              (((1 ▪ a)^R)´(i+1))] )
& ∀S∀T∀d ( (λS) = d
           & (λT) = (d+2)
           & (T´1) = a
           & (T´2) = b
           & (T´(d+2)) = 0
           & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                  (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                           + (T´(i+2)) )
                  & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
           ⇒ ((1 ▪ q)^Q) ≡ S & ((1 ▪ a)^R) ≡ T )
                          ,! 624 (&I: 411,623)
                                              i

( (λ((1 ▪ q)^Q)) = (c+1)
  & (λ((1 ▪ a)^R)) = ((c+1)+2)
  & (((1 ▪ a)^R)´1) = a
  & (((1 ▪ a)^R)´2) = b
  & (((1 ▪ a)^R)´((c+1)+1)) = (a Δ b)
  & (((1 ▪ a)^R)´((c+1)+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,(c+1)]
         ⇒ (((1 ▪ a)^R)´i)
            = (((((1 ▪ q)^Q)´i)
                x (((1 ▪ a)^R)´(i+1)))
               + (((1 ▪ a)^R)´(i+2)))
            & <[(((1 ▪ a)^R)´(i+2)),
                (((1 ▪ a)^R)´(i+1))] )
  & ∀S∀T∀d ( (λS) = d
             & (λT) = (d+2)
             & (T´1) = a
             & (T´2) = b
             & (T´(d+2)) = 0
             & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                    (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                             + (T´(i+2)) )
                    & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
```

⇒ ((1 ▪ **q**)^**Q**) ≣ S
& ((1 ▪ **a**)^**R**) ≣ T))
,! 625 (()I: 624) ¡

∃c ((λ((1 ▪ **q**)^**Q**)) = c
& (λ((1 ▪ **a**)^**R**)) = (c+2)
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´1) = **a**
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´2) = **b**
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´(c+1)) = (**a** Δ **b**)
& (((1 ▪ **a**)^**R**)´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (((1 ▪ **a**)^**R**)´i)
= (((((1 ▪ **q**)^**Q**)´i)
x (((1 ▪ **a**)^**R**)´(i+1)))
+ (((1 ▪ **a**)^**R**)´(i+2)))
& <[(((1 ▪ **a**)^**R**)´(i+2)),
(((1 ▪ **a**)^**R**)´(i+1))])
& ∀S∀T∀d ((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ ((1 ▪ **q**)^**Q**) ≣ S
& ((1 ▪ **a**)^**R**) ≣ T))
,! 626 (∃I: 625) ¡

∃R∃c ((λ((1 ▪ **q**)^**Q**)) = c & (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a** & (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** Δ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (R´i)
= (((((1 ▪ **q**)^**Q**)´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
& ∀S∀T∀d ((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i)
= (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ ((1 ▪ **q**)^**Q**) ≣ S & R ≣ T))
,! 627 (∃I: 626) ¡

∃Q∃R∃c ((λQ) = c & (λR) = (c+2)

```
                     & (R´1) = a & (R´2) = b
                     & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                     & (R´(c+2)) = 0
                     & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
                            ⇒ (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
                                        + (R´(i+2)))
                              & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                     & ∀S∀T∀d ( (λS) = d
                                & (λT) = (d+2)
                                & (T´1) = a
                                & (T´2) = b
                                & (T´(d+2)) = 0
                                & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                       (T´i)
                                       = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                           + (T´(i+2)) )
                                       & <[(T´(i+2)),
                                           (T´(i+1))] )
                                ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                                        ,! 628 (∃I: 627)    ¡

¬ r = 0
⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c & (λR) = (c+2)
              & (R´1) = a & (R´2) = b
              & (R´(c+1)) = (a Δ b) & (R´(c+2)) = 0
              & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                     (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
                             + (R´(i+2)))
                     & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
              & ∀S∀T∀d  ( (λS) = d
                          & (λT) = (d+2)
                          & (T´1) = a
                          & (T´2) = b
                          & (T´(d+2)) = 0
                          & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                 (T´i)
                                 = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                     + (T´(i+2)) )
                                 & <[(T´(i+2)),
                                     (T´(i+1))] )
                          ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                                        ,! 629 (⇒I: 202,628)
                                                         ¡

∃Q∃R∃c ( (λQ) = c & (λR) = (c+2)
            & (R´1) = a & (R´2) = b
            & (R´(c+1)) = (a Δ b) & (R´(c+2)) = 0
            & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                   (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
                           + (R´(i+2)))
                   & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
            & ∀S∀T∀d  ( (λS) = d
                        & (λT) = (d+2)
                        & (T´1) = a
                        & (T´2) = b
```

& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i)
= (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ Q ≣ S & R ≣ T))
,! 630 (∨E: 66,201,629)
i

a = (**n** + 1)
⇒ ∃Q∃R∃c ((λQ) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a**
& (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** Δ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ Q ≣ S & R ≣ T))
,! 631 (⇒I: 46,630)
i

∃Q∃R∃c ((λQ) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a**
& (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** Δ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))

```
                  & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
              ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                                   ,! 632 (∨E: 38,45,631)
                                                       ¡

≤[a,m] & <[0,b] & ≤[b,a]
⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
            & (λR) = (c+2)
            & (R´1) = a
            & (R´2) = b
            & (R´(c+1)) = (a Δ b)
            & (R´(c+2)) = 0
            & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                   (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                             + (R´(i+2)) )
                   & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
            & ∀S∀T∀d
              ( (λS) = d
                & (λT) = (d+2)
                & (T´1) = a
                & (T´2) = b
                & (T´(d+2)) = 0
                & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                       (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                 + (T´(i+2)) )
                       & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                                   ,! 633 (⇒I: 31,632)
                                                       ¡

( ≤[a,m] & <[0,b] & ≤[b,a]
  ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
              & (λR) = (c+2)
              & (R´1) = a
              & (R´2) = b
              & (R´(c+1)) = (a Δ b)
              & (R´(c+2)) = 0
              & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                     (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                               + (R´(i+2)) )
                     & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
              & ∀S∀T∀d
                ( (λS) = d
                  & (λT) = (d+2)
                  & (T´1) = a
                  & (T´2) = b
                  & (T´(d+2)) = 0
                  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                         (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                   + (T´(i+2)) )
                         & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                  ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
                                   ,! 634 (()I: 633)   ¡
```

```
∀a∀b ( ≤[a,m] & <[0,b] & ≤[b,a]
        ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                      & (λR) = (c+2)
                      & (R´1) = a
                      & (R´2) = b
                      & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                      & (R´(c+2)) = 0
                      & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                              (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                           + (R´(i+2)) )
                              & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                      & ∀S∀T∀d
                        ( (λS) = d
                          & (λT) = (d+2)
                          & (T´1) = a
                          & (T´2) = b
                          & (T´(d+2)) = 0
                          & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                  (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                               + (T´(i+2)) )
                                  & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                          ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
                                        ,! 635 (∀I: 30,634) ¡

ω[n] & σ[n,m] &
∀a∀b ( ≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]
        ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                      & (λR) = (c+2)
                      & (R´1) = a
                      & (R´2) = b
                      & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                      & (R´(c+2)) = 0
                      & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                              (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                           + (R´(i+2)) )
                              & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                      & ∀S∀T∀d
                        ( (λS) = d
                          & (λT) = (d+2)
                          & (T´1) = a
                          & (T´2) = b
                          & (T´(d+2)) = 0
                          & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                  (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                               + (T´(i+2)) )
                                  & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                          ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
⇒
∀a∀b ( ≤[a,m] & <[0,b] & ≤[b,a]
        ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                      & (λR) = (c+2)
                      & (R´1) = a
                      & (R´2) = b
```

```
                    & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                    & (R´(c+2)) = 0
                    & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                          (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                   + (R´(i+2)) )
                          & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                    & ∀S∀T∀d
                      ( (λS) = d
                        & (λT) = (d+2)
                        & (T´1) = a
                        & (T´2) = b
                        & (T´(d+2)) = 0
                        & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                              (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                       + (T´(i+2)) )
                              & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                        ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
                                         ,! 636 (⇒I: 24,635)
                                                             i

( ω[n] & σ[n,m] &
  ∀a∀b ( ≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]
        ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                    & (λR) = (c+2)
                    & (R´1) = a
                    & (R´2) = b
                    & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                    & (R´(c+2)) = 0
                    & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                          (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                   + (R´(i+2)) )
                          & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                    & ∀S∀T∀d
                      ( (λS) = d
                        & (λT) = (d+2)
                        & (T´1) = a
                        & (T´2) = b
                        & (T´(d+2)) = 0
                        & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                              (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                       + (T´(i+2)) )
                              & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                        ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
  ⇒
  ∀a∀b ( ≤[a,m] & <[0,b] & ≤[b,a]
        ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                    & (λR) = (c+2)
                    & (R´1) = a
                    & (R´2) = b
                    & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                    & (R´(c+2)) = 0
                    & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                          (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
```

```
                                     + (R´(i+2)) )
                              & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                         & ∀S∀T∀d
                           ( (λS) = d
                             & (λT) = (d+2)
                             & (T´1) = a
                             & (T´2) = b
                             & (T´(d+2)) = 0
                             & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                  (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                          + (T´(i+2)) )
                                  & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                             ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) ) )
                                      ,! 637 (()I: 636)   ¡


∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m] &
       ∀a∀b ( ≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]
              ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                         & (λR) = (c+2)
                         & (R´1) = a
                         & (R´2) = b
                         & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                         & (R´(c+2)) = 0
                         & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                              (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                      + (R´(i+2)) )
                              & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                         & ∀S∀T∀d
                           ( (λS) = d
                             & (λT) = (d+2)
                             & (T´1) = a
                             & (T´2) = b
                             & (T´(d+2)) = 0
                             & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                  (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                          + (T´(i+2)) )
                                  & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                             ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) )
       ⇒
       ∀a∀b ( ≤[a,m] & <[0,b] & ≤[b,a]
              ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                         & (λR) = (c+2)
                         & (R´1) = a
                         & (R´2) = b
                         & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                         & (R´(c+2)) = 0
                         & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                              (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                      + (R´(i+2)) )
                              & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                         & ∀S∀T∀d
                           ( (λS) = d
```

```
                                  & (λT) = (d+2)
                                  & (T´1) = a
                                  & (T´2) = b
                                  & (T´(d+2)) = 0
                                  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                       (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                                  + (T´(i+2)) )
                                         & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                                  ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) ) )
                                             ,! 638 (∀I: 23,637) ¡

∀n ( ω[n]
     ⇒ ∀a∀b ( ≤[a,n] & <[0,b] & ≤[b,a]
               ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                          & (λR) = (c+2)
                          & (R´1) = a
                          & (R´2) = b
                          & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                          & (R´(c+2)) = 0
                          & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                                (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                           + (R´(i+2)) )
                                & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                          & ∀S∀T∀d
                            ( (λS) = d
                              & (λT) = (d+2)
                              & (T´1) = a
                              & (T´2) = b
                              & (T´(d+2)) = 0
                              & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                    (T´i)
                                     = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                          + (T´(i+2)) )
                                     & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))]
                                    )
                              ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) ) )
                                             ! 639 (Induct: 22,638)
                                                                  ¡
```

▯

! 2. The Euclidean Algorithm: existence and uniqueness. ¡

```
⊢ ∀a∀b ( <[0,b] & ≤[b,a]
          ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                     & (λR) = (c+2)
                     & (R´1) = a
                     & (R´2) = b
                     & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                     & (R´(c+2)) = 0
                     & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
                           ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                        + (R´(i+2)) )
                             & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
```

```
                          & ∀S∀T∀d
                            ( (λS) = d
                              & (λT) = (d+2)
                              & (T´1) = a
                              & (T´2) = b
                              & (T´(d+2)) = 0
                              & ∀i (  ≤[1,i] & ≤[i,d]
                                     ⇒ (T´i)
                                        = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                            + (T´(i+2)) )
                                       & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                              ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )                 ¡

a,b                                          ,! 1 (Prem)           ¡

  <[0,b] & ≤[b,a]                            ,! 2 (Prem)           ¡

  ≤[b,a]                                     ,! 3 (&E: 2)          ¡

  ( ≤[b,a] ⇒ ω[a] )                          ,! 4 (∀E: V3.7)       ¡

  ≤[b,a] ⇒ ω[a]                              ,! 5 (()E: 4)         ¡

  ω[a]                                       ,! 6 (⇒E: 3,5)        ¡

  ( ω[a]
    ⇒ ∀a∀b ( ≤[a,a] & <[0,b] & ≤[b,a]
             ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                        & (λR) = (c+2)
                        & (R´1) = a
                        & (R´2) = b
                        & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                        & (R´(c+2)) = 0
                        & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                               (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                         + (R´(i+2)) )
                               & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                        & ∀S∀T∀d
                          ( (λS) = d
                            & (λT) = (d+2)
                            & (T´1) = a
                            & (T´2) = b
                            & (T´(d+2)) = 0
                            & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                   (T´i)
                                   = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                       + (T´(i+2)) )
                                   & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))]
                                 )
                            ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) ) )
                                             ,! 7 (∀E: P1)         ¡

  ω[a]
  ⇒ ∀a∀b ( ≤[a,a] & <[0,b] & ≤[b,a]
```

```
         ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                     & (λR) = (c+2)
                     & (R´1) = a
                     & (R´2) = b
                     & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                     & (R´(c+2)) = 0
                     & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                            (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                      + (R´(i+2)) )
                            & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                     & ∀S∀T∀d
                       ( (λS) = d
                         & (λT) = (d+2)
                         & (T´1) = a
                         & (T´2) = b
                         & (T´(d+2)) = 0
                         & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                                (T´i)
                                 = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                     + (T´(i+2)) )
                                 & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))]
                               )
                         ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) )
                                     ,! 8 (()E: 7)      ¡

∀a∀b ( ≤[a,a] & <[0,b] & ≤[b,a]
       ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                   & (λR) = (c+2)
                   & (R´1) = a
                   & (R´2) = b
                   & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                   & (R´(c+2)) = 0
                   & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                          (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                    + (R´(i+2)) )
                          & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                   & ∀S∀T∀d
                     ( (λS) = d
                       & (λT) = (d+2)
                       & (T´1) = a
                       & (T´2) = b
                       & (T´(d+2)) = 0
                       & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                              (T´i)
                              = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                  + (T´(i+2)) )
                              & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                       ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) )
                                     ,! 9 (⇒E: 6,8)     ¡

( ω[a] ⇒ ≤[a,a] )                    ,! 10 (∀E: V3.23)  ¡

ω[a] ⇒ ≤[a,a]                        ,! 11 (()E: 10)    ¡
```

```
≤[a,a]                                     ,! 12 (⇒E: 6,11)    ¡

≤[a,a] & <[0,b] & ≤[b,a]                   ,! 13 (&I: 2,12)    ¡

( ≤[a,a] & <[0,b] & ≤[b,a]
  ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
             & (λR) = (c+2)
             & (R´1) = a
             & (R´2) = b
             & (R´(c+1)) = (a Δ b)
             & (R´(c+2)) = 0
             & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                    (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                              + (R´(i+2)) )
                    & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
             & ∀S∀T∀d
               ( (λS) = d
                 & (λT) = (d+2)
                 & (T´1) = a
                 & (T´2) = b
                 & (T´(d+2)) = 0
                 & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                        (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                  + (T´(i+2)) )
                        & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                 ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) )
                                           ,! 14 (∀E: 9)       ¡

≤[a,a] & <[0,b] & ≤[b,a]
⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
             & (λR) = (c+2)
             & (R´1) = a
             & (R´2) = b
             & (R´(c+1)) = (a Δ b)
             & (R´(c+2)) = 0
             & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                    (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                              + (R´(i+2)) )
                    & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
             & ∀S∀T∀d
               ( (λS) = d
                 & (λT) = (d+2)
                 & (T´1) = a
                 & (T´2) = b
                 & (T´(d+2)) = 0
                 & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                        (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                  + (T´(i+2)) )
                        & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                 ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) )
                                           ,! 15 (()E: 14)     ¡

∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
         & (λR) = (c+2)
```

```
          & (R´1) = a
          & (R´2) = b
          & (R´(c+1)) = (a ∆ b)
          & (R´(c+2)) = 0
          & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                 (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                           + (R´(i+2)) )
                 & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
          & ∀S∀T∀d
            ( (λS) = d
              & (λT) = (d+2)
              & (T´1) = a
              & (T´2) = b
              & (T´(d+2)) = 0
              & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                     (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                               + (T´(i+2)) )
                     & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
              ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) )
                                        ,! 16 (⇒E: 13,15)  ¡

<[0,b] & ≤[b,a]
⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
          & (λR) = (c+2)
          & (R´1) = a
          & (R´2) = b
          & (R´(c+1)) = (a ∆ b)
          & (R´(c+2)) = 0
          & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                 (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                           + (R´(i+2)) )
                 & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
          & ∀S∀T∀d
            ( (λS) = d
              & (λT) = (d+2)
              & (T´1) = a
              & (T´2) = b
              & (T´(d+2)) = 0
              & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                     (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                               + (T´(i+2)) )
                     & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
              ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) )
                                        ,! 17 (⇒I: 2,16)   ¡

( <[0,b] & ≤[b,a]
  ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
          & (λR) = (c+2)
          & (R´1) = a
          & (R´2) = b
          & (R´(c+1)) = (a ∆ b)
          & (R´(c+2)) = 0
          & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                 (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
```

```
                         + (R´(i+2)) )
                   & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
      & ∀S∀T∀d
        ( (λS) = d
          & (λT) = (d+2)
          & (T´1) = a
          & (T´2) = b
          & (T´(d+2)) = 0
          & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                 (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                           + (T´(i+2)) )
                 & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
          ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
                                      ,! 18 (()I: 17)    ¡

∀a∀b ( <[0,b] & ≤[b,a]
          ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                     & (λR) = (c+2)
                     & (R´1) = a
                     & (R´2) = b
                     & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                     & (R´(c+2)) = 0
                     & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
                            ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                        + (R´(i+2)) )
                               & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                     & ∀S∀T∀d
                       ( (λS) = d
                         & (λT) = (d+2)
                         & (T´1) = a
                         & (T´2) = b
                         & (T´(d+2)) = 0
                         & ∀i (  ≤[1,i] & ≤[i,d]
                                ⇒ (T´i)
                                  = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                      + (T´(i+2)) )
                                   & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                         ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
                                         ! 19 (∀I: 1,18)   ¡
```

□

! 3. The Euclidean Algorithm: existence. ¡

```
⊢ ∀a∀b ( <[0,b] & ≤[b,a]
          ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                     & (λR) = (c+2)
                     & (R´1) = a
                     & (R´2) = b
                     & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                     & (R´(c+2)) = 0
                     & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
                            ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                        + (R´(i+2)) )
```

```
                                   & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] ) ) ) ¡

a,b                                          ,! 1 (Prem)       ¡

  <[0,b] & ≤[b,a]                            ,! 2 (Prem)       ¡

  ( <[0,b] & ≤[b,a]
    ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
            & (λR) = (c+2)
            & (R´1) = a
            & (R´2) = b
            & (R´(c+1)) = (a ∆ b)
            & (R´(c+2)) = 0
            & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                   (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                            + (R´(i+2)) )
                  & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
            & ∀S∀T∀d
              ( (λS) = d
                & (λT) = (d+2)
                & (T´1) = a
                & (T´2) = b
                & (T´(d+2)) = 0
                & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                       (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                + (T´(i+2)) )
                      & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) ) )
                                             ,! 3 (∀E: P2)     ¡

  <[0,b] & ≤[b,a]
  ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
            & (λR) = (c+2)
            & (R´1) = a
            & (R´2) = b
            & (R´(c+1)) = (a ∆ b)
            & (R´(c+2)) = 0
            & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                   (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                            + (R´(i+2)) )
                  & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
            & ∀S∀T∀d
              ( (λS) = d
                & (λT) = (d+2)
                & (T´1) = a
                & (T´2) = b
                & (T´(d+2)) = 0
                & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                       (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                + (T´(i+2)) )
                      & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
                ⇒ Q ≡ S & R ≡ T ) )
                                             ,! 4 (()I: 3)     ¡

  ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
```

& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a**
& (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** Δ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ Q ≣ S & R ≣ T))
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃R∃c ((λ**Q**) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a**
& (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** Δ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((**Q**´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **Q** ≣ S & R ≣ T))
,! 6 (∃E: 5) ¡

∃c ((λ**Q**) = c
& (λ**R**) = (c+2)
& (**R**´1) = **a**
& (**R**´2) = **b**
& (**R**´(c+1)) = (**a** Δ **b**)
& (**R**´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1))) + (**R**´(i+2)))
& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))])

& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **Q** ≣ S & **R** ≣ T))
,! 7 (∃E: 6) ¡

((λ**Q**) = **c**
& (λ**R**) = (**c**+2)
& (**R**´1) = **a**
& (**R**´2) = **b**
& (**R**´(**c**+1)) = (**a** Δ **b**)
& (**R**´(**c**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**c**] ⇒
(**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1))) + (**R**´(i+2)))
& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **Q** ≣ S & **R** ≣ T))
,! 8 (∃E: 7) ¡

(λ**Q**) = **c**
& (λ**R**) = (**c**+2)
& (**R**´1) = **a**
& (**R**´2) = **b**
& (**R**´(**c**+1)) = (**a** Δ **b**)
& (**R**´(**c**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**c**] ⇒
(**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1))) + (**R**´(i+2)))
& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **Q** ≣ S & **R** ≣ T)
,! 9 (()E: 8) ¡

(λ**Q**) = **c**
& (λ**R**) = (**c**+2)
& (**R**´1) = **a**
& (**R**´2) = **b**
& (**R**´(**c**+1)) = (**a** ∆ **b**)
& (**R**´(**c**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**c**] ⇒
(**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1))) + (**R**´(i+2)))
& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))])
,! 10 (&E: 9) ¡

((λ**Q**) = **c**
& (λ**R**) = (**c**+2)
& (**R**´1) = **a**
& (**R**´2) = **b**
& (**R**´(**c**+1)) = (**a** ∆ **b**)
& (**R**´(**c**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**c**] ⇒
(**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1))) + (**R**´(i+2)))
& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))]))
,! 11 (()I: 10) ¡

∃c ((λ**Q**) = c
& (λ**R**) = (c+2)
& (**R**´1) = **a**
& (**R**´2) = **b**
& (**R**´(c+1)) = (**a** ∆ **b**)
& (**R**´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1))) + (**R**´(i+2)))
& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))]))
,! 12 (∃I: 11) ¡

∃R∃c ((λ**Q**) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a**
& (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** ∆ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((**Q**´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))]))
,! 13 (∃I: 12) ¡

∃Q∃R∃c ((λQ) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a**
& (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** ∆ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))]))

```
                                              ,! 14 (∃I: 13)      ¡

   <[0,b] & ≤[b,a]
   ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
              & (λR) = (c+2)
              & (R´1) = a
              & (R´2) = b
              & (R´(c+1)) = (a Δ b)
              & (R´(c+2)) = 0
              & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                   (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
                   & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] ) )
                                              ,! 15 (⇒I: 2,14)    ¡

   ( <[0,b] & ≤[b,a]
     ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
              & (λR) = (c+2)
              & (R´1) = a
              & (R´2) = b
              & (R´(c+1)) = (a Δ b)
              & (R´(c+2)) = 0
              & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                   (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
                   & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] ) ) )
                                              ,! 16 (()I: 15)     ¡

 ∀a∀b ( <[0,b] & ≤[b,a]
        ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
                 & (λR) = (c+2)
                 & (R´1) = a
                 & (R´2) = b
                 & (R´(c+1)) = (a Δ b)
                 & (R´(c+2)) = 0
                 & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
                      ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                                  + (R´(i+2)) )
                        & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] ) ) )
                                               ! 17 (∀I: 1,16)    ¡

 ▯
```

! 4. The Euclidean Algorithm: uniqueness. ¡

```
 ⊢ ∀a∀b∀Q∀R∀S∀T∀c∀d
       ( <[0,b] & ≤[b,a]
         & (λQ) = c & (λR) = (c+2)
         & (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
         & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
               ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
                          & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
         & (λS) = d & (λT) = (d+2)
         & (T´1) = a & (T´2) = b & (T´(d+2)) = 0
         & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d]
               ⇒ (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1))) + (S´(i+2)) )
```

```
                                       & <[(S´(i+2)),(S´(i+1))] )
          ⇒ Q ≡ S & R ≡ T )                                              ¡

a,b,Q,R,S,T,c,d                                    ,! 1 (Prem)           ¡

  <[0,b] & ≤[b,a]
  & (λQ) = c & (λR) = (c+2)
  & (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
        ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
                    & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
  & (λS) = d & (λT) = (d+2)
  & (T´1) = a & (T´2) = b & (T´(d+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d]
        ⇒ (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1))) + (S´(i+2)) )
                    & <[(S´(i+2)),(S´(i+1))] )
                                                   ,! 2 (Prem)           ¡

  <[0,b] & ≤[b,a]                                  ,! 3 (&E: 2)          ¡

  (λQ) = c & (λR) = (c+2)
  & (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
      ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
                  & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                                                   ,! 4 (&E: 2)          ¡

  (λS) = d & (λT) = (d+2)
  & (T´1) = a & (T´2) = b & (T´(d+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d]
        ⇒ (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1))) + (S´(i+2)) )
                    & <[(S´(i+2)),(S´(i+1))] )
                                                   ,! 5 (&E: 2)          ¡

  ( <[0,b] & ≤[b,a]
    ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
            & (λR) = (c+2)
            & (R´1) = a
            & (R´2) = b
            & (R´(c+1)) = (a ∆ b)
            & (R´(c+2)) = 0
            & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                  (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                            + (R´(i+2)) )
                  & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
            & ∀S∀T∀d
              ( (λS) = d
                & (λT) = (d+2)
                & (T´1) = a
                & (T´2) = b
                & (T´(d+2)) = 0
                & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                      (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                                + (T´(i+2)) )
                      & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
```

```
          ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) ) )
                                        ,! 6 (∀E: P2)      ¡

<[0,b] & ≤[b,a]
⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
        & (λR) = (c+2)
        & (R´1) = a
        & (R´2) = b
        & (R´(c+1)) = (a ∆ b)
        & (R´(c+2)) = 0
        & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
              (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                       + (R´(i+2)) )
              & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
        & ∀S∀T∀d
          ( (λS) = d
            & (λT) = (d+2)
            & (T´1) = a
            & (T´2) = b
            & (T´(d+2)) = 0
            & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                  (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                           + (T´(i+2)) )
                  & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
            ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                                        ,! 7 (()I: 6)      ¡

∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
        & (λR) = (c+2)
        & (R´1) = a
        & (R´2) = b
        & (R´(c+1)) = (a ∆ b)
        & (R´(c+2)) = 0
        & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
              (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                       + (R´(i+2)) )
              & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
        & ∀S∀T∀d
          ( (λS) = d
            & (λT) = (d+2)
            & (T´1) = a
            & (T´2) = b
            & (T´(d+2)) = 0
            & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
                  (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1)))
                           + (T´(i+2)) )
                  & <[(T´(i+2)),(T´(i+1))] )
            ⇒ Q ≣ S & R ≣ T ) )
                                        ,! 8 (⇒E: 3,7)     ¡

∃R∃c ( (λU) = c
        & (λR) = (c+2)
        & (R´1) = a
        & (R´2) = b
```

& (R´(c+1)) = (**a** ∆ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((**U**´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1)))
+ (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **U** ≣ S & R ≣ T))
,! 9 (∃E: 8) ¡

∃c ((λ**U**) = c
& (λ**V**) = (c+2)
& (**V**´1) = **a**
& (**V**´2) = **b**
& (**V**´(c+1)) = (**a** ∆ **b**)
& (**V**´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(**V**´i) = (((**U**´i) x (**V**´(i+1))) + (**V**´(i+2)))
& <[(**V**´(i+2)),(**V**´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **U** ≣ S & **V** ≣ T))
,! 10 (∃E: 9) ¡

((λ**U**) = **e**
& (λ**V**) = (**e**+2)
& (**V**´1) = **a**
& (**V**´2) = **b**
& (**V**´(**e**+1)) = (**a** ∆ **b**)
& (**V**´(**e**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**e**] ⇒
(**V**´i) = (((**U**´i) x (**V**´(i+1))) + (**V**´(i+2)))
& <[(**V**´(i+2)),(**V**´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**

& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **U** ≣ S & **V** ≣ T))

,! 11 (∃E: 10) ¡

(λ**U**) = **e**
& (λ**V**) = (**e**+2)
& (**V**´1) = **a**
& (**V**´2) = **b**
& (**V**´(**e**+1)) = (**a** ∆ **b**)
& (**V**´(**e**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**e**] ⇒
(**V**´i) = (((**U**´i) x (**V**´(i+1))) + (**V**´(i+2)))
& <[(**V**´(i+2)),(**V**´(i+1))])
& ∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **U** ≣ S & **V** ≣ T)

,! 12 (()E: 11) ¡

∀S∀T∀d
((λS) = d
& (λT) = (d+2)
& (T´1) = **a**
& (T´2) = **b**
& (T´(d+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,d] ⇒
(T´i) = (((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ **U** ≣ S & **V** ≣ T)

,! 13 (&E: 12) ¡

((λ**Q**) = **c**
& (λ**R**) = (**c**+2)
& (**R**´1) = **a**
& (**R**´2) = **b**
& (**R**´(**c**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**c**] ⇒
(**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1))) + (**R**´(i+2)))
& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))])
⇒ **U** ≣ **Q** & **V** ≣ **R**)

,! 14 (∀E: 13) ¡

(λ**Q**) = **c**

& (λ**R**) = (**c**+2)
& (**R**´1) = **a**
& (**R**´2) = **b**
& (**R**´(**c**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**c**] ⇒
(**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1))) + (**R**´(i+2)))
& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))])
⇒ **U** ≣ **Q** & **V** ≣ **R**
,! 15 (()E: 14) ¡

U ≣ **Q** & **V** ≣ **R** ,! 16 (⇒E: 4,15) ¡

U ≣ **Q** ,! 17 (&E: 16) ¡

V ≣ **R** ,! 18 (&E: 16) ¡

((λ**S**) = **d**
& (λ**T**) = (**d**+2)
& (**T**´1) = **a**
& (**T**´2) = **b**
& (**T**´(**d**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**d**] ⇒
(**T**´i) = (((**S**´i) x (**T**´(i+1))) + (**T**´(i+2)))
& <[(**T**´(i+2)),(**T**´(i+1))])
⇒ **U** ≣ **S** & **V** ≣ **T**)
,! 19 (∀E: 13) ¡

(λ**S**) = **d**
& (λ**T**) = (**d**+2)
& (**T**´1) = **a**
& (**T**´2) = **b**
& (**T**´(**d**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**d**] ⇒
(**T**´i) = (((**S**´i) x (**T**´(i+1))) + (**T**´(i+2)))
& <[(**T**´(i+2)),(**T**´(i+1))])
⇒ **U** ≣ **S** & **V** ≣ **T**
,! 20 (()E: 19) ¡

U ≣ **S** & **V** ≣ **T** ,! 21 (⇒E: 5,20) ¡

U ≣ **S** ,! 22 (&E: 21) ¡

V ≣ **T** ,! 23 (&E: 21) ¡

U ≣ **Q** & **U** ≣ **S** ,! 24 (&I: 17,22) ¡

(**U** ≣ **Q** & **U** ≣ **S** ⇒ **Q** ≣ **S**) ,! 25 (∀E: III1.18) ¡

U ≣ **Q** & **U** ≣ **S** ⇒ **Q** ≣ **S** ,! 26 (()E: 25) ¡

Q ≣ **S** ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

V ≣ **R** & **V** ≣ **T** ,! 28 (&I: 18,23) ¡

(**V** ≣ **R** & **V** ≣ **T** ⇒ **R** ≣ **T**) ,! 29 (∀E: III1.18) ¡

```
    V ≣ R & V ≣ T ⇒ R ≣ T                        ,! 30 (()E: 29)     ¡

    R ≣ T                                         ,! 31 (⇒E: 28,30)   ¡

    Q ≣ S & R ≣ T                                 ,! 32 (&I: 27,31)   ¡

  <[0,b] & ≤[b,a]
  & (λQ) = c & (λR) = (c+2)
  & (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
        ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
                    & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
  & (λS) = d & (λT) = (d+2)
  & (T´1) = a & (T´2) = b & (T´(d+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d]
        ⇒ (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1))) + (S´(i+2)) )
                    & <[(S´(i+2)),(S´(i+1))] )
  ⇒ Q ≣ S & R ≣ T
                                                  ,! 33 (⇒I: 2,32)    ¡

  ( <[0,b] & ≤[b,a]
    & (λQ) = c & (λR) = (c+2)
    & (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
    & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
          ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
                      & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
    & (λS) = d & (λT) = (d+2)
    & (T´1) = a & (T´2) = b & (T´(d+2)) = 0
    & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d]
          ⇒ (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1))) + (S´(i+2)) )
                      & <[(S´(i+2)),(S´(i+1))] )
    ⇒ Q ≣ S & R ≣ T )
                                                  ,! 34 (()I: 33)     ¡

∀a∀b∀Q∀R∀S∀T∀c∀d
      ( <[0,b] & ≤[b,a]
        & (λQ) = c & (λR) = (c+2)
        & (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
        & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
              ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
                          & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
        & (λS) = d & (λT) = (d+2)
        & (T´1) = a & (T´2) = b & (T´(d+2)) = 0
        & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,d]
              ⇒ (T´i) = ( ((S´i) x (T´(i+1))) + (S´(i+2)) )
                          & <[(S´(i+2)),(S´(i+1))] )
        ⇒ Q ≣ S & R ≣ T )
                                                   ! 35 (∀I: 1,34)    ¡

▯

! 5.                                                                  ¡
```

⊢ ∀a∀b∀Q∀R∀c
(<[0,b] & ≤[b,a]
& (λQ) = c & (λR) = (c+2)
& (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
⇒ (R´(c+1)) = (a ∆ b)) ¡

a,**b**,**Q**,**R**,**c** ,! 1 (Prem) ¡

<[0,**b**] & ≤[**b**,**a**]
& (λ**Q**) = **c** & (λ**R**) = (**c**+2)
& (**R**´1) = **a** & (**R**´2) = **b** & (**R**´(**c**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**c**]
⇒ (**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1))) + (**R**´(i+2)))
& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))])
,! 2 (Prem) ¡

<[0,**b**] & ≤[**b**,**a**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(<[0,**b**] & ≤[**b**,**a**]
⇒ ∃Q∃R∃c ((λQ) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a**
& (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** ∆ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])))
,! 4 (∀E: P3) ¡

<[0,**b**] & ≤[**b**,**a**]
⇒ ∃Q∃R∃c ((λQ) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a**
& (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** ∆ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))]))
,! 5 (()I: 4) ¡

∃Q∃R∃c ((λQ) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a**
& (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** ∆ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1)))

+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))]))
,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

∃R∃c ((λ**U**) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = **a**
& (R´2) = **b**
& (R´(c+1)) = (**a** Δ **b**)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(R´i) = (((**U**´i) x (R´(i+1)))
+ (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))]))
,! 7 (∃E: 6) ¡

∃c ((λ**U**) = c
& (λ**V**) = (c+2)
& (**V**´1) = **a**
& (**V**´2) = **b**
& (**V**´(c+1)) = (**a** Δ **b**)
& (**V**´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
(**V**´i) = (((**U**´i) x (**V**´(i+1))) + (**V**´(i+2)))
& <[(**V**´(i+2)),(**V**´(i+1))]))
,! 8 (∃E: 7) ¡

((λ**U**) = **e**
& (λ**V**) = (**e**+2)
& (**V**´1) = **a**
& (**V**´2) = **b**
& (**V**´(**e**+1)) = (**a** Δ **b**)
& (**V**´(**e**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**e**] ⇒
(**V**´i) = (((**U**´i) x (**V**´(i+1))) + (**V**´(i+2)))
& <[(**V**´(i+2)),(**V**´(i+1))]))
,! 9 (∃E: 8) ¡

(λ**U**) = **e**
& (λ**V**) = (**e**+2)
& (**V**´1) = **a**
& (**V**´2) = **b**
& (**V**´(**e**+1)) = (**a** Δ **b**)
& (**V**´(**e**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**e**] ⇒
(**V**´i) = (((**U**´i) x (**V**´(i+1))) + (**V**´(i+2)))
& <[(**V**´(i+2)),(**V**´(i+1))])
,! 10 (()E: 9) ¡

<[0,**b**] & ≤[**b**,**a**]
& (λ**Q**) = **c** & (λ**R**) = (**c**+2)
& (**R**´1) = **a** & (**R**´2) = **b** & (**R**´(**c**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**c**]
⇒ (**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1))) + (**R**´(i+2)))

& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))])
& (λ**U**) = **e** & (λ**V**) = (**e**+2)
& (**V**´1) = **a** & (**V**´2) = **b** & (**V**´(**e**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**e**] ⇒
(**V**´i) = (((**U**´i) x (**V**´(i+1))) + (**V**´(i+2)))
& <[(**V**´(i+2)),(**V**´(i+1))])
,! 11 (&I: 2,10) ¡

(<[0,**b**] & ≤[**b**,**a**]
& (λ**Q**) = **c** & (λ**R**) = (**c**+2)
& (**R**´1) = **a** & (**R**´2) = **b** & (**R**´(**c**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**c**]
⇒ (**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1))) + (**R**´(i+2)))
& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))])
& (λ**U**) = **e** & (λ**V**) = (**e**+2)
& (**V**´1) = **a** & (**V**´2) = **b** & (**V**´(**e**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**e**] ⇒
(**V**´i) = (((**U**´i) x (**V**´(i+1))) + (**V**´(i+2)))
& <[(**V**´(i+2)),(**V**´(i+1))])
⇒ **Q** ≣ **U** & **R** ≣ **V**)
,! 12 (∀E: P4) ¡

<[0,**b**] & ≤[**b**,**a**]
& (λ**Q**) = **c** & (λ**R**) = (**c**+2)
& (**R**´1) = **a** & (**R**´2) = **b** & (**R**´(**c**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**c**]
⇒ (**R**´i) = (((**Q**´i) x (**R**´(i+1))) + (**R**´(i+2)))
& <[(**R**´(i+2)),(**R**´(i+1))])
& (λ**U**) = **e** & (λ**V**) = (**e**+2)
& (**V**´1) = **a** & (**V**´2) = **b** & (**V**´(**e**+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,**e**] ⇒
(**V**´i) = (((**U**´i) x (**V**´(i+1))) + (**V**´(i+2)))
& <[(**V**´(i+2)),(**V**´(i+1))])
⇒ **Q** ≣ **U** & **R** ≣ **V**
,! 13 (()I: 12) ¡

Q ≣ **U** & **R** ≣ **V** ,! 14 (⇒I: 11,13) ¡

Q ≣ **U** ,! 15 (&E: 2) ¡

R ≣ **V** ,! 16 (&E: 2) ¡

(**V**´(**e**+1)) = (**a** ∆ **b**) ,! 17 (&E: 10) ¡

R ≣ **V** & (**V**´(**e**+1)) = (**a** ∆ **b**) ,! 18 (&I: 16,17) ¡

(λ**V**) = (**e**+2) ,! 19 (&E: 10) ¡

ω[**e**] & ω[2] ,! 20 (𝕋E: V1.7,19) ¡

ω[**e**] ,! 21 (&E: 20) ¡

ω[**e**] & ω[1] ,! 22 (&I: IV9.2,21)
¡

ω[a] & ω[b] & (¬ a = 0 ∨ ¬ b = 0)   ,! 23 (ⅅP: VI5.28,17) ¡

(R ≣ V & (V´(e+1)) = (a ∆ b) ⇒ (R´(e+1)) = (a ∆ b))
,! 24 (∀E: III8.28;
(e+1): V1.7,22;
(a ∆ b): VI5.28,23)¡

R ≣ V & (V´(e+1)) = (a ∆ b) ⇒ (R´(e+1)) = (a ∆ b)
,! 25 (()E: 24) ¡

(R´(e+1)) = (a ∆ b)   ,! 26 (⇒E: 18,25) ¡

(λU) = e   ,! 27 (&E: 10) ¡

(λU) = e & Q ≣ U   ,! 28 (&I: 15,27) ¡

((λU) = e & Q ≣ U ⇒ (λQ) = e)   ,! 29 (∀E: C1.37) ¡

(λU) = e & Q ≣ U ⇒ (λQ) = e   ,! 30 (()E: 29) ¡

(λQ) = e   ,! 31 (⇒E: 28,30) ¡

(λQ) = c   ,! 32 (&E: 2 ¡

c = e   ,! 33 (=E: 31,32) ¡

(R´(c+1)) = (a ∆ b)   ,! 34 (=E: 26,33) ¡

<[0,b] & ≤[b,a]
& (λQ) = c & (λR) = (c+2)
& (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
⇒ (R´(c+1)) = (a ∆ b)
,! 35 (⇒I: 2,34) ¡

(<[0,b] & ≤[b,a]
& (λQ) = c & (λR) = (c+2)
& (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
⇒ (R´(c+1)) = (a ∆ b))
,! 36 (()I: 35) ¡

∀a∀b∀Q∀R∀c
(<[0,b] & ≤[b,a]
& (λQ) = c & (λR) = (c+2)
& (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))

```
              & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
       ⇒ (R´(c+1)) = (a Δ b) )
                                          ! 37 (∀I: 1,36)    ¡

▯

! 6. P6, in contrast to P5, loses the assumptions that:
  (λQ) = c & (λR) = (c+2)                                     ¡

├ ∀a∀b∀Q∀R∀c
      ( <[0,b] & ≤[b,a]
       & (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
       & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
             ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
               & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
       ⇒ (R´(c+1)) = (a Δ b) )                               ¡

  a,b,Q,R,c                              ,! 1 (Prem)          ¡

    <[0,b] & ≤[b,a]
    & (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
    & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
          ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
            & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                                         ,! 2 (Prem)          ¡

    <[0,b]                               ,! 3 (&E: 2)         ¡

    ≤[b,a]                               ,! 4 (&E: 2)         ¡

    (R´1) = a                            ,! 5 (&E: 2)         ¡

    (R´2) = b                            ,! 6 (&E: 2)         ¡

    (R´(c+2)) = 0                        ,! 7 (&E: 2)         ¡

    ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
         ⇒ (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
           & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                                         ,! 8 (&E: 2)         ¡

    <[0,b] & ≤[b,a]                      ,! 9 (&I: 3,4)       ¡

    ( f Q & ω[c] & (1 _ c) ⊆ (Q^D)
       ⇒ ∃G ( (λG) = c
             & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒ (G´i) = (Q´i) ) ) )
                                         ,! 10 (∀E: C1.39)    ¡

    f R & (R^D)[(c+2)]                   ,! 11 (𝕋E: III8.20,7)
                                                              ¡

    f R                                  ,! 12 (&E: 11)       ¡

    (R^D)[(c+2)]                         ,! 13 (&E: 11)       ¡

    ω[c] & ω[2]                          ,! 14 (𝕋E: V1.7,13)¡
```

ω[**c**] ,! 15 (&E: 14) ¡

  c = 0 ,! 16 (Prem) ¡

  (**R**´(0+2)) = 0 ,! 17 (=E: 7,16) ¡

  (**R**´2) = 0 ,! 18 (=E: V2.68,17) ¡

  b = 0 ,! 19 (=E: 6,18) ¡

  <[0,0] ,! 20 (=E: 3,19) ¡

  ¬ <[0,0] ,! 21 (∀E: V4.12) ¡

  ℑ ,! 22 (ℑI: 20,21) ¡

c = 0 ⇒ ℑ ,! 23 (⇒I: 16,22) ¡

¬ **c** = 0 ,! 24 (¬I: 23) ¡

ω[**c**] & ¬ **c** = 0 ,! 25 (&I: 15,24) ¡

(ω[**c**] & ¬ **c** = 0 ⇒ ≤[1,**c**]) ,! 26 (∀E: V3.38) ¡

ω[**c**] & ¬ **c** = 0 ⇒ ≤[1,**c**] ,! 27 (()E: 26) ¡

≤[1,**c**] ,! 28 (⇒E: 25,27) ¡

≤[1,1] & ≤[1,**c**] ,! 29 (&I: V3.49,28) ¡

(≤[1,1] & ≤[1,**c**]
  ⇒ (**R**´1) = (((**Q**´1) x (**R**´(1+1))) + (**R**´(1+2)))
    & <[(**R**´(1+2)),(**R**´(1+1))])
,! 30 (∀E: 8) ¡

≤[1,1] & ≤[1,**c**]
⇒ (**R**´1) = (((**Q**´1) x (**R**´(1+1))) + (**R**´(1+2)))
  & <[(**R**´(1+2)),(**R**´(1+1))]
,! 31 (()E: 30) ¡

(**R**´1) = (((**Q**´1) x (**R**´(1+1))) + (**R**´(1+2)))
& <[(**R**´(1+2)),(**R**´(1+1))]
,! 32 (⇒E: 29,32) ¡

(**R**´1) = (((**Q**´1) x (**R**´(1+1))) + (**R**´(1+2)))
,! 33 (&E: 32) ¡

ω[((**Q**´1) x (**R**´(1+1)))] & ω[(**R**´(1+2))] ,! 34 (𝕋E: V1.7,33) ¡

ω[((**Q**´1) x (**R**´(1+1)))] ,! 35 (&E: 34) ¡

ω[(**Q**´1)] & ω[(**R**´(1+1))] ,! 36 (𝕋E: V7.9,35) ¡

ω[(**Q**´1)] ,! 37 (&E: 36) ¡

f Q & (Q^D)[1] ,! 38 (𝕋E: III8.20,37) ¡

f Q ,! 39 (&E: 38) ¡

f Q & ω[c] ,! 40 (&I: 15,39) ¡

x ,! 41 (Prem) ¡

(1 _ c)[x] ,! 42 (Prem) ¡

((1 _ c)[x] ⇒ ≤[1,x] & ≤[x,c]) ,! 43 (∀E: VI2.3) ¡

(1 _ c)[x] ⇒ ≤[1,x] & ≤[x,c] ,! 44 (()E: 43) ¡

≤[1,x] & ≤[x,c] ,! 45 (⇒E: 42,44) ¡

(≤[1,x] & ≤[x,c]
⇒ (R´x) = (((Q´x) x (R´(x+1))) + (R´(x+2)))
& <[(R´(x+2)),(R´(x+1))])
,! 46 (∀E: 8) ¡

≤[1,x] & ≤[x,c]
⇒ (R´x) = (((Q´x) x (R´(x+1))) + (R´(x+2)))
& <[(R´(x+2)),(R´(x+1))]
,! 47 (()E: 46) ¡

(R´x) = (((Q´x) x (R´(x+1))) + (R´(x+2)))
& <[(R´(x+2)),(R´(x+1))]
,! 48 (⇒E: 45,47) ¡

(R´x) = (((Q´x) x (R´(x+1))) + (R´(x+2)))
,! 49 (&E: 48) ¡

ω[((Q´x) x (R´(x+1)))] & ω[(R´(x+2))]
,! 50 (𝕋E: V1.7,49) ¡

ω[((Q´x) x (R´(x+1)))] ,! 51 (&E: 50) ¡

ω[(Q´x)] & ω[(R´(x+1))] ,! 52 (𝕋E: V7.9,51) ¡

ω[(Q´x)] ,! 53 (&E: 52) ¡

f Q & (Q^D)[x] ,! 54 (𝕋E: III8.20,53) ¡

(Q^D)[x] ,! 55 (&E: 54) ¡

(1 _ c)[x] ⇒ (Q^D)[x] ,! 56 (⇒I: 42,55) ¡

((1 _ c)[x] ⇒ (Q^D)[x]) ,! 57 (()I: 56) ¡

∀x ((1 _ c)[x] ⇒ (Q^D)[x]) ,! 58 (∀I: 41,57) ¡

(1 _ c) ⊆ (Q^D) ,! 59 (𝕊I: II1.1,58)

¡

f Q & ω[c] & (1 _ c) ⊆ (Q^D) ,! 60 (&I: 40,59) ¡

f Q & ω[c] & (1 _ c) ⊆ (Q^D)
⇒ ∃G ((λG) = c & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒ (G´i) = (Q´i)))
,! 61 (()E: 10) ¡

∃G ((λG) = c & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒ (G´i) = (Q´i)))
,! 62 (⇒E: 60,61) ¡

((λS) = c & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒ (S´i) = (Q´i)))
,! 63 (∃E: 62) ¡

(λS) = c & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒ (S´i) = (Q´i))
,! 64 (()E: 63) ¡

(λS) = c ,! 65 (&E: 64) ¡

∀i (≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒ (S´i) = (Q´i))
,! 66 (&E: 64) ¡

<[0,b] & ≤[b,a]
& (λS) = c
,! 67 (&I: 9,65) ¡

(f R & ω[(c+2)] & (1 _ (c+2)) ⊆ (R^D)
⇒ ∃G ((λG) = (c+2)
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(c+2)] ⇒ (G´i) = (R´i))))
,! 68 (∀E: C1.39;
(c+2): V1.7,14) ¡

(ω[c] & ω[2] ⇒ ω[(c+2)]) ,! 69 (∀E: V1.8) ¡

ω[c] & ω[2] ⇒ ω[(c+2)] ,! 70 (()E: 69) ¡

ω[(c+2)] ,! 71 (⇒E: 14,70) ¡

f R & ω[(c+2)] ,! 72 (&I: 12,71) ¡

x ,! 73 (Prem) ¡

(1 _ (c+2))[x] ,! 74 (Prem) ¡

((1 _ (c+2))[x] ⇒ ≤[1,x] & ≤[x,(c+2)])
,! 75 (∀E: VI2.3;
(c+2): V1.7,14) ¡

(1 _ (c+2))[x] ⇒ ≤[1,x] & ≤[x,(c+2)]
,! 76 (()E: 75) ¡

≤[1,x] & ≤[x,(c+2)] ,! 77 (⇒E: 74,76) ¡

≤[1,x] ,! 78 (&E: 77) ¡

≤[x,(c+2)] ,! 79 (&E: 77) ¡

(≤[1,x] ⇒ ω[x]) ,! 80 (∀E: V3.7) ¡

≤[1,x] ⇒ ω[x] ,! 81 (()E: 80) ¡

ω[x] ,! 82 (⇒E: 78,81) ¡

ω[x] & ω[c] ,! 83 (&I: 15,82) ¡

(ω[x] & ω[c] ⇒ ≤[x,c] ∨ ≤[(c+1),x])
,! 84 (∀E: V3.65) ¡

ω[x] & ω[c] ⇒ ≤[x,c] ∨ ≤[(c+1),x]
,! 85 (()E: 84) ¡

≤[x,c] ∨ ≤[(c+1),x] ,! 86 (⇒E: 83,85) ¡

  ≤[x,c] ,! 87 (Prem) ¡

  ≤[1,x] & ≤[x,c] ,! 88 (&I: 78,87) ¡

  (≤[1,x] & ≤[x,c]
    ⇒ (R´x) = (((Q´x) x (R´(x+1))) + (R´(x+2)))
      & <[(R´(x+2)),(R´(x+1))])
,! 89 (∀E: 8) ¡

  ≤[1,x] & ≤[x,c]
  ⇒ (R´x) = (((Q´x) x (R´(x+1))) + (R´(x+2)))
    & <[(R´(x+2)),(R´(x+1))]
,! 90 (()E: 89) ¡

  (R´x) = (((Q´x) x (R´(x+1))) + (R´(x+2)))
  & <[(R´(x+2)),(R´(x+1))]
,! 91 (⇒E: 88,90) ¡

  (R´x) = (((Q´x) x (R´(x+1))) + (R´(x+2)))
,! 92 (&E: 91) ¡

  f R & (R^{D})[x] ,! 93 (𝕋E: III8.20,92)
¡

  (R^{D})[x] ,! 94 (&E: 93) ¡

≤[x,c] ⇒ (R^{D})[x] ,! 95 (⇒I: 87,94) ¡

  ≤[(c+1),x] ,! 96 (Prem) ¡

  ≤[(c+1),x] & ≤[x,(c+2)] ,! 97 (&I: 79,96) ¡

  (≤[(c+1),x] & ≤[x,(c+2)] ⇒ x = (c+1) ∨ x = (c+2))
,! 98 (∀E: V3.57) ¡

  ≤[(c+1),x] & ≤[x,(c+2)] ⇒ x = (c+1) ∨ x = (c+2)
,! 99 (()E: 98) ¡

x = (c+1) ∨ x = (c+2) ,! 100 (⇒E: 97,99) ¡

(ω[c] ⇒ ≤[c,c]) ,! 101 (∀E V3.23) ¡

ω[c] ⇒ ≤[c,c] ,! 102 (()E: 101) ¡

≤[c,c] ,! 103 (⇒E: 15,102) ¡

≤[1,c] & ≤[c,c] ,! 104 (&I: 28,103) ¡

(≤[1,c] & ≤[c,c]
  ⇒ (R´c) = (((Q´c) x (R´(c+1))) + (R´(c+2)))
    & <[(R´(c+2)),(R´(c+1))])
,! 105 (∀E: 8) ¡

≤[1,c] & ≤[c,c]
⇒ (R´c) = (((Q´c) x (R´(c+1))) + (R´(c+2)))
  & <[(R´(c+2)),(R´(c+1))]
,! 106 (()E: 105) ¡

(R´c) = (((Q´c) x (R´(c+1))) + (R´(c+2)))
 & <[(R´(c+2)),(R´(c+1))]
,! 107 (⇒E: 104,106) ¡

<[(R´(c+2)),(R´(c+1))] ,! 108 (&E: 107) ¡

f R & (R^D)[(c+1)] ,! 109 (𝕋E: III8.20, 108) ¡

(R^D)[(c+1)] ,! 110 (&E: 109) ¡

f R & (R^D)[(c+2)] ,! 111 (𝕋E: III8.20, 110) ¡

(R^D)[(c+2)] ,! 112 (&E: 111) ¡

  x = (c+1) ,! 113 (Prem) ¡

  (R^D)[x] ,! 114 (=E: 110,113) ¡

x = (c+1) ⇒ (R^D)[x] ,! 115 (⇒I: 113,114) ¡

  x = (c+2) ,! 116 (Prem) ¡

  (R^D)[x] ,! 117 (=E: 112,116) ¡

x = (c+2) ⇒ (R^D)[x] ,! 118 (⇒I: 116,117) ¡

(R^D)[x] ,! 119 (∨E: 100,115, 118) ¡

≤[(**c**+1),**x**] ⇒ (**R**D)[**x**] ,! 120 (⇒I: 96,119) ¡

(**R**D)[**x**] ,! 121 (∨E: 86,95,120) ¡

(1 _ (**c**+2))[**x**] ⇒ (**R**D)[**x**] ,! 122 (⇒I: 74,121) ¡

((1 _ (**c**+2))[**x**] ⇒ (**R**D)[**x**]) ,! 123 (()I: 122) ¡

∀x ((1 _ (**c**+2))[x] ⇒ (**R**D)[x]) ,! 124 (∀I: 73,123) ¡

(1 _ (**c**+2)) ⊆ (**R**D) ,! 125 (𝕊I: II1.1,124) ¡

f **R** & ω[(**c**+2)] & (1 _ (**c**+2)) ⊆ (**R**D) ,! 126 (&I: 72,125) ¡

f **R** & ω[(**c**+2)] & (1 _ (**c**+2)) ⊆ (**R**D)
⇒ ∃G ((λG) = (**c**+2)
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(**c**+2)] ⇒ (G´i) = (**R**´i)))
,! 127 (()E: 68) ¡

∃G ((λG) = (**c**+2)
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(**c**+2)] ⇒ (G´i) = (**R**´i)))
,! 128 (⇒E: 126,127) ¡

((λ**T**) = (**c**+2)
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(**c**+2)] ⇒ (**T**´i) = (**R**´i)))
,! 129 (∃E: 128) ¡

(λ**T**) = (**c**+2) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(**c**+2)] ⇒ (**T**´i) = (**R**´i))
,! 130 (()E: 129) ¡

(λ**T**) = (**c**+2) ,! 131 (&E: 130) ¡

∀i (≤[1,i] & ≤[i,(**c**+2)] ⇒ (**T**´i) = (**R**´i))
,! 132 (&E: 130) ¡

<[0,**b**] & ≤[**b**,**a**]
& (λ**S**) = **c** & (λ**T**) = (**c**+2)
,! 133 (&I: 67,131) ¡

≤[1,2] & ω[**c**] ,! 134 (&I: V3.50,15) ¡

(≤[1,2] & ω[**c**] ⇒ ≤[1,(**c**+2)]) ,! 135 (∀E: V3.32) ¡

≤[1,2] & ω[**c**] ⇒ ≤[1,(**c**+2)] ,! 136 (()E: 135) ¡

≤[1,(**c**+2)] ,! 137 (⇒E: 134,136) ¡

≤[1,1] & ≤[1,(**c**+2)] ,! 138 (&I: V3.49,137) ¡

(≤[1,1] & ≤[1,(**c**+2)] ⇒ (**T**´1) = (**R**´1))
,! 139 (∀E: 132) ¡

≤[1,1] & ≤[1,(**c**+2)] ⇒ (**T**´1) = (**R**´1) ,! 140 (()E: 139) ¡

(**T**´1) = (**R**´1) ,! 141 (⇒E: 138,140) ¡

(**T**´1) = **a** ,! 142 (=E: 5,141) ¡

<[0,**b**] & ≤[**b**,**a**]
& (λ**S**) = **c** & (λ**T**) = (**c**+2)
& (**T**´1) = **a**
,! 143 (&I: 133,142) ¡

≤[2,2] & ω[**c**] ,! 144 (&I: V3.51,15) ¡

(≤[2,2] & ω[**c**] ⇒ ≤[2,(**c**+2)]) ,! 145 (∀E: V3.32) ¡

≤[2,2] & ω[**c**] ⇒ ≤[2,(**c**+2)] ,! 146 (()E: 145) ¡

≤[2,(**c**+2)] ,! 147 (⇒E: 144,146) ¡

≤[1,2] & ≤[2,(**c**+2)] ,! 148 (&I: V3.50,147) ¡

(≤[1,2] & ≤[2,(**c**+2)] ⇒ (**T**´2) = (**R**´2))
,! 149 (∀E: 132) ¡

≤[1,2] & ≤[2,(**c**+2)] ⇒ (**T**´2) = (**R**´2) ,! 150 (()E: 149) ¡

(**T**´2) = (**R**´2) ,! 151 (⇒E: 148,150) ¡

(**T**´2) = **b** ,! 152 (=E: 6,151) ¡

<[0,**b**] & ≤[**b**,**a**]
& (λ**S**) = **c** & (λ**T**) = (**c**+2)
& (**T**´1) = **a** & (**T**´2) = **b**
,! 153 (&I: 143,152) ¡

(ω[(**c**+2)] ⇒ ≤[(**c**+2),(**c**+2)]) ,! 154 (∀E: V3.23;
(**c**+2): V1.7,14) ¡

ω[(**c**+2)] ⇒ ≤[(**c**+2),(**c**+2)] ,! 155 (()E: 154) ¡

≤[(**c**+2),(**c**+2)] ,! 156 (⇒E: 71,155) ¡

≤[1,(**c**+2)] & ≤[(**c**+2),(**c**+2)] ,! 157 (&I: 137,156) ¡

(≤[1,(**c**+2)] & ≤[(**c**+2),(**c**+2)] ⇒ (**T**´(**c**+2)) = (**R**´(**c**+2)))
,! 158 (∀E: 132;
(**c**+2): V1.7,14) ¡

≤[1,(**c**+2)] & ≤[(**c**+2),(**c**+2)] ⇒ (**T**´(**c**+2)) = (**R**´(**c**+2))
,! 159 (()E: 158) ¡

(**T**´(**c**+2)) = (**R**´(**c**+2)) ,! 160 (⇒E: 157,159)
¡

(**T**´(**c**+2)) = 0 ,! 161 (=E: 7,160) ¡

<[0,**b**] & ≤[**b**,**a**]
& (λ**S**) = **c** & (λ**T**) = (**c**+2)
& (**T**´1) = **a** & (**T**´2) = **b** & (**T**´(**c**+2)) = 0
,! 162 (&I: 153,161)
¡

i ,! 163 (Prem) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,**c**] ,! 164 (Prem) ¡

≤[1,**i**] ,! 165 (&E: 164) ¡

≤[**i**,**c**] ,! 166 (&E: 164) ¡

(≤[1,**i**] & ≤[**i**,**c**]
⇒ (**R**´**i**) = (((**Q**´**i**) x (**R**´(**i**+1))) + (**R**´(**i**+2)))
& <[(**R**´(**i**+2)),(**R**´(**i**+1))])
,! 167 (∀E: 8) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,**c**]
⇒ (**R**´**i**) = (((**Q**´**i**) x (**R**´(**i**+1))) + (**R**´(**i**+2)))
& <[(**R**´(**i**+2)),(**R**´(**i**+1))]
,! 168 (()E: 167) ¡

(**R**´**i**) = (((**Q**´**i**) x (**R**´(**i**+1))) + (**R**´(**i**+2)))
& <[(**R**´(**i**+2)),(**R**´(**i**+1))]
,! 169 (⇒E: 164,168)
¡

(≤[1,**i**] & ≤[**i**,**c**] ⇒ (**S**´**i**) = (**Q**´**i**))
,! 170 (∀E: 66) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,**c**] ⇒ (**S**´**i**) = (**Q**´**i**) ,! 171 (()E: 170) ¡

(**S**´**i**) = (**Q**´**i**) ,! 172 (⇒E: 164,171)
¡

(**R**´**i**) = (((**S**´**i**) x (**R**´(**i**+1))) + (**R**´(**i**+2)))
& <[(**R**´(**i**+2)),(**R**´(**i**+1))]
,! 173 (=E: 169,172)
¡

≤[**i**,**c**] & ω[2] ,! 174 (&I: IV9.11,166)
¡

(≤[**i**,**c**] & ω[2] ⇒ ≤[**i**,(**c**+2)]) ,! 175 (∀E: V3.31) ¡

≤[**i**,**c**] & ω[2] ⇒ ≤[**i**,(**c**+2)] ,! 176 (()E: 175) ¡

≤[**i**,(**c**+2)] ,! 177 (⇒E: 174,176) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(**c**+2)] ,! 178 (&I: 165,177) ¡

(≤[1,**i**] & ≤[**i**,(**c**+2)] ⇒ (**T**´**i**) = (**R**´**i**))
,! 179 (∀E: 132) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(**c**+2)] ⇒ (**T**´**i**) = (**R**´**i**)
,! 180 (()E: 179) ¡

(**T**´**i**) = (**R**´**i**) ,! 181 (⇒E: 178,180) ¡

(**T**´**i**) = (((**S**´**i**) x (**R**´(**i**+1))) + (**R**´(**i**+2)))
& <[(**R**´(**i**+2)),(**R**´(**i**+1))]
,! 182 (=E: 173,181) ¡

≤[1,**i**] & ω[1] ,! 183 (&I: IV9.2,165) ¡

(≤[1,**i**] & ω[1] ⇒ ≤[1,(**i**+1)]) ,! 184 (∀E: V3.31) ¡

≤[1,**i**] & ω[1] ⇒ ≤[1,(**i**+1)] ,! 185 (()E: 184) ¡

≤[1,(**i**+1)] ,! 186 (⇒E: 183,185) ¡

≤[**i**,**c**] & ≤[1,2] ,! 187 (&I: V3.50,166) ¡

(≤[**i**,**c**] & ≤[1,2] ⇒ ≤[(**i**+1),(**c**+2)])
,! 188 (∀E: V3.30) ¡

≤[**i**,**c**] & ≤[1,2] ⇒ ≤[(**i**+1),(**c**+2)] ,! 189 (()E: 188) ¡

≤[(**i**+1),(**c**+2)] ,! 190 (⇒E: 187,189) ¡

≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),(**c**+2)] ,! 191 (&I: 186,190) ¡

ω[**i**] & ω[1] ,! 192 (𝕋E: V1.7,186) ¡

(≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),(**c**+2)] ⇒ (**T**´(**i**+1)) = (**R**´(**i**+1)))
,! 193 (∀E: 132;
(**i**+1): V1.7,192) ¡

≤[1,(**i**+1)] & ≤[(**i**+1),(**c**+2)] ⇒ (**T**´(**i**+1)) = (**R**´(**i**+1))
,! 194 (()E: 193) ¡

(**T**´(**i**+1)) = (**R**´(**i**+1))   ,! 195 (⇒E: 191,194) ¡

(**T**´**i**) = (((**S**´**i**) x (**T**´(**i**+1))) + (**R**´(**i**+2)))
& <[(**R**´(**i**+2)),(**T**´(**i**+1))]
,! 196 (=E: 182,195) ¡

≤[1,**i**] & ω[2]   ,! 197 (&I: IV9.11,165) ¡

(≤[1,**i**] & ω[2] ⇒ ≤[1,(**i**+2)])   ,! 198 (∀E: V3.31) ¡

≤[1,**i**] & ω[2] ⇒ ≤[1,(**i**+2)]   ,! 199 (()E: 198) ¡

≤[1,(**i**+2)]   ,! 200 (⇒E: 197,199) ¡

(≤[**i**,**c**] & ω[2] ⇒ ≤[(**i**+2),(**c**+2)])
,! 201 (∀E: V3.28) ¡

≤[**i**,**c**] & ω[2] ⇒ ≤[(**i**+2),(**c**+2)]   ,! 202 (()E: 201) ¡

≤[(**i**+2),(**c**+2)]   ,! 203 (⇒E: 174,202) ¡

≤[1,(**i**+2)] & ≤[(**i**+2),(**c**+2)]   ,! 204 (&I: 200,203) ¡

ω[**i**] & ω[2]   ,! 205 (𝕋E: V1.7,200) ¡

(≤[1,(**i**+2)] & ≤[(**i**+2),(**c**+2)] ⇒ (**T**´(**i**+2)) = (**R**´(**i**+2)))
,! 206 (∀E: 132;
(**i**+2): V1.7,205) ¡

≤[1,(**i**+2)] & ≤[(**i**+2),(**c**+2)] ⇒ (**T**´(**i**+2)) = (**R**´(**i**+2))
,! 207 (()E: 206) ¡

(**T**´(**i**+2)) = (**R**´(**i**+2))   ,! 208 (⇒E: 204,207) ¡

(**T**´**i**) = (((**S**´**i**) x (**T**´(**i**+1))) + (**T**´(**i**+2)))
& <[(**T**´(**i**+2)),(**T**´(**i**+1))]
,! 209 (=E: 196,208) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,**c**]
⇒ (**T**´**i**) = (((**S**´**i**) x (**T**´(**i**+1))) + (**T**´(**i**+2)))
& <[(**T**´(**i**+2)),(**T**´(**i**+1))]
,! 210 (⇒I: 164,209) ¡

(≤[1,**i**] & ≤[**i**,**c**]
⇒ (**T**´**i**) = (((**S**´**i**) x (**T**´(**i**+1))) + (**T**´(**i**+2)))
& <[(**T**´(**i**+2)),(**T**´(**i**+1))])

,! 211 (()I: 210) ¡

∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (T´i) = (((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
,! 212 (∀I: 163,211)
¡

<[0,b] & ≤[b,a]
& (λS) = c & (λT) = (c+2)
& (T´1) = a & (T´2) = b & (T´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (T´i) = (((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
,! 213 (&I: 162,212)
¡

(<[0,b] & ≤[b,a]
& (λS) = c & (λT) = (c+2)
& (T´1) = a & (T´2) = b & (T´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (T´i) = (((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ (T´(c+1)) = (a Δ b))
,! 214 (∀E: P5) ¡

<[0,b] & ≤[b,a]
& (λS) = c & (λT) = (c+2)
& (T´1) = a & (T´2) = b & (T´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (T´i) = (((S´i) x (T´(i+1))) + (T´(i+2)))
& <[(T´(i+2)),(T´(i+1))])
⇒ (T´(c+1)) = (a Δ b)
,! 215 (()E: 214) ¡

(T´(c+1)) = (a Δ b) ,! 216 (⇒E: 213,215)
¡

(ω[c] ⇒ ≤[1,(c+1)]) ,! 217 (∀E: V3.37) ¡

ω[c] ⇒ ≤[1,(c+1)] ,! 218 (()E: 217) ¡

≤[1,(c+1)] ,! 219 (⇒E: 15,218)
¡

(≤[1,2] & ω[c] ⇒ ≤[(c+1),(c+2)]) ,! 220 (∀E: V3.29) ¡

≤[1,2] & ω[c] ⇒ ≤[(c+1),(c+2)] ,! 221 (()E: 220) ¡

≤[(c+1),(c+2)] ,! 222 (⇒E: 134,221)
¡

≤[1,(c+1)] & ≤[(c+1),(c+2)] ,! 223 (&I: 219,222)
¡

ω[c] & ω[1]   ,! 224 (𝕋E: V1.7,222)
¡

(≤[1,(c+1)] & ≤[(c+1),(c+2)] ⇒ (T´(c+1)) = (R´(c+1)))
,! 225 (∀E: 132;
(c+1): V1.7,224) ¡

≤[1,(c+2)] & ≤[(c+2),(c+2)] ⇒ (T´(c+1)) = (R´(c+1))
,! 226 (()E: 225) ¡

(T´(c+1)) = (R´(c+1))   ,! 227 (⇒E: 223,226)
¡

(R´(c+1)) = (a Δ b)   ,! 228 (=E: 216,227)
¡

<[0,b] & ≤[b,a]
& (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
⇒ (R´(c+1)) = (a Δ b)
,! 229 (⇒I: 2,228) ¡

(<[0,b] & ≤[b,a]
& (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
⇒ (R´(c+1)) = (a Δ b))
,! 230 (()I: 229) ¡

∀a∀b∀Q∀R∀c
(<[0,b] & ≤[b,a]
& (R´1) = a & (R´2) = b & (R´(c+2)) = 0
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,c]
⇒ (R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
& <[(R´(i+2)),(R´(i+1))])
⇒ (R´(c+1)) = (a Δ b))
! 231 (∀I: 1,230) ¡

▯

! **7.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (<[0,m] & ≤[m,n] & ω[k] & ¬ k = 0
⇒ (k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m))) ¡

n,m,k   ,! 1 (Prem) ¡

<[0,m] & ≤[m,n] & ω[k] & ¬ k = 0   ,! 2 (Prem) ¡

<[0,m]   ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[m,n]   ,! 4 (&E: 2) ¡

```
ω[k]                                        ,! 5 (&E: 2)       ¡

¬ k = 0                                     ,! 6 (&E: 2)       ¡

<[0,m] & ≤[m,n]                             ,! 7 (&I: 3,4)     ¡

( <[0,m] & ≤[m,n]
  ⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
         & (λR) = (c+2)
         & (R´1) = n
         & (R´2) = m
         & (R´(c+1)) = (n Δ m)
         & (R´(c+2)) = 0
         & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                         + (R´(i+2)) )
                & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] ) ) )
                                            ,! 8 (∀E: P3)      ¡

<[0,m] & ≤[m,n]
⇒ ∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
         & (λR) = (c+2)
         & (R´1) = n
         & (R´2) = m
         & (R´(c+1)) = (n Δ m)
         & (R´(c+2)) = 0
         & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1)))
                         + (R´(i+2)) )
                & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] ) )
                                            ,! 9 (()E: 8)      ¡

∃Q∃R∃c ( (λQ) = c
         & (λR) = (c+2)
         & (R´1) = n
         & (R´2) = m
         & (R´(c+1)) = (n Δ m)
         & (R´(c+2)) = 0
         & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
                (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
                & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] ) )
                                            ,! 10 (⇒E: 7,9)    ¡

∃R∃c ( (λQ) = c
       & (λR) = (c+2)
       & (R´1) = n
       & (R´2) = m
       & (R´(c+1)) = (n Δ m)
       & (R´(c+2)) = 0
       & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
              (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
              & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] ) )
                                            ,! 11 (∃E: 10)     ¡

∃c ( (λQ) = c
```

```
      & (λR) = (c+2)
      & (R´1) = n
      & (R´2) = m
      & (R´(c+1)) = (n Δ m)
      & (R´(c+2)) = 0
      & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
             (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
             & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] ) )
                                                 ,! 12 (∃E: 11)      ¡

( (λQ) = c
   & (λR) = (c+2)
   & (R´1) = n
   & (R´2) = m
   & (R´(c+1)) = (n Δ m)
   & (R´(c+2)) = 0
   & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
          (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
          & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] ) )
                                                 ,! 13 (∃E: 12)      ¡

(λQ) = c
& (λR) = (c+2)
& (R´1) = n
& (R´2) = m
& (R´(c+1)) = (n Δ m)
& (R´(c+2)) = 0
& ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
       (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
       & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )
                                                 ,! 14 (()E: 13)     ¡

(λQ) = c                                         ,! 15 (&E: 14)      ¡

(λR) = (c+2)                                     ,! 16 (&E: 14)      ¡

(R´1) = n                                        ,! 17 (&E: 14)      ¡

(R´2) = m                                        ,! 18 (&E: 14)      ¡

(R´(c+1)) = (n Δ m)                              ,! 19 (&E: 14)      ¡

(R´(c+2)) = 0                                    ,! 20 (&E: 14)      ¡

∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c] ⇒
     (R´i) = ( ((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)) )
     & <[(R´(i+2)),(R´(i+1))] )

                                                 ,! 21 (&E: 14)      ¡

<[0,m] & ω[k]                                    ,! 22 (&I: 3,5)     ¡

<[0,m] & ω[k] & ¬ k = 0                          ,! 23 (&I: 6,22)    ¡

( <[0,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ <[0,(k x m)] )
```

,! 24 (∀E: V8.57) ¡

<[0,**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ <[0,(**k** x **m**)]
,! 25 (()E: 24) ¡

<[0,(**k** x **m**)] ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

≤[**m**,**n**] & ω[**k**] ,! 27 (&I: 4,5) ¡

(≤[**m**,**n**] & ω[**k**] ⇒ ≤[(**k** x **m**),(**k** x **n**)])
,! 28 (∀E: V8.50) ¡

≤[**m**,**n**] & ω[**k**] ⇒ ≤[(**k** x **m**),(**k** x **n**)] ,! 29 (()E: 28) ¡

≤[(**k** x **m**),(**k** x **n**)] ,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

<[0,(**k** x **m**)] & ≤[(**k** x **m**),(**k** x **n**)] ,! 31 (&I: 26,30) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 32 (DP: VI5.28,19)
¡

ω[**n**] ,! 33 (&E: 32) ¡

ω[**m**] ,! 34 (&E: 32) ¡

ω[(**R**´1)] ,! 35 (=E: 17,33) ¡

ω[**k**] & ω[(**R**´1)] ,! 36 (&I: 5,35) ¡

(ω[**k**] & ω[(**R**´1)] ⇒ ((**R** ° (⊗**k**))´1) = (**k**x(**R**´1)))
,! 37 (∀E: V10.43) ¡

ω[**k**] & ω[(**R**´1)] ⇒ ((**R** ° (⊗**k**))´1) = (**k**x(**R**´1))
,! 38 (()E: 37) ¡

((**R** ° (⊗**k**))´1) = (**k**x(**R**´1)) ,! 39 (⇒E: 36,38) ¡

((**R** ° (⊗**k**))´1) = (**k**x**n**) ,! 40 (=E: 17,39) ¡

<[0,(**k** x **m**)] & ≤[(**k** x **m**),(**k** x **n**)]
& ((**R** ° (⊗**k**))´1) = (**k**x**n**)
,! 41 (&I: 31,40) ¡

ω[(**R**´2)] ,! 42 (=E: 18,34) ¡

ω[**k**] & ω[(**R**´2)] ,! 43 (&I: 5,42) ¡

(ω[**k**] & ω[(**R**´2)] ⇒ ((**R** ° (⊗**k**))´2) = (**k**x(**R**´2)))
,! 44 (∀E: V10.43) ¡

ω[**k**] & ω[(**R**´2)] ⇒ ((**R** ° (⊗**k**))´2) = (**k**x(**R**´2))
,! 45 (()E: 44) ¡

((**R** ° (⊗**k**))´2) = (**k**x(**R**´2)) ,! 46 (⇒E: 43,45) ¡

((**R** ° (⊗**k**))´2) = (**k**x**m**) ,! 47 (=E: 18,46) ¡

<[0,(**k** x **m**)] & ≤[(**k** x **m**),(**k** x **n**)]
& ((**R** ° (⊗**k**))´1) = (**k**x**n**) & ((**R** ° (⊗**k**))´2) = (**k**x**m**)
,! 48 (&I: 41,47) ¡

ω[(**R**´(**c**+2))] ,! 49 (=E: ω0,20) ¡

ω[**k**] & ω[(**R**´(**c**+2))] ,! 50 (&I: 5,49) ¡

ω[**c**] & ω[2] ,! 51 (𝕋E: V1.7,16) ¡

(ω[**k**] & ω[(**R**´(**c**+2))]
⇒ ((**R** ° (⊗**k**))´(**c**+2)) = (**k**x(**R**´(**c**+2))))
,! 52 (∀E: V10.43;
(**c**+2): V1.7,51) ¡

ω[**k**] & ω[(**R**´(**c**+2))] ⇒ ((**R** ° (⊗**k**))´(**c**+2)) = (**k**x(**R**´(**c**+2)))
,! 53 (()E: 52) ¡

((**R** ° (⊗**k**))´(**c**+2)) = (**k**x(**R**´(**c**+2))) ,! 54 (⇒E: 50,53) ¡

((**R** ° (⊗**k**))´(**c**+2)) = (**k**x0) ,! 55 (=E: 20,54) ¡

(ω[**k**] ⇒ (**k**x0) = 0) ,! 56 (∀E: V8.4) ¡

ω[**k**] ⇒ (**k**x0) = 0 ,! 57 (()E: 56) ¡

(**k**x0) = 0 ,! 58 (⇒E: 5,57) ¡

((**R** ° (⊗**k**))´(**c**+2)) = 0 ,! 59 (=E: 55,58) ¡

<[0,(**k** x **m**)] & ≤[(**k** x **m**),(**k** x **n**)]
& ((**R** ° (⊗**k**))´1) = (**k**x**n**) & ((**R** ° (⊗**k**))´2) = (**k**x**m**)
& ((**R** ° (⊗**k**))´(**c**+2)) = 0
,! 60 (&I: 48,59) ¡

i ,! 61 (Prem) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,**c**] ,! 62 (Prem) ¡

(≤[1,**i**] & ≤[**i**,**c**]
⇒ (**R**´**i**) = (((**Q**´**i**) x (**R**´(**i**+1))) + (**R**´(**i**+2)))
& <[(**R**´(**i**+2)),(**R**´(**i**+1))])
,! 63 (∀E: 21) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,**c**]
⇒ (**R**´**i**) = (((**Q**´**i**) x (**R**´(**i**+1))) + (**R**´(**i**+2)))
& <[(**R**´(**i**+2)),(**R**´(**i**+1))]
,! 64 (()E: 63) ¡

(**R**´**i**) = (((**Q**´**i**) x (**R**´(**i**+1))) + (**R**´(**i**+2)))
& <[(**R**´(**i**+2)),(**R**´(**i**+1))]
,! 65 (⇒E: 62,64) ¡

(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
,! 66 (&E: 65) ¡

<[(R´(i+2)),(R´(i+1))] ,! 67 (&E: 65) ¡

f R & (RD)[i] ,! 68 (𝕋E: III8.20,66)
¡

ω[((Q´i) x (R´(i+1)))] & ω[(R´(i+2))]
,! 69 (𝕋E: V1.7,66)¡

ω[((Q´i) x (R´(i+1)))] ,! 70 (&E: 69) ¡

ω[(R´(i+2))] ,! 71 (&E: 69) ¡

ω[(Q´i)] & ω[(R´(i+1))] ,! 72 (𝕋E: V7.9,70)¡

f R & (RD)[(i+2)] ,! 73 (𝕋E: III8.20,71)
¡

((R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
⇒ ω[(R´i)])
,! 74 (∀E: V1.11;
((Q´i) x (R´(i+1))):
C7.9,72;
(R´(i+2)): III8.20,73)
¡

(R´i) = (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2)))
⇒ ω[(R´i)]
,! 75 (()E: 74) ¡

ω[(R´i)] ,! 76 (⇒E: 66,75) ¡

ω[k] & ω[(R´i)] ,! 77 (&I: 5,76) ¡

(ω[k] & ω[(R´i)] ⇒ ((R ° (⊗k))´i) = (kx(R´i)))
,! 78 (∀E: V10.43) ¡

ω[k] & ω[(R´i)] ⇒ ((R ° (⊗k))´i) = (kx(R´i))
,! 79 (()E: 78) ¡

((R ° (⊗k))´i) = (kx(R´i)) ,! 80 (⇒E: 77,79) ¡

((R ° (⊗k))´i)
= (k x (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2))))
,! 81 (=E: 66,80) ¡

ω[k] & ω[((Q´i) x (R´(i+1)))] & ω[(R´(i+2))]
,! 82 (&I: 5,69) ¡

(ω[k] & ω[((Q´i) x (R´(i+1)))] & ω[(R´(i+2))]
⇒ (k x (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2))))
= ((k x ((Q´i) x (R´(i+1)))) + (k x (R´(i+2)))))

,! 83 (∀E: V8.20;
((Q´i) x (R´(i+1))):
C7.9,72;
(R´(i+2)): III8.20,73)
¡

ω[k] & ω[((Q´i) x (R´(i+1)))] & ω[(R´(i+2))]
⇒ (k x (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2))))
= ((k x ((Q´i) x (R´(i+1)))) + (k x (R´(i+2))))
,! 84 (()E: 83) ¡

(k x (((Q´i) x (R´(i+1))) + (R´(i+2))))
= ((k x ((Q´i) x (R´(i+1)))) + (k x (R´(i+2))))
,! 85 (⇒E: 82,84) ¡

((R ° (⊗k))´i)
= ((k x ((Q´i) x (R´(i+1)))) + (k x (R´(i+2))))
,! 86 (=E: 81,85) ¡

ω[(Q´i)] & ω[(R´(i+1))] & ω[k] ,! 87 (&I: 5,72) ¡

ω[(Q´i)] ,! 88 (&E: 72) ¡

f Q & (Q^{D})[i] ,! 89 (𝕋E: III8.20,88)
¡

ω[(R´(i+1))] ,! 90 (&E: 72) ¡

f R & (R^{D})[(i+1)] ,! 91 (𝕋E: III8.20,90)
¡

(ω[(Q´i)] & ω[(R´(i+1))] & ω[k]
⇒ (k x ((Q´i) x (R´(i+1))))
= ((Q´i) x (k x (R´(i+1)))))
,! 92 (∀E: V8.34;
(Q´i): III8.20,89;
(R´(i+1): III8.20,91)
¡

ω[(Q´i)] & ω[(R´(i+1))] & ω[k]
⇒ (k x ((Q´i) x (R´(i+1))))
= ((Q´i) x (k x (R´(i+1))))
,! 93 (()E: 92) ¡

(k x ((Q´i) x (R´(i+1))))
= ((Q´i) x (k x (R´(i+1))))
,! 94 (⇒E: 87,93) ¡

((R ° (⊗k))´i)
= (((Q´i) x (k x (R´(i+1)))) + (k x (R´(i+2))))
,! 95 (=E: 86,94) ¡

<[(R´(i+2)),(R´(i+1))] & ω[k] ,! 96 (&I: 5,67) ¡

<[(**R**´(**i**+2)),(**R**´(**i**+1))] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0
,! 97 (&I: 6,96) ¡

(<[(**R**´(**i**+2)),(**R**´(**i**+1))] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0
⇒ <[(**k** x (**R**´(**i**+2))),(**k** x (**R**´(**i**+1)))])
,! 98 (∀E: V8.52;
(**R**´(**i**+2)): III8.20,73;
(**R**´(**i**+1): III8.20,91)
¡

<[(**R**´(**i**+2)),(**R**´(**i**+1))] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0
⇒ <[(**k** x (**R**´(**i**+2))),(**k** x (**R**´(**i**+1)))]
,! 99 (()E: 98) ¡

<[(**k** x (**R**´(**i**+2))),(**k** x (**R**´(**i**+1)))]
,! 100 (⇒E: 97,99) ¡

((**R** ° (⊗**k**))´**i**)
= (((**Q**´**i**) x (**k** x (**R**´(**i**+1)))) + (**k** x (**R**´(**i**+2))))
& <[(**k** x (**R**´(**i**+2))),(**k** x (**R**´(**i**+1)))]
,! 101 (&I: 95,100) ¡

ω[**k**] & ω[(**R**´(**i**+1))] ,! 102 (&I: 5,90) ¡

(**R**D)[(**i**+1)] ,! 103 (&E: 91) ¡

ω[**i**] & ω[1] ,! 104 (𝕀E: V1.7,103)
¡

(ω[**k**] & ω[(**R**´(**i**+1))]
⇒ ((**R** ° (⊗**k**))´(**i**+1)) = (**k**x(**R**´(**i**+1))))
,! 105 (∀E: V10.43;
(**i**+1): V1.7,104) ¡

ω[**k**] & ω[(**R**´(**i**+1))]
⇒ ((**R** ° (⊗**k**))´(**i**+1)) = (**k**x(**R**´(**i**+1)))
,! 106 (()E: 105) ¡

((**R** ° (⊗**k**))´(**i**+1)) = (**k**x(**R**´(**i**+1)))
,! 107 (⇒E: 102,106)
¡

((**R** ° (⊗**k**))´**i**)
= (((**Q**´**i**) x ((**R** ° (⊗**k**))´(**i**+1)))
+ (**k** x (**R**´(**i**+2))))
& <[(**k** x (**R**´(**i**+2))),((**R** ° (⊗**k**))´(**i**+1))]
,! 108 (=E: 101,107)
¡

ω[**k**] & ω[(**R**´(**i**+2))] ,! 109 (&I: 5,71) ¡

(**R**D)[(**i**+2)] ,! 110 (&E: 73) ¡

ω[**i**] & ω[2] ,! 111 (𝕀E: V1.7,110)

```
                                                              ¡
     ( ω[k] & ω[(R´(i+2))]
       ⇒ ((R ° (⊗k))´(i+2)) = (kx(R´(i+2))) )
                                           ,! 112 (∀E: V10.43;
                                           (i+2): V1.7,111)    ¡

     ω[k] & ω[(R´(i+2))]
     ⇒ ((R ° (⊗k))´(i+2)) = (kx(R´(i+2)))
                                           ,! 113 (()E: 112)   ¡

     ((R ° (⊗k))´(i+2)) = (kx(R´(i+2)))
                                           ,! 114 (⇒E: 109,113)
                                                              ¡

     ((R ° (⊗k))´i)
     = ( ( (Q´i) x ((R ° (⊗k))´(i+1)) )
         + ((R ° (⊗k))´(i+2)) )
     & <[((R ° (⊗k))´(i+2)),((R ° (⊗k))´(i+1))]
                                           ,! 115 (=E: 108,114)
                                                              ¡

   ≤[1,i] & ≤[i,c]
   ⇒ ((R ° (⊗k))´i)
      = ( ( (Q´i) x ((R ° (⊗k))´(i+1)) )
          + ((R ° (⊗k))´(i+2)) )
      & <[((R ° (⊗k))´(i+2)),((R ° (⊗k))´(i+1))]
                                           ,! 116 (⇒I: 62,115)
                                                              ¡

   ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
     ⇒ ((R ° (⊗k))´i)
        = ( ( (Q´i) x ((R ° (⊗k))´(i+1)) )
            + ((R ° (⊗k))´(i+2)) )
        & <[((R ° (⊗k))´(i+2)),((R ° (⊗k))´(i+1))] )
                                           ,! 117 (()I: 116)   ¡

 ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
      ⇒ ((R ° (⊗k))´i)
         = ( ( (Q´i) x ((R ° (⊗k))´(i+1)) )
             + ((R ° (⊗k))´(i+2)) )
         & <[((R ° (⊗k))´(i+2)),((R ° (⊗k))´(i+1))] )
                                           ,! 118 (∀I: 61,117) ¡

 <[0,(k x m)] & ≤[(k x m),(k x n)]
 & ((R ° (⊗k))´1) = (kxn) & ((R ° (⊗k))´2) = (kxm)
 & ((R ° (⊗k))´(c+2)) = 0
 & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
        ⇒ ((R ° (⊗k))´i)
           = ( ( (Q´i) x ((R ° (⊗k))´(i+1)) )
               + ((R ° (⊗k))´(i+2)) )
```

```
          & <[((R ° (⊗k))´(i+2)),((R ° (⊗k))´(i+1))] )
                                    ,! 119 (&I: 60)     ¡

ω[k] & ω[m]                         ,! 120 (&I: 5,34)   ¡

ω[k] & ω[n]                         ,! 121 (&I: 5,33)   ¡

( <[0,(k x m)] & ≤[(k x m),(k x n)]
  & ((R ° (⊗k))´1) = (k x n) & ((R ° (⊗k))´2) = (k x m)
  & ((R ° (⊗k))´(c+2)) = 0
  & ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
         ⇒ ((R ° (⊗k))´i)
            = ( ((Q´i) x ((R ° (⊗k))´(i+1)))
                + ((R ° (⊗k))´(i+2)) )
            & <[((R ° (⊗k))´(i+2)),((R ° (⊗k))´(i+1))] )
  ⇒ ((R ° (⊗k))´(c+1)) = ((k x n) Δ (k x m)) )
                                    ,! 122 (∀E: P6;
                                    (k x m): V7.9,120;
                                    (k x n): V7.9,121)  ¡

<[0,(k x m)] & ≤[(k x m),(k x n)]
& ((R ° (⊗k))´1) = (k x n) & ((R ° (⊗k))´2) = (k x m)
& ((R ° (⊗k))´(c+2)) = 0
& ∀i ( ≤[1,i] & ≤[i,c]
       ⇒ ((R ° (⊗k))´i)
          = ( ((Q´i) x ((R ° (⊗k))´(i+1)))
              + ((R ° (⊗k))´(i+2)) )
          & <[((R ° (⊗k))´(i+2)),((R ° (⊗k))´(i+1))] )
⇒ ((R ° (⊗k))´(c+1)) = ((k x n) Δ (k x m))
                                    ,! 123 (()E: 122)   ¡

((R ° (⊗k))´(c+1)) = ((k x n) Δ (k x m))
                                    ,! 124 (⇒E: 119,123)
                                                        ¡

( ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ ω[(n Δ m)] )
                                    ,! 125 (∀E: VI5.30) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ ω[(n Δ m)]
                                    ,! 126 (()E: 125)   ¡

ω[(n Δ m)]                          ,! 127 (⇒E: 32,126)
                                                        ¡

ω[(R´(c+1))]                        ,! 128 (=E: 19,127) ¡

ω[k] & ω[(R´(c+1))]                 ,! 129 (&I: 5,128)  ¡

ω[c]                                ,! 130 (&E: 51)     ¡

ω[c] & ω[1]                         ,! 131 (&I: IV9.2,129)
```

¡

(ω[**k**] & ω[(**R**´(**c**+1))]
⇒ ((**R** ° (⊗**k**))´(**c**+1)) = (**k**x(**R**´(**c**+1))))
,! 132 (∀E: V10.43;
(**c**+1): C1.7,131) ¡

ω[**k**] & ω[(**R**´(**c**+1))]
⇒ ((**R** ° (⊗**k**))´(**c**+1)) = (**k**x(**R**´(**c**+1)))
,! 133 (()E: 132) ¡

((**R** ° (⊗**k**))´(**c**+1)) = (**k**x(**R**´(**c**+1))) ,! 134 (⇒E: 129,133)
¡

((**R** ° (⊗**k**))´(**c**+1)) = (**k**x(**n** Δ **m**)) ,! 135 (=E: 19,134) ¡

(**k**x(**n** Δ **m**)) = ((**k** x **n**) Δ (**k** x **m**)) ,! 136 (=E: 124,135)
¡

<[0,**m**] & ≤[**m**,**n**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0
⇒ (**k**x(**n** Δ **m**)) = ((**k** x **n**) Δ (**k** x **m**))
,! 137 (⇒I: 2,136) ¡

(<[0,**m**] & ≤[**m**,**n**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0
⇒ (**k**x(**n** Δ **m**)) = ((**k** x **n**) Δ (**k** x **m**)))
,! 138 (()I: 137) ¡

∀n∀m∀k (<[0,m] & ≤[m,n] & ω[k] & ¬ k = 0
⇒ (k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m)))
! 139 (∀I: 1,138) ¡

▯

! **8.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & ≤[m,n] & ω[k] & ¬ k = 0
⇒ (k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m))) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) & ≤[**m**,**n**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0
,! 2 (Prem) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[**m**,**n**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 5 (&E: 2) ¡

¬ **k** = 0 ,! 6 (&E: 2) ¡

(≤[**m**,**n**] ⇒ ω[**m**] & ω[**n**]) ,! 7 (∀E: V3.5) ¡

≤[**m**,**n**] ⇒ ω[**m**] & ω[**n**] ,! 8 (()E: 7) ¡

ω[**m**] & ω[**n**] ,! 9 (⇒E: 4,8) ¡

ω[**m**] ,! 10 (&E: 9) ¡

ω[**n**] ,! 11 (&E: 9) ¡

(**m** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 12 (∀E: I3.4) ¡

m = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ,! 13 (()E: 12) ¡

m = 0 ,! 14 (Prem) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) & **m** = 0 ,! 15 (&I: 3,14) ¡

((¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) & **m** = 0 ⇒ ¬ **n** = 0)
,! 16 (∀E: I3.8) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) & **m** = 0 ⇒ ¬ **n** = 0
,! 17 (()E: 16) ¡

¬ **n** = 0 ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ,! 19 (&I: 10,18) ¡

(ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ 0) = **n**) ,! 20 (∀E: VI5.47) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ 0) = **n** ,! 21 (()E: 20) ¡

(**n** Δ 0) = **n** ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

(**n** Δ **m**) = **n** ,! 23 (=E: 14,22) ¡

(ω[**k**] ⇒ (**k** x 0) = 0) ,! 24 (∀E: V8.4) ¡

ω[**k**] ⇒ (**k** x 0) = 0 ,! 25 (()E: 24) ¡

(**k** x 0) = 0 ,! 26 (⇒E: 5,25) ¡

(**k** x **m**) = 0 ,! 27 (=E: 14,26) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ,! 28 (&I: 5,11) ¡

(ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ ω[(**k** x **n**)]) ,! 29 (∀E: V7.10) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ ω[(**k** x **n**)] ,! 30 (()E: 29) ¡

ω[(**k** x **n**)] ,! 31 (⇒E: 28,30) ¡

¬ **k** = 0 & ¬ **n** = 0 ,! 32 (&I: 6,18) ¡

(¬ **k** = 0 & ¬ **n** = 0 ⇒ ¬ (**k** x **n**) = 0)
,! 33 (∀E: V8.40) ¡

¬ **k** = 0 & ¬ **n** = 0 ⇒ ¬ (**k** x **n**) = 0 ,! 34 (()E: 33) ¡

¬ (**k** x **n**) = 0 ,! 35 (⇒E: 32,34) ¡

ω[(**k** x **n**)] & ¬ (**k** x **n**) = 0 ,! 36 (&I: 31,35) ¡

(ω[(**k** x **n**)] & ¬ (**k** x **n**) = 0 ⇒ ((**k** x **n**) Δ 0) = (**k** x **n**))
,! 37 (∀E: VI5.47;
(**k** x **n**): V7.9,28) ¡

ω[(**k** x **n**)] & ¬ (**k** x **n**) = 0 ⇒ ((**k** x **n**) Δ 0) = (**k** x **n**)
,! 38 (()E: 37) ¡

((**k** x **n**) Δ 0) = (**k** x **n**) ,! 39 (⇒E: 36,38) ¡

((**k** x **n**) Δ (**k** x **m**)) = (**k** x **n**) ,! 40 (=E: 27,39) ¡

((**k** x **n**) Δ (**k** x **m**)) = (**k** x (**n** Δ **m**))
,! 41 (=E: 23,40) ¡

(**k** x (**n** Δ **m**)) = (**k** x (**n** Δ **m**)) ,! 42 (=E: 41,41) ¡

(**k** x (**n** Δ **m**)) = ((**k** x **n**) Δ (**k** x **m**))
,! 43 (=E: 41,42) ¡

m = 0 ⇒ (**k** x (**n** Δ **m**)) = ((**k** x **n**) Δ (**k** x **m**))
,! 44 (⇒I: 14,43) ¡

¬ **m** = 0 ,! 45 (Prem) ¡

ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ,! 46 (&I: 10,45) ¡

(ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ <[0,**m**]) ,! 47 (∀E: V4.15) ¡

ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ <[0,**m**] ,! 48 (()E: 47) ¡

<[0,**m**] ,! 49 (⇒E: 46,48) ¡

<[0,**m**] & ≤[**m**,**n**] ,! 50 (&I: 4,49) ¡

<[0,**m**] & ≤[**m**,**n**] & ω[**k**] ,! 51 (&I: 5,50) ¡

<[0,**m**] & ≤[**m**,**n**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ,! 52 (&I: 6,51) ¡

(<[0,**m**] & ≤[**m**,**n**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0
⇒ (**k** x (**n** Δ **m**)) = ((**k** x **n**) Δ (**k** x **m**)))
,! 53 (∀E: P7) ¡

<[0,**m**] & ≤[**m**,**n**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0
⇒ (**k** x (**n** Δ **m**)) = ((**k** x **n**) Δ (**k** x **m**))
,! 54 (()E: 53) ¡

(**k** x (**n** Δ **m**)) = ((**k** x **n**) Δ (**k** x **m**))
,! 55 (⇒E: 52,54) ¡

¬ m = 0 ⇒ (k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m))
,! 56 (⇒I: 45,55) ¡

(k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m)) ,! 57 (∨E: 13,44,56) ¡

(¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & ≤[m,n] & ω[k] & ¬ k = 0
⇒ (k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m))
,! 58 (⇒I: 2,57) ¡

((¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & ≤[m,n] & ω[k] & ¬ k = 0
⇒ (k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m)))
,! 59 (()I: 58) ¡

∀n∀m∀k ((¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & ≤[m,n] & ω[k] & ¬ k = 0
⇒ (k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m)))
! 60 (∀I: 1,59) ¡

▯

! **9.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & ¬ k = 0
⇒ (k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m))) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & ¬ k = 0
,! 2 (Prem) ¡

ω[n] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[m] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[k] ,! 5 (&E: 2) ¡

(¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 6 (&E: 2) ¡

¬ k = 0 ,! 7 (&E: 2) ¡

ω[k] & ¬ k = 0 ,! 8 (&I: 5,7) ¡

(¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & ω[k] & ¬ k = 0 ,! 9 (&I: 6,8) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 10 (&I: 3,4) ¡

(ω[n] & ω[m] ⇒ ≤[n,m] ∨ ≤[m,n]) ,! 11 (∀E: V3.64) ¡

ω[n] & ω[m] ⇒ ≤[n,m] ∨ ≤[m,n] ,! 12 (()E: 11) ¡

≤[n,m] ∨ ≤[m,n] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

≤[m,n] ,! 14 (Prem) ¡

(¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & ≤[m,n] & ω[k] & ¬ k = 0

,! 15 (&I: 9,14) ¡

$((\neg \mathbf{n} = 0 \vee \neg \mathbf{m} = 0) \,\&\, \leq[\mathbf{m},\mathbf{n}] \,\&\, \omega[\mathbf{k}] \,\&\, \neg \mathbf{k} = 0$
$\Rightarrow (\mathbf{k} \times (\mathbf{n} \Delta \mathbf{m})) = ((\mathbf{k} \times \mathbf{n}) \Delta (\mathbf{k} \times \mathbf{m})))$
,! 16 (∀E: P8) ¡

$(\neg \mathbf{n} = 0 \vee \neg \mathbf{m} = 0) \,\&\, \leq[\mathbf{m},\mathbf{n}] \,\&\, \omega[\mathbf{k}] \,\&\, \neg \mathbf{k} = 0$
$\Rightarrow (\mathbf{k} \times (\mathbf{n} \Delta \mathbf{m})) = ((\mathbf{k} \times \mathbf{n}) \Delta (\mathbf{k} \times \mathbf{m}))$
,! 17 (()E: 16) ¡

$(\mathbf{k} \times (\mathbf{n} \Delta \mathbf{m})) = ((\mathbf{k} \times \mathbf{n}) \Delta (\mathbf{k} \times \mathbf{m}))$
,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

$\leq[\mathbf{m},\mathbf{n}] \Rightarrow (\mathbf{k} \times (\mathbf{n} \Delta \mathbf{m})) = ((\mathbf{k} \times \mathbf{n}) \Delta (\mathbf{k} \times \mathbf{m}))$
,! 19 (⇒I: 14,18) ¡

$\leq[\mathbf{n},\mathbf{m}]$,! 20 (Prem) ¡

$\neg \mathbf{n} = 0 \vee \neg \mathbf{m} = 0$,! 21 (()E) ¡

$\neg \mathbf{n} = 0$,! 22 (Prem) ¡

$\neg \mathbf{m} = 0 \vee \neg \mathbf{n} = 0$,! 23 (∨I: 22) ¡

$\neg \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \neg \mathbf{m} = 0 \vee \neg \mathbf{n} = 0$,! 24 (⇒I: 22,23) ¡

$\neg \mathbf{m} = 0$,! 25 (Prem) ¡

$\neg \mathbf{m} = 0 \vee \neg \mathbf{n} = 0$,! 26 (∨I: 25) ¡

$\neg \mathbf{m} = 0 \Rightarrow \neg \mathbf{m} = 0 \vee \neg \mathbf{n} = 0$,! 27 (⇒I: 25,26) ¡

$\neg \mathbf{m} = 0 \vee \neg \mathbf{n} = 0$,! 28 (∨E: 21,24,27)
¡

$(\neg \mathbf{m} = 0 \vee \neg \mathbf{n} = 0)$,! 29 (()I: 28) ¡

$(\neg \mathbf{m} = 0 \vee \neg \mathbf{n} = 0) \,\&\, \omega[\mathbf{k}] \,\&\, \neg \mathbf{k} = 0$
,! 30 (&I: 8,29) ¡

$(\neg \mathbf{m} = 0 \vee \neg \mathbf{n} = 0) \,\&\, \leq[\mathbf{n},\mathbf{m}] \,\&\, \omega[\mathbf{k}] \,\&\, \neg \mathbf{k} = 0$
,! 31 (&I: 20,30) ¡

$((\neg \mathbf{m} = 0 \vee \neg \mathbf{n} = 0) \,\&\, \leq[\mathbf{n},\mathbf{m}] \,\&\, \omega[\mathbf{k}] \,\&\, \neg \mathbf{k} = 0$
$\Rightarrow (\mathbf{k} \times (\mathbf{m} \Delta \mathbf{n})) = ((\mathbf{k} \times \mathbf{m}) \Delta (\mathbf{k} \times \mathbf{n})))$
,! 32 (∀E: P8) ¡

$(\neg \mathbf{m} = 0 \vee \neg \mathbf{n} = 0) \,\&\, \leq[\mathbf{n},\mathbf{m}] \,\&\, \omega[\mathbf{k}] \,\&\, \neg \mathbf{k} = 0$
$\Rightarrow (\mathbf{k} \times (\mathbf{m} \Delta \mathbf{n})) = ((\mathbf{k} \times \mathbf{m}) \Delta (\mathbf{k} \times \mathbf{n}))$
,! 33 (()E: 32) ¡

$(\mathbf{k} \times (\mathbf{m} \Delta \mathbf{n})) = ((\mathbf{k} \times \mathbf{m}) \Delta (\mathbf{k} \times \mathbf{n}))$
,! 34 (⇒E: 31,33) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 35 (&I: 6,10) ¡

(ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ (m Δ n) = (n Δ m))
,! 36 (∀E: VI5.42) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (m Δ n) = (n Δ m)
,! 37 (()E: 36) ¡

(m Δ n) = (n Δ m) ,! 38 (⇒E: 35,37) ¡

(k x (n Δ m)) = ((k x m) Δ (k x n))
,! 39 (=E: 34,38) ¡

ω[(k x m)] & ω[(k x n)] & (¬ (k x m) = 0 ∨ ¬ (k x n) = 0)
,! 40 (▯DP: VI5.28,39)
¡

ω[k] & ω[m] ,! 41 (&I: 4,5) ¡

ω[k] & ω[n] ,! 42 (&I: 3,5) ¡

(ω[(k x m)] & ω[(k x n)]
& (¬ (k x m) = 0 ∨ ¬ (k x n) = 0)
⇒ ((k x n) Δ (k x m)) = ((k x m) Δ (k x n)))
,! 43 (∀E: VI5.42;
(k x m): V7.9,41;
(k x n): V7.9,42) ¡

ω[(k x m)] & ω[(k x n)] & (¬ (k x m) = 0 ∨ ¬ (k x n) = 0)
⇒ ((k x n) Δ (k x m)) = ((k x m) Δ (k x n))
,! 44 (()E: 43) ¡

((k x n) Δ (k x m)) = ((k x m) Δ (k x n))
,! 45 (⇒E: 40,44) ¡

(k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m))
,! 46 (=E: 39,45) ¡

≤[n,m] ⇒ (k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m))
,! 47 (⇒I: 20,46) ¡

(k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m)) ,! 48 (∨E: 13,19,47)
¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & ¬ k = 0
⇒ (k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m))
,! 49 (⇒I: 2,48) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & ¬ k = 0
⇒ (k x (n Δ m)) = ((k x n) Δ (k x m)))
,! 50 (()I: 49) ¡

$\forall n \forall m \forall k$ ($\omega[n]$ & $\omega[m]$ & $\omega[k]$ & $(\neg n = 0 \vee \neg m = 0)$ & $\neg k = 0$
$\Rightarrow (k \times (n \Delta m)) = ((k \times n) \Delta (k \times m))$)
! 51 ($\forall$I: 1,50) ¡

□