!**CHAPTER 1**

FINITE SEQUENCES¡

! This chapter introduces and develops the concept of a finite sequence and the length of a finite sequence.
A finite sequence is a function with a finite interval as domain (P1). Its length is (P17) that finite number **n** such that (1 _ **n**) is its domain. ¡

! **1.** θ **F** if and only if **F** is a finite sequence. ¡

𝕊 θ ; θ **F** ; ∃n (ω[n] & **F** 𝔽 (1 _ n)) ¡

! **2.** ¡

⊢ ∀F (θ F ⇒ **f** F) ¡

F	,! 1 (Prem)	¡
θ **F**	,! 2 (Prem)	¡
∃n (ω[n] & **F** 𝔽 (1 _ n))	,! 3 (𝕊E: P1,2)	¡
(ω[**n**] & **F** 𝔽 (1 _ **n**))	,! 4 (∃E: 3)	¡
ω[**n**] & **F** 𝔽 (1 _ **n**)	,! 5 (()E: 4)	¡
F 𝔽 (1 _ **n**)	,! 6 (&E: 5)	¡
(**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) & **f** **F**	,! 7 (𝕊E: III8.10)	¡
f **F**	,! 8 (&E: 7)	¡
θ **F** ⇒ **f** **F**	,! 9 (⇒I: 2,7)	¡
(θ **F** ⇒ **f** **F**)	,! 10 (()E: 9)	¡
∀F (θ F ⇒ **f** F)	! 11 (∀I: 1,10)	¡

▯

! **3.** The variable "a" is used instead of "n" since it is needed in the justification for the definition P17. ¡

⊢ ∀F (θ F ⇒ ∃a (ω[a] & (F^{D}) ≡ (1 _ a))) ¡

F	,! 1 (Prem)	¡
θ **F**	,! 2 (Prem)	¡
∃n (ω[n] & **F** 𝔽 (1 _ n))	,! 3 (𝕊E: P1,2)	¡
(ω[**n**] & **F** 𝔽 (1 _ **n**))	,! 4 (∃E: 3)	¡
ω[**n**] & **F** 𝔽 (1 _ **n**)	,! 5 (()E: 4)	¡

F 𝔽 (1 _ **n**) ,! 6 (&E: 5) ¡

(**F**D) ≡ (1 _ **n**) & **f F** ,! 7 (𝕊E: III8.10) ¡

(**F**D) ≡ (1 _ **n**) ,! 8 (&E: 7) ¡

ω[**n**] & (**F**D) ≡ (1 _ **n**) ,! 9 (&I: 5,8) ¡

(ω[**n**] & (**F**D) ≡ (1 _ **n**)) ,! 10 (()I: 9) ¡

∃a (ω[a] & (**F**D) ≡ (1 _ a)) ,! 11 (∃I: 10) ¡

θ **F** ⇒ ∃a (ω[a] & (**F**D) ≡ (1 _ a)) ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(θ **F** ⇒ ∃a (ω[a] & (**F**D) ≡ (1 _ a))) ,! 13 (()E: 12) ¡

∀F (θ F ⇒ ∃a (ω[a] & (FD) ≡ (1 _ a))) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **4.** ¡

⊦ ∀F (θ F ⇒ ∃n (FD) ≡ (1 _ n)) ¡

F ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** ,! 2 (Prem) ¡

(θ **F** ⇒ ∃a (ω[a] & (**F**D) ≡ (1 _ a)))
,! 3 (∀E: P3) ¡

θ **F** ⇒ ∃a (ω[a] & (**F**D) ≡ (1 _ a)) ,! 4 (()E: 3) ¡

∃a (ω[a] & (**F**D) ≡ (1 _ a)) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[**n**] & (**F**D) ≡ (1 _ **n**)) ,! 6 (∃E: 5) ¡

ω[**n**] & (**F**D) ≡ (1 _ **n**) ,! 7 (()E: 6) ¡

(**F**D) ≡ (1 _ **n**) ,! 8 (&E: 7) ¡

∃n (**F**D) ≡ (1 _ n) ,! 9 (∃I: 8) ¡

θ **F** ⇒ ∃n (**F**D) ≡ (1 _ n) ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(θ **F** ⇒ ∃n (**F**D) ≡ (1 _ n)) ,! 11 (()E: 10) ¡

∀F (θ F ⇒ ∃n (FD) ≡ (1 _ n)) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **5.** ¡

⊦ ∀F (θ F ⇒ (FD) ⊆ ω) ¡

F ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** ,! 2 (Prem) ¡

(θ **F** ⇒ ∃n (**F**^{D}) ≡ (1 _ n)) ,! 3 (∀E: P4) ¡

θ **F** ⇒ ∃n (**F**^{D}) ≡ (1 _ n) ,! 4 (()E: 3) ¡

∃n (**F**^{D}) ≡ (1 _ n) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ,! 6 (∃E: 5) ¡

(1 _ **n**) ⊆ ω ,! 7 (∀E: V2.23) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) & (1 _ **n**) ⊆ ω ,! 8 (&I: 6,7) ¡

((**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) & (1 _ **n**) ⊆ ω ⇒ (**F**^{D}) ⊆ ω)
,! 9 (∀E: II1.29) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) & (1 _ **n**) ⊆ ω ⇒ (**F**^{D}) ⊆ ω
,! 10 (()E: 9) ¡

(**F**^{D}) ⊆ ω ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

θ **F** ⇒ (**F**^{D}) ⊆ ω ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(θ **F** ⇒ (**F**^{D}) ⊆ ω) ,! 13 (()E: 12) ¡

∀F (θ F ⇒ (F^{D}) ⊆ ω) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **6.** ¡

⊦ ∀F (θ F ⇒ ∃n (ω[n] & ℜ[n,(F^{D})])) ¡

F ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** ,! 2 (Prem) ¡

(θ **F** ⇒ ∃a (ω[a] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ a)))
,! 3 (∀E: P3) ¡

θ **F** ⇒ ∃a (ω[a] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ a)) ,! 4 (()E: 3) ¡

∃a (ω[a] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ a)) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**)) ,! 6 (∃E: 5) ¡

ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[**n**] ,! 8 (&E: 7) ¡

(ω[**n**] ⇒ 𝔑[**n**,(1 _ **n**)]) ,! 9 (∀E: VI2.58) ¡

ω[**n**] ⇒ 𝔑[**n**,(1 _ **n**)] ,! 10 (()E: 9) ¡

𝔑[**n**,(1 _ **n**)] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,(1 _ **n**)] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **n**) ,! 12 (&I: 11) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,(1 _ **n**)] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **n**) ⇒ 𝔑[**n**,($\mathbf{F}^{D}$)])
,! 13 (∀E: IV4.6) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,(1 _ **n**)] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **n**) ⇒ 𝔑[**n**,($\mathbf{F}^{D}$)]
,! 14 (()E: 13) ¡

𝔑[**n**,($\mathbf{F}^{D}$)] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,($\mathbf{F}^{D}$)] ,! 16 (&I: 8,15) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,($\mathbf{F}^{D}$)]) ,! 17 (()I: 16) ¡

∃n (ω[n] & 𝔑[n,($\mathbf{F}^{D}$)]) ,! 18 (∃I: 17) ¡

θ **F** ⇒ ∃n (ω[n] & 𝔑[n,($\mathbf{F}^{D}$)]) ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(θ **F** ⇒ ∃n (ω[n] & 𝔑[n,($\mathbf{F}^{D}$)])) ,! 20 (()E: 19) ¡

∀F (θ F ⇒ ∃n (ω[n] & 𝔑[n,(F^{D})])) ! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **7.** ¡

⊢ ∀F (θ F ⇒ *f* (F^{D})) ¡

F ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** ,! 2 (Prem) ¡

(θ **F** ⇒ ∃n (ω[n] & 𝔑[n,($\mathbf{F}^{D}$)])) ,! 3 (∀E: P6) ¡

θ **F** ⇒ ∃n (ω[n] & 𝔑[n,($\mathbf{F}^{D}$)]) ,! 4 (()E: 3) ¡

∃n (ω[n] & 𝔑[n,($\mathbf{F}^{D}$)]) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

f ($\mathbf{F}^{D}$) ,! 6 (𝕊I: IV5.1,5) ¡

θ **F** ⇒ *f* ($\mathbf{F}^{D}$) ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(θ **F** ⇒ *f* ($\mathbf{F}^{D}$)) ,! 8 (()E: 7) ¡

∀F (θ F ⇒ *f* (F^{D})) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **8.** ¡

⊢ ∀F∀G (θ F & F ≣ G ⇒ θ G) ¡

F,**G** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & **F** ≣ **G** ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** ,! 3 (&E: 2) ¡

F ≣ **G** ,! 4 (&E: 2) ¡

∃n (ω[n] & **F** 𝔽 (1 _ n)) ,! 5 (𝕊E: P1,3) ¡

(ω[**n**] & **F** 𝔽 (1 _ **n**)) ,! 6 (∃E: 5) ¡

ω[**n**] & **F** 𝔽 (1 _ **n**) ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[**n**] ,! 8 (&E: 7) ¡

F 𝔽 (1 _ **n**) ,! 9 (&E: 7) ¡

F 𝔽 (1 _ **n**) & **F** ≣ **G** ,! 10 (&E: 4,9) ¡

(**F** 𝔽 (1 _ **n**) & **F** ≣ **G** ⇒ **G** 𝔽 (1 _ **n**))
,! 11 (∀E: III8.12) ¡

F 𝔽 (1 _ **n**) & **F** ≣ **G** ⇒ **G** 𝔽 (1 _ **n**) ,! 12 (()E: 11) ¡

G 𝔽 (1 _ **n**) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

ω[**n**] & **G** 𝔽 (1 _ **n**) ,! 14 (&I: 8,13) ¡

(ω[**n**] & **G** 𝔽 (1 _ **n**)) ,! 15 (()I: 14) ¡

∃n (ω[n] & **G** 𝔽 (1 _ n)) ,! 16 (∃I: 15) ¡

θ **G** ,! 17 (𝕊I: P1,16) ¡

θ **F** & **F** ≣ **G** ⇒ θ **G** ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(θ **F** & **F** ≣ **G** ⇒ θ **G**) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀F∀G (θ F & F ≣ G ⇒ θ G) ! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **9.** ¡

⊢ ∀F∀G (θ F & G ≣ F ⇒ θ G) ¡

F,**G** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & **G** ≣ **F** ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** ,! 3 (&E: 2) ¡

G ≣ F ,! 4 (&E: 2) ¡

(G ≣ F ⇒ F ≣ G) ,! 5 (∀E: III1.8) ¡

G ≣ F ⇒ F ≣ G ,! 6 (()E: 5) ¡

F ≣ G ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

θ F & F ≣ G ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(θ F & F ≣ G ⇒ θ G) ,! 9 (∀E: P8) ¡

θ F & F ≣ G ⇒ θ G ,! 10 (()E: 9) ¡

θ G ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

θ F & G ≣ F ⇒ θ G ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(θ F & G ≣ F ⇒ θ G) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀F∀G (θ F & G ≣ F ⇒ θ G) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **10.** ¡

⊢ ∀n∀F (F 𝔽 (1 _ n) ⇒ θ F) ¡

n,F ,! 1 (Prem) ¡

F 𝔽 (1 _ n) ,! 2 (Prem) ¡

(ω[n] ∨ ¬ ω[n]) ,! 3 (∀E: I3.4) ¡

ω[n] ∨ ¬ ω[n] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[n] ,! 5 (Prem) ¡

ω[n] & F 𝔽 (1 _ n) ,! 6 (&I: 2,5) ¡

(ω[n] & F 𝔽 (1 _ n)) ,! 7 (()I: 6) ¡

∃n (ω[n] & F 𝔽 (1 _ n)) ,! 8 (∃I: 7) ¡

ω[n] ⇒ ∃n (ω[n] & F 𝔽 (1 _ n)) ,! 9 (⇒I: 5,8) ¡

¬ ω[n] ,! 10 (Prem) ¡

(¬ ω[n] ⇒ (1 _ n) ≡ ϕ) ,! 11 (∀E: VI2.21) ¡

¬ ω[n] ⇒ (1 _ n) ≡ ϕ ,! 12 (()E: 11) ¡

(1 _ n) ≡ ϕ ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(1 _ **n**) ≡ φ & (1 _ 0) ≡ φ ,! 14 (&I: VI2.18,13) ¡

((1 _ **n**) ≡ φ & (1 _ 0) ≡ φ ⇒ (1 _ **n**) ≡ (1 _ 0))
,! 15 (∀E: II1.17) ¡

(1 _ **n**) ≡ φ & (1 _ 0) ≡ φ ⇒ (1 _ **n**) ≡ (1 _ 0)
,! 16 (()E: 15) ¡

(1 _ **n**) ≡ (1 _ 0) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

F 𝔽 (1 _ **n**) & (1 _ **n**) ≡ (1 _ 0) ,! 18 (&I: 2,17) ¡

(**F** 𝔽 (1 _ **n**) & (1 _ **n**) ≡ (1 _ 0) ⇒ **F** 𝔽 (1 _ 0))
,! 19 (∀E: III8.13) ¡

F 𝔽 (1 _ **n**) & (1 _ **n**) ≡ (1 _ 0) ⇒ **F** 𝔽 (1 _ 0)
,! 20 (()E: 19) ¡

F 𝔽 (1 _ 0) ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

ω[0] & **F** 𝔽 (1 _ 0) ,! 22 (&I: ω0,21) ¡

(ω[0] & **F** 𝔽 (1 _ 0)) ,! 23 (()I: 22) ¡

∃n (ω[n] & **F** 𝔽 (1 _ n)) ,! 24 (∃I: 23) ¡

¬ ω[**n**] ⇒ ∃n (ω[n] & **F** 𝔽 (1 _ n)) ,! 25 (⇒I: 10,24) ¡

∃n (ω[n] & **F** 𝔽 (1 _ n)) ,! 26 (∨E: 4,9,25) ¡

θ **F** ,! 27 (𝕊I: P1,26) ¡

F 𝔽 (1 _ **n**) ⇒ θ **F** ,! 28 (⇒I: 2,27) ¡

∀n∀F (F 𝔽 (1 _ n) ⇒ θ F) ! 29 (∀I: 1,28) ¡

□

! **11.** ¡

⊢ ∀n∀F ((F^D) ≡ (1 _ n) & **f** F ⇒ θ F) ¡

n,**F** ,! 1 (Prem) ¡

(**F**^D) ≡ (1 _ **n**) & **f** **F** ,! 2 (Prem) ¡

F 𝔽 (1 _ **n**) ,! 3 (𝕊I: III8.10) ¡

(**F** 𝔽 (1 _ **n**) ⇒ θ **F**) ,! 4 (∀E: P10) ¡

F 𝔽 (1 _ **n**) ⇒ θ **F** ,! 5 (()E: 4) ¡

θ **F** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(**F**D) ≡ (1 _ **n**) & **f F** ⇒ θ **F** ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

((**F**D) ≡ (1 _ **n**) & **f F** ⇒ θ **F**) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀F∀n ((FD) ≡ (1 _ n) & **f** F ⇒ θ F) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **12.** ¡

⊦ ∀F∀G∀i (θ F & F ≣ G & (FD)[i] ⇒ (F´i) = (G´i)) ¡

F,**G**,**i** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & **F** ≣ **G** & (**F**D)[**i**] ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** ,! 3 (&E: 2) ¡

F ≣ **G** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**F**D)[**i**] ,! 5 (&E: 2) ¡

(θ **F** ⇒ **f F**) ,! 6 (∀E: P2) ¡

θ **F** ⇒ **f F** ,! 7 (()E: 6) ¡

f F ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

f F & (**F**D)[**i**] ,! 9 (&I: 5,8) ¡

f F & (**F**D)[**i**] & **F** ≣ **G** ,! 10 (&I: 4,9) ¡

(**f F** & (**F**D)[**i**] & **F** ≣ **G** ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**))
,! 11 (∀E: III8.25) ¡

f F & (**F**D)[**i**] & **F** ≣ **G** ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**)
,! 12 (()E: 11) ¡

(**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

θ **F** & **F** ≣ **G** & (**F**D)[**i**] ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(θ **F** & **F** ≣ **G** & (**F**D)[**i**] ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**))
,! 15 (()I: 14) ¡

∀F∀G∀i (θ F & F ≣ G & (FD)[i] ⇒ (F´i) = (G´i))
! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **13.** The empty relationship is a finite sequence. ¡

⊦ θ Φ ¡

Φ 𝔽 ϕ & (1 _ 0) ≡ ϕ ,! 1 (&I: III8.17, VI2.18) ¡

(Φ 𝔽 ϕ & (1 _ 0) ≡ ϕ ⇒ Φ 𝔽 (1 _ 0)) ,! 2 (∀E: III8.14) ¡

Φ 𝔽 ϕ & (1 _ 0) ≡ ϕ ⇒ Φ 𝔽 (1 _ 0) ,! 3 (()E: 2) ¡

Φ 𝔽 (1 _ 0) ,! 4 (⇒E: 1,3) ¡

(Φ 𝔽 (1 _ 0) ⇒ θ Φ) ,! 5 (∀E: P10) ¡

Φ 𝔽 (1 _ 0) ⇒ θ Φ ,! 6 (()E: 5) ¡

θ Φ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

▯

! **14.** Every pairing predicate, where the first pair is 1, is a finite sequence. ¡

⊦ ∀a θ (1 ▪ a) ¡

a ,! 1 (Prem) ¡

(1 ▪ **a**) 𝔽 (1•) & (1 _ 1) ≡ (1•) ,! 2 (&I: III12.22, VI2.31) ¡

((1 ▪ **a**) 𝔽 (1•) & (1 _ 1) ≡ (1•) ⇒ (1 ▪ **a**) 𝔽 (1 _ 1)) ,! 3 (∀E: III8.14) ¡

(1 ▪ **a**) 𝔽 (1•) & (1 _ 1) ≡ (1•) ⇒ (1 ▪ **a**) 𝔽 (1 _ 1) ,! 4 (()E: 3) ¡

(1 ▪ **a**) 𝔽 (1 _ 1) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((1 ▪ **a**) 𝔽 (1 _ 1) ⇒ θ (1 ▪ **a**)) ,! 6 (∀E: P10) ¡

(1 ▪ **a**) 𝔽 (1 _ 1) ⇒ θ (1 ▪ **a**) ,! 7 (()E: 6) ¡

θ (1 ▪ **a**) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

∀a θ (1 ▪ a) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **15.** ¡

⊦ ∀F∀c (θ F & ω[c] ⇒ **f** ((ϴc) ∘ F)) ¡

F,**c** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & ω[**c**] ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**c**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[c] ⇒ f (Θc)) ,! 5 (∀E: V10.27) ¡

ω[c] ⇒ f (Θc) ,! 6 (()E: 5) ¡

f (Θc) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(θ F ⇒ f F) ,! 8 (∀E: P2) ¡

θ F ⇒ f F ,! 9 (()E: 8) ¡

f F ,! 10 (⇒E: 3,9) ¡

f (Θc) & f F ,! 11 (&I: 7,10) ¡

(f (Θc) & f F ⇒ f ((Θc) ∘ F)) ,! 12 (∀E: III10.22) ¡

f (Θc) & f F ⇒ f ((Θc) ∘ F) ,! 13 (()E: 12) ¡

f ((Θc) ∘ F) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

θ F & ω[c] ⇒ f ((Θc) ∘ F) ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(θ F & ω[c] ⇒ f ((Θc) ∘ F)) ,! 16 (()I: 15) ¡

∀F∀c (θ F & ω[c] ⇒ f ((Θc) ∘ F)) ! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **16.** P16, along with P3, justifies the definition P17. ¡

⊢ ∀F (θ F ⇒ ∀a∀b ((ω[a] & (F^D) ≡ (1 _ a))
& (ω[b] & (F^D) ≡ (1 _ b))
⇒ a = b)) ¡

F ,! 1 (Prem) ¡

θ F ,! 2 (Prem) ¡

a,b ,! 3 (Prem) ¡

(ω[a] & (F^D) ≡ (1 _ a)) & (ω[b] & (F^D) ≡ (1 _ b))
,! 4 (Prem) ¡

(ω[a] & (F^D) ≡ (1 _ a)) ,! 5 (&E: 4) ¡

(ω[b] & (F^D) ≡ (1 _ b)) ,! 6 (&E: 4) ¡

ω[a] & (F^D) ≡ (1 _ a) ,! 7 (()E: 5) ¡

ω[a] ,! 8 (&E: 7) ¡

ω[b] & (F^D) ≡ (1 _ b) ,! 9 (()E: 6) ¡

ω[**b**] ,! 10 (&E: 9) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ,! 11 (&I: 8,10) ¡

(ω[**a**] ⇒ ℕ[**a**,(1 _ **a**)]) ,! 12 (∀E: VI2.58) ¡

ω[**a**] ⇒ ℕ[**a**,(1 _ **a**)] ,! 13 (()E: 12) ¡

ℕ[**a**,(1 _ **a**)] ,! 14 (⇒E: 8,13) ¡

ω[**a**] & ℕ[**a**,(1 _ **a**)] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **a**)
,! 15 (&I: 7,14) ¡

(ω[**a**] & ℕ[**a**,(1 _ **a**)] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **a**) ⇒ ℕ[**a**,($\mathbf{F}^{D}$)])
,! 16 (∀E: IV4.6) ¡

ω[**a**] & ℕ[**a**,(1 _ **a**)] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **a**) ⇒ ℕ[**a**,($\mathbf{F}^{D}$)]
,! 17 (()E: 16) ¡

ℕ[**a**,($\mathbf{F}^{D}$)] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] & ℕ[**a**,($\mathbf{F}^{D}$)] ,! 19 (&I: 11,18) ¡

(ω[**b**] ⇒ ℕ[**b**,(1 _ **b**)]) ,! 20 (∀E: VI2.58) ¡

ω[**b**] ⇒ ℕ[**b**,(1 _ **b**)] ,! 21 (()E: 20) ¡

ℕ[**b**,(1 _ **b**)] ,! 22 (⇒E: 10,21) ¡

ω[**b**] & ℕ[**b**,(1 _ **b**)] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **b**)
,! 23 (&I: 9,22) ¡

(ω[**b**] & ℕ[**b**,(1 _ **b**)] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **b**) ⇒ ℕ[**b**,($\mathbf{F}^{D}$)])
,! 24 (∀E: IV4.6) ¡

ω[**b**] & ℕ[**b**,(1 _ **b**)] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **b**) ⇒ ℕ[**b**,($\mathbf{F}^{D}$)]
,! 25 (()E: 24) ¡

ℕ[**b**,($\mathbf{F}^{D}$)] ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] & ℕ[**a**,($\mathbf{F}^{D}$)] & ℕ[**b**,($\mathbf{F}^{D}$)]
,! 27 (&I: 19,26) ¡

(ω[**a**] & ω[**b**] & ℕ[**a**,($\mathbf{F}^{D}$)] & ℕ[**b**,($\mathbf{F}^{D}$)] ⇒ **a** = **b**)
,! 28 (∀E: IV2.10) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] & ℕ[**a**,($\mathbf{F}^{D}$)] & ℕ[**b**,($\mathbf{F}^{D}$)] ⇒ **a** = **b**
,! 29 (()E: 28) ¡

a = **b** ,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

(ω[**a**] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **a**)) & (ω[**b**] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **b**))

⇒ **a** = **b**

,! 31 (⇒I: 4,30) ¡

((ω[**a**] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **a**)) & (ω[**b**] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **b**))
⇒ **a** = **b**)

,! 32 (()I: 31) ¡

∀a∀b ((ω[a] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ a)) & (ω[b] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ b))
⇒ a = b)

,! 33 (∀I: 3,32) ¡

θ **F**
⇒ ∀a∀b ((ω[a] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ a))
& (ω[b] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ b))
⇒ a = b)

,! 34 (⇒I: 2,33) ¡

(θ **F**
⇒ ∀a∀b ((ω[a] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ a))
& (ω[b] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ b))
⇒ a = b))

,! 35 (()I: 34) ¡

∀F (θ F ⇒ ∀a∀b ((ω[a] & (F^{D}) ≡ (1 _ a))
& (ω[b] & (F^{D}) ≡ (1 _ b))
⇒ a = b))

! 28 (∀I: 1,35) ¡

▯

! **17.** (λ**F**) represents the length of a finite sequence **F**. ¡

𝕋 λ ; (λ**F**) ; θ **F** ; (ω[a] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ a))

¡! (𝕋D: P3,P16) ¡

! **18.** ¡

⊢ ∀n∀F (θ F & ω[n] & (F^{D}) ≡ (1 _ n) ⇒ (λF) = n) ¡

n,**F** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & ω[**n**] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **n**) ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **n**) ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[(λ**F**)] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ (λ**F**))) ,! 5 (𝕋I: P17,3) ¡

(ω[**n**] & ($\mathbf{F}^{D}$) ≡ (1 _ **n**)) ,! 6 (()I: 4) ¡

(ω[(λ**F**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**))) & (ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**))
,! 7 (&I: 5,6) ¡

(θ **F**
⇒ ∀a∀b ((ω[a] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ a))
& (ω[b] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ b))
⇒ a = b))
,! 8 (∀E: P16) ¡

θ **F**
⇒ ∀a∀b ((ω[a] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ a))
& (ω[b] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ b))
⇒ a = b)
,! 9 (()E: 8) ¡

∀a∀b ((ω[a] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ a)) & (ω[b] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ b))
⇒ a = b)
,! 10 (⇒E: 3,9) ¡

((ω[(λ**F**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**))) & (ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**))
⇒ (λ**F**) = **n**)
,! 11 (∀E: 10;
(λ**F**): P17,3) ¡

(ω[(λ**F**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**))) & (ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**))
⇒ (λ**F**) = **n**
,! 12 (()E: 11) ¡

(λ**F**) = **n** ,! 13 (⇒E: 7,12) ¡

θ **F** & ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ⇒ (λ**F**) = **n**
,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(θ **F** & ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ⇒ (λ**F**) = **n**)
,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀F (θ F & ω[n] & (F^{D}) ≡ (1 _ n) ⇒ (λF) = n)
! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **19.** ¡

⊢ ∀n∀F ((F^{D}) ≡ (1 _ n) & **f** F & ω[n] ⇒ (λF) = n) ¡

n,**F** ,! 1 (Prem) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) & **f** **F** & ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) & **f** **F** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**n**] ,! 5 (&E: 2) ¡

((**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) & **f** **F** ⇒ θ **F**) ,! 6 (∀E: P11) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) & **f** **F** ⇒ θ **F** ,! 7 (()E: 6) ¡

θ **F** ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

θ **F** & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ,! 9 (&I: 4,8) ¡

θ **F** & ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ,! 10 (&I: 5,9) ¡

(θ **F** & ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ⇒ (λ**F**) = **n**)
,! 11 (∀E: P18) ¡

θ **F** & ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ⇒ (λ**F**) = **n**
,! 12 (()E: 11) ¡

(λ**F**) = **n** ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) & **f** **F** & ω[**n**] ⇒ (λ**F**) = **n** ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

((**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) & **f** **F** & ω[**n**] ⇒ (λ**F**) = **n**)
,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀F ((F^{D}) ≡ (1 _ n) & **f** F & ω[n] ⇒ (λF) = n)
! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **20.** ¡

⊢ ∀F (θ F ⇒ ω[(λF)] & (F^{D}) ≡ (1 _ (λF))) ¡

F ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** ,! 2 (Prem) ¡

(θ **F** ⇒ ∃a (ω[a] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ a)))
,! 3 (∀E: P3) ¡

θ **F** ⇒ ∃a (ω[a] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ a)) ,! 4 (()E: 3) ¡

∃a (ω[a] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ a)) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**)) ,! 6 (∃E: 5) ¡

ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ,! 7 (()E: 6) ¡

θ **F** & ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ,! 8 (&I: 2,7) ¡

(θ **F** & ω[**n**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ⇒ (λ**F**) = **n**)

,! 9 (∀E: P18) ¡

θ **F** & ω[**n**] & (**F**D) ≡ (1 _ **n**) ⇒ (λ**F**) = **n**
,! 10 (()E: 9) ¡

(λ**F**) = **n** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[(λ**F**)] & (**F**D) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 12 (=E: 7,11) ¡

θ **F** ⇒ ω[(λ**F**)] & (**F**D) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(θ **F** ⇒ ω[(λ**F**)] & (**F**D) ≡ (1 _ (λ**F**))) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀F (θ F ⇒ ω[(λF)] & (FD) ≡ (1 _ (λF))) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **21.** ¡

⊢ ∀F (θ F ⇒ ω[(λF)]) ¡

F ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** ,! 2 (Prem) ¡

(θ **F** ⇒ ω[(λ**F**)] & (**F**D) ≡ (1 _ (λ**F**)))
,! 3 (∀E: P20) ¡

θ **F** ⇒ ω[(λ**F**)] & (**F**D) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[(λ**F**)] & (**F**D) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[(λ**F**)] ,! 6 (&E: 5) ¡

θ **F** ⇒ ω[(λ**F**)] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(θ **F** ⇒ ω[(λ**F**)]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀F (θ F ⇒ ω[(λF)]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **22.** ¡

⊢ ∀n∀F ((λF) = n ⇒ ω[n]) ¡

n,**F** ,! 1 (Prem) ¡

(λ**F**) = **n** ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** ,! 3 (𝕋E: P17,2) ¡

(θ **F** ⇒ ω[(λ**F**)]) ,! 4 (∀E: P21) ¡

θ **F** ⇒ ω[(λ**F**)] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[(λ**F**)] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**n**] ,! 7 (&E: 2,6) ¡

(λ**F**) = **n** ⇒ ω[**n**] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((λ**F**) = **n** ⇒ ω[**n**]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀F ((λF) = n ⇒ ω[n]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **23.** ¡

⊦ ∀F (θ F ⇒ (F^{D}) ≡ (1 _ (λF))) ¡

F ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** ,! 2 (Prem) ¡

(θ **F** ⇒ ω[(λ**F**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)))
,! 3 (∀E: P20) ¡

θ **F** ⇒ ω[(λ**F**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[(λ**F**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 6 (&E: 5) ¡

θ **F** ⇒ (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(θ **F** ⇒ (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**))) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀F (θ F ⇒ (F^{D}) ≡ (1 _ (λF))) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **24.** ¡

⊦ ∀n∀F ((λF) = n ⇒ (F^{D}) ≡ (1 _ n)) ¡

n,**F** ,! 1 (Prem) ¡

(λ**F**) = **n** ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** ,! 3 (𝕋E: P17,2) ¡

(θ **F** ⇒ (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**))) ,! 4 (∀E: P23) ¡

θ **F** ⇒ (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 5 (()E: 4) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ,! 7 (=E: 2,6) ¡

(λ**F**) = **n** ⇒ (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((λ**F**) = **n** ⇒ (**F**^{D}) ≡ (1 _ **n**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀F ((λF) = n ⇒ (F^{D}) ≡ (1 _ n)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **25.** ¡

⊦ ∀F∀x (θ F & (F^{D})[x] ⇒ (1 _ (λF))[x]) ¡

F,**x** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & (**F**^{D})[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**F**^{D})[**x**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(θ **F** ⇒ (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**))) ,! 5 (∀E: P23) ¡

θ **F** ⇒ (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**F**^{D})[**x**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**F**^{D})[**x**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ⇒ (1 _ (λ**F**))[**x**])
,! 9 (∀E: II1.35) ¡

(**F**^{D})[**x**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ⇒ (1 _ (λ**F**))[**x**]
,! 10 (()E: 9) ¡

(1 _ (λ**F**))[**x**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

θ **F** & (**F**^{D})[**x**] ⇒ (1 _ (λ**F**))[**x**] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(θ **F** & (**F**^{D})[**x**] ⇒ (1 _ (λ**F**))[**x**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀F∀x (θ F & (F^{D})[x] ⇒ (1 _ (λF))[x]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **26.** ¡

⊦ ∀F∀x∀y (θ F & F[x,y] ⇒ (1 _ (λF))[x]) ¡

F,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & **F**[**x**,**y**] ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** ,! 3 (&E) ¡

F[x,y] ,! 4 (&E) ¡

(F[x,y] ⇒ (F^{D})[x]) ,! 5 (∀E: III5.5) ¡

F[x,y] ⇒ (F^{D})[x] ,! 6 (()E: 5) ¡

(F^{D})[x] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

θ F & (F^{D})[x] ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(θ F & (F^{D})[x] ⇒ (1 _ (λF))[x]) ,! 9 (∀E: P25) ¡

θ F & (F^{D})[x] ⇒ (1 _ (λF))[x] ,! 10 (()E: 9) ¡

(1 _ (λF))[x] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

θ F & F[x,y] ⇒ (1 _ (λF))[x] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(θ F & F[x,y] ⇒ (1 _ (λF))[x]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀F∀x∀y (θ F & F[x,y] ⇒ (1 _ (λF))[x]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **27.** ¡

⊦ ∀F∀x ((1 _ (λF))[x] ⇒ θ F) ¡

F,x ,! 1 (Prem) ¡

(1 _ (λF))[x] ,! 2 (Prem) ¡

{a : ≤[1,a] & ≤[a,(λF)]}[x] ,! 3 (𝔻E: VI2.1,2) ¡

∀x ({a : ≤[1,a] & ≤[a,(λF)]}[x] ⇔ ≤[1,x] & ≤[x,(λF)])
,! 4 (Pred) ¡

({a : ≤[1,a] & ≤[a,(λF)]}[x] ⇔ ≤[1,x] & ≤[x,(λF)])
,! 5 (∀E: 4) ¡

{a : ≤[1,a] & ≤[a,(λF)]}[x] ⇔ ≤[1,x] & ≤[x,(λF)]
,! 6 (()E: 5) ¡

{a : ≤[1,a] & ≤[a,(λF)]}[x] ⇒ ≤[1,x] & ≤[x,(λF)]
,! 7 (⇔E: 6) ¡

≤[1,x] & ≤[x,(λF)] ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

≤[x,(λF)] ,! 9 (&E: 8) ¡

θ F ,! 10 (𝕋E: P17,9) ¡

(1 _ (λF))[x] ⇒ θ F ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

((1 _ (λ**F**))[**x**] ⇒ θ **F**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀F∀x ((1 _ (λF))[x] ⇒ θ F) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **28.** ¡

⊦ ∀F∀a∀x (θ F & (F^{D})[x] ⇒ ≤[1,x] & ≤[x,(λF)]) ¡

F,**a**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & (**F**^{D})[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

(θ **F** & (**F**^{D})[**x**] ⇒ (1 _ (λ**F**))[**x**]) ,! 3 (∀E: P25) ¡

θ **F** & (**F**^{D})[**x**] ⇒ (1 _ (λ**F**))[**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

(1 _ (λ**F**))[**x**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

θ **F** ,! 6 (&E: 2) ¡

((1 _ (λ**F**))[**x**] ⇒ ≤[1,**x**] & ≤[**x**,(λ**F**)])
,! 7 (∀E: VI2.3;
(λ**F**): P17,6) ¡

(1 _ (λ**F**))[**x**] ⇒ ≤[1,**x**] & ≤[**x**,(λ**F**)] ,! 8 (()E: 7) ¡

≤[1,**x**] & ≤[**x**,(λ**F**)] ,! 9 (⇒E: 5,8) ¡

θ **F** & (**F**^{D})[**x**] ⇒ ≤[1,**x**] & ≤[**x**,(λ**F**)] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(θ **F** & (**F**^{D})[**x**] ⇒ ≤[1,**x**] & ≤[**x**,(λ**F**)]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀F∀a∀x (θ F & (F^{D})[x] ⇒ ≤[1,x] & ≤[x,(λF)])
! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **29.** ¡

⊦ ∀F∀a∀i (θ F & (F´i) = a ⇒ ≤[1,i] & ≤[i,(λF)]) ¡

F,**a**,**i** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & (**F**´**i**) = **a** ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**F**´**i**) = **a** ,! 4 (&E: 2) ¡

f **F** & (**F**^{D})[**i**] ,! 5 (𝕋E: III8.20,4)
¡

(**F**^{D})[**i**] ,! 6 (&E: 5) ¡

θ **F** & (F^{D})[**i**] ,! 7 (&I: 3,6) ¡

(θ **F** & (F^{D})[**i**] ⇒ ≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)])
,! 8 (∀E: P28) ¡

θ **F** & (F^{D})[**i**] ⇒ ≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)] ,! 9 (()E: 8) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

θ **F** & (**F**´**i**) = **a** ⇒ ≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(θ **F** & (**F**´**i**) = **a** ⇒ ≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)])
,! 12 (()I: 11) ¡

∀F∀a∀i (θ F & (F´i) = a ⇒ ≤[1,i] & ≤[i,(λF)])
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **30.** ¡

⊢ ∀F∀a∀i (θ F & (F´i) = a ⇒ ≤[i,(λF)]) ¡

F,**a**,**i** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & (**F**´**i**) = **a** ,! 2 (Prem) ¡

(θ **F** & (**F**´**i**) = **a** ⇒ ≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)])
,! 3 (∀E: P29) ¡

θ **F** & (**F**´**i**) = **a** ⇒ ≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[**i**,(λ**F**)] ,! 6 (&E: 5) ¡

θ **F** & (**F**´**i**) = **a** ⇒ ≤[**i**,(λ**F**)] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(θ **F** & (**F**´**i**) = **a** ⇒ ≤[**i**,(λ**F**)]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀F∀a∀i (θ F & (F´i) = a ⇒ ≤[i,(λF)]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **31.** ¡

⊢ ∀F∀x ((1 _ (λF))[x] ⇒ (F^{D})[x]) ¡

F,**x** ,! 1 (Prem) ¡

(1 _ (λ**F**))[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

((1 _ (λ**F**))[**x**] ⇒ θ **F**) ,! 3 (∀E: P27) ¡

(1 _ (λF))[x] ⇒ θ F ,! 4 (()E: 3) ¡

θ F ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(θ F ⇒ (F^{D}) ≡ (1 _ (λF))) ,! 6 (∀E: P23) ¡

θ F ⇒ (F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ,! 7 (()E: 6) ¡

(F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(1 _ (λF))[x] & (F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ,! 9 (&I: 2,8) ¡

((1 _ (λF))[x] & (F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ⇒ (F^{D})[x])
,! 10 (∀E: II1.36) ¡

(1 _ (λF))[x] & (F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ⇒ (F^{D})[x]
,! 11 (()E: 10) ¡

(F^{D})[x] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(1 _ (λF))[x] ⇒ (F^{D})[x] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

((1 _ (λF))[x] ⇒ (F^{D})[x]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀F∀x ((1 _ (λF))[x] ⇒ (F^{D})[x]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

□

! P32 and P33 say that finite sequences with equivalent domains have the same length. !

! **32.** ¡

⊢ ∀F∀G (θ F & θ G & (F^{D}) ≡ (G^{D}) ⇒ (λF) = (λG)) ¡

F,G ,! 1 (Prem) ¡

θ F & θ G & (F^{D}) ≡ (G^{D}) ,! 2 (Prem) ¡

θ F ,! 3 (&E: 2) ¡

θ G ,! 4 (&E: 2) ¡

(F^{D}) ≡ (G^{D}) ,! 5 (&E: 2) ¡

(θ G ⇒ ω[(λG)] & (G^{D}) ≡ (1 _ (λG)))
,! 6 (∀E: P20) ¡

θ G ⇒ ω[(λG)] & (G^{D}) ≡ (1 _ (λG)) ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[(λG)] & (G^{D}) ≡ (1 _ (λG)) ,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

ω[(λG)] ,! 9 (&E: 8) ¡

(**G**^{D}) ≡ (1 _ (λ**G**)) ,! 10 (&E: 8) ¡

θ **F** & ω[(λ**G**)] ,! 11 (&I: 3,9) ¡

(**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) & (**G**^{D}) ≡ (1 _ (λ**G**)) ,! 12 (&I: 5,10) ¡

((**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) & (**G**^{D}) ≡ (1 _ (λ**G**)) ⇒ (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**G**)))
,! 13 (∀E: II1.15) ¡

(**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) & (**G**^{D}) ≡ (1 _ (λ**G**)) ⇒ (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**G**))
,! 14 (()E: 13) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**G**)) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

θ **F** & ω[(λ**G**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**G**)) ,! 16 (&I: 11,15) ¡

(θ **F** & ω[(λ**G**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**G**)) ⇒ (λ**F**) = (λ**G**))
,! 17 (∀E: P18;
(λ**G**): P17,4) ¡

θ **F** & ω[(λ**G**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**G**)) ⇒ (λ**F**) = (λ**G**)
,! 18 (()E: 17) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

θ **F** & θ **G** & (**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) ⇒ (λ**F**) = (λ**G**) ,! 20 (⇒I: 2,) ¡

(θ **F** & θ **G** & (**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) ⇒ (λ**F**) = (λ**G**))
,! 21 (()I: 20) ¡

∀F∀G (θ F & θ G & (F^{D}) ≡ (G^{D}) ⇒ (λF) = (λG))
! 22 (∀I: 1,21) ¡

▯

! **33.** ¡

⊦ ∀F∀G (θ F & θ G & (G^{D}) ≡ (F^{D}) ⇒ (λF) = (λG)) ¡

F,**G** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & θ **G** & (**G**^{D}) ≡ (**F**^{D}) ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** & θ **G** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**G**^{D}) ≡ (**F**^{D}) ,! 4 (&E: 2) ¡

((**G**^{D}) ≡ (**F**^{D}) ⇒ (**F**^{D}) ≡ (**G**^{D})) ,! 5 (∀E: II1.10) ¡

(**G**^{D}) ≡ (**F**^{D}) ⇒ (**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

θ **F** & θ **G** & (**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(θ **F** & θ **G** & (**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) ⇒ (λ**F**) = (λ**G**))
,! 9 (∀E: P32) ¡

θ **F** & θ **G** & (**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) ⇒ (λ**F**) = (λ**G**)
,! 10 (()E: 9) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

θ **F** & θ **G** & (**G**^{D}) ≡ (**F**^{D}) ⇒ (λ**F**) = (λ**G**) ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(θ **F** & θ **G** & (**G**^{D}) ≡ (**F**^{D}) ⇒ (λ**F**) = (λ**G**))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀F∀G (θ F & θ G & (G^D) ≡ (F^D) ⇒ (λF) = (λG))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! P34 through P37 say that equivalent finite sequences have the same length. ¡

! **34.** ¡

⊢ ∀F∀G (θ F & F ≣ G ⇒ (λF) = (λG)) ¡

F,**G** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & **F** ≣ **G** ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** ,! 3 (&E: 2) ¡

F ≣ **G** ,! 4 (&E: 2) ¡

(θ **F** & **F** ≣ **G** ⇒ θ **G**) ,! 5 (∀E: P8) ¡

θ **F** & **F** ≣ **G** ⇒ θ **G** ,! 6 (()E: 5) ¡

θ **G** ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

θ **F** & θ **G** ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(**F** ≣ **G** ⇒ (**F**$^{D)}$ ≡ (**G**^{D})) ,! 9 (∀E: III5.15) ¡

F ≣ **G** ⇒ (**F**$^{D)}$ ≡ (**G**^{D}) ,! 10 (()E: 9) ¡

(**F**$^{D)}$ ≡ (**G**^{D}) ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

θ **F** & θ **G** & (**F**$^{D)}$ ≡ (**G**^{D}) ,! 12 (&I: 8,11) ¡

(θ **F** & θ **G** & (**F**$^{D)}$ ≡ (**G**^{D}) ⇒ (λ**F**) = (λ**G**))
,! 13 (∀E: P32) ¡

θ **F** & θ **G** & (**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) ⇒ (λ**F**) = (λ**G**)
,! 14 (()E: 13) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

θ **F** & **F** ≣ **G** ⇒ (λ**F**) = (λ**G**) ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(θ **F** & **F** ≣ **G** ⇒ (λ**F**) = (λ**G**)) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀F∀G (θ F & F ≣ G ⇒ (λF) = (λG)) ! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **35.** ¡

⊢ ∀F∀G (θ F & G ≣ F ⇒ (λF) = (λG)) ¡

F,**G** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & **G** ≣ **F** ,! 2 (Prem) ¡

θ **F** ,! 3 (&E: 2) ¡

G ≣ **F** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**G** ≣ **F** ⇒ **F** ≣ **G**) ,! 5 (∀E: III1.8) ¡

G ≣ **F** ⇒ **F** ≣ **G** ,! 6 (()E: 5) ¡

F ≣ **G** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

θ **F** & **F** ≣ **G** ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(θ **F** & **F** ≣ **G** ⇒ (λ**F**) = (λ**G**)) ,! 9 (∀E: P34) ¡

θ **F** & **F** ≣ **G** ⇒ (λ**F**) = (λ**G**) ,! 10 (()E: 9) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

θ **F** & **G** ≣ **F** ⇒ (λ**F**) = (λ**G**) ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(θ **F** & **G** ≣ **F** ⇒ (λ**F**) = (λ**G**)) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀F∀G (θ F & G ≣ F ⇒ (λF) = (λG)) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **36.** ¡

⊢ ∀n∀F∀G ((λF) = n & F ≣ G ⇒ (λG) = n) ¡

n,**F**,**G** ,! 1 (Prem) ¡

(λ**F**) = **n** & **F** ≣ **G** ,! 2 (Prem) ¡

(λ**F**) = **n** ,! 3 (&E: 2) ¡

F ≣ G ,! 4 (&E: 2) ¡

θ F ,! 5 (𝕋E: P17,3) ¡

θ F & F ≣ G ,! 6 (&I: 4,5) ¡

(θ F & F ≣ G ⇒ (λF) = (λG)) ,! 7 (∀E: P34) ¡

θ F & F ≣ G ⇒ (λF) = (λG) ,! 8 (()E: 7) ¡

(λF) = (λG) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(λG) = n ,! 10 (=E: 3,9) ¡

(λF) = n & F ≣ G ⇒ (λG) = n ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

((λF) = n & F ≣ G ⇒ (λG) = n) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀F∀G ((λF) = n & F ≣ G ⇒ (λG) = n) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **37.** ¡

⊢ ∀n∀F∀G ((λF) = n & G ≣ F ⇒ (λG) = n) ¡

n,F,G ,! 1 (Prem) ¡

(λF) = n & G ≣ F ,! 2 (Prem) ¡

(λF) = n ,! 3 (&E: 2) ¡

G ≣ F ,! 4 (&E: 2) ¡

(G ≣ F ⇒ F ≣ G) ,! 5 (∀E: III1.8) ¡

G ≣ F ⇒ F ≣ G ,! 6 (()E: 5) ¡

F ≣ G ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(λF) = n & F ≣ G ,! 8 (&I: 3,7) ¡

((λF) = n & F ≣ G ⇒ (λG) = n) ,! 9 (∀E: P36) ¡

(λF) = n & F ≣ G ⇒ (λG) = n ,! 10 (()E: 9) ¡

(λG) = n ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(λF) = n & G ≣ F ⇒ (λG) = n ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((λF) = n & G ≣ F ⇒ (λG) = n) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀F∀G ((λF) = n & G ≣ F ⇒ (λG) = n) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **38.** ¡

⊢ ∀n∀m∀F (≤[m,n] & (λF) = n ⇒ (λ(F⌈ (1 _ m))) = m) ¡

n,m,**F** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**m**,**n**] & (λ**F**) = **n** ,! 2 (Prem) ¡

≤[**m**,**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(λ**F**) = **n** ,! 4 (&E: 2) ¡

((λ**F**) = **n** ⇒ (**F**D) ≡ (1 _ **n**)) ,! 5 (∀E: P24) ¡

(λ**F**) = **n** ⇒ (**F**D) ≡ (1 _ **n**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**F**D) ≡ (1 _ **n**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(≤[**m**,**n**] ⇒ (1 _ **m**) ⊆ (1 _ **n**)) ,! 8 (∀E: VI2.25) ¡

≤[**m**,**n**] ⇒ (1 _ **m**) ⊆ (1 _ **n**) ,! 9 (()E: 8) ¡

(1 _ **m**) ⊆ (1 _ **n**) ,! 10 (⇒E: 3,9) ¡

(**F**D) ≡ (1 _ **n**) & (1 _ **m**) ⊆ (1 _ **n**) ,! 11 (&I: 7,9) ¡

((**F**D) ≡ (1 _ **n**) & (1 _ **m**) ⊆ (1 _ **n**)
⇒ ((**F**⌈ (1 _ **m**))D) ≡ (1 _ **m**))
,! 12 (∀E: III7.32) ¡

(**F**D) ≡ (1 _ **n**) & (1 _ **m**) ⊆ (1 _ **n**)
⇒ ((**F**⌈ (1 _ **m**))D) ≡ (1 _ **m**)
,! 13 (()E: 12) ¡

((**F**⌈ (1 _ **m**))D) ≡ (1 _ **m**) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

θ **F** ,! 15 (𝕋E: P17,4) ¡

(θ **F** ⇒ **f** **F**) ,! 16 (∀E: P2) ¡

θ **F** ⇒ **f** **F** ,! 17 (()E: 16) ¡

f **F** ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

(**f** **F** ⇒ **f** (**F**⌈ (1 _ **m**))) ,! 19 (∀E: III8.4) ¡

f **F** ⇒ **f** (**F**⌈ (1 _ **m**)) ,! 20 (()E: 19) ¡

f (**F**⌈ (1 _ **m**)) ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

((**F**⌈ (1 _ **m**))D) ≡ (1 _ **m**) & **f** (**F**⌈ (1 _ **m**))
,! 22 (&I: 14,21) ¡

(≤[m,n] ⇒ ω[m]) ,! 23 (∀E: V3.6) ¡

≤[m,n] ⇒ ω[m] ,! 24 (()E: 23) ¡

ω[m] ,! 25 (⇒E: 3,24) ¡

((F ⌈ (1 _ m))^{D}) ≡ (1 _ m) & f (F ⌈ (1 _ m)) & ω[m]
,! 26 (&I: 22,25) ¡

(((F ⌈ (1 _ m))^{D}) ≡ (1 _ m) & f (F ⌈ (1 _ m)) & ω[m]
⇒ (λ(F ⌈ (1 _ m))) = m)
,! 27 (∀E: P19) ¡

((F ⌈ (1 _ m))^{D}) ≡ (1 _ m) & f (F ⌈ (1 _ m)) & ω[m]
⇒ (λ(F ⌈ (1 _ m))) = m
,! 28 (()E: 27) ¡

(λ(F ⌈ (1 _ m))) = m ,! 29 (⇒E: 26,28) ¡

≤[m,n] & (λF) = n ⇒ (λ(F ⌈ (1 _ m))) = m
,! 30 (⇒I: 2,29) ¡

(≤[m,n] & (λF) = n ⇒ (λ(F ⌈ (1 _ m))) = m)
,! 31 (()I: 30) ¡

∀n∀m∀F (≤[m,n] & (λF) = n ⇒ (λ(F ⌈ (1 _ m))) = m)
! 32 (∀I: 1,31) ¡

□

! **39.** ¡

⊢ ∀n∀F (f F & ω[n] & (1 _ n) ⊆ (F^{D})
⇒ ∃G ((λG) = n
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,n] ⇒ (G´i) = (F´i)))) ¡

n,F ,! 1 (Prem) ¡

f F & ω[n] & (1 _ n) ⊆ (F^{D}) ,! 2 (Prem) ¡

f F ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[n] ,! 4 (&E: 2) ¡

(1 _ n) ⊆ (F^{D}) ,! 5 (&E: 2) ¡

((1 _ n) ⊆ (F^{D}) ⇒ ((F ⌈ (1 _ n))^{D}) ≡ (1 _ n))
,! 6 (∀E: III7.31) ¡

(1 _ n) ⊆ (F^{D}) ⇒ ((F ⌈ (1 _ n))^{D}) ≡ (1 _ n)
,! 7 (()E: 6) ¡

((F ⌈ (1 _ n))^{D}) ≡ (1 _ n) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(f F ⇒ f (F ⌈ (1 _ n))) ,! 9 (∀E: III8.4) ¡

f F ⇒ f (F ⌈ (1 _ n)) ,! 10 (()E: 9) ¡

f (F ⌈ (1 _ n)) ,! 11 (⇒E: 3,10) ¡

((F ⌈ (1 _ n))D) ≡ (1 _ n) & f (F ⌈ (1 _ n))
,! 12 (&I: 8,11) ¡

((F ⌈ (1 _ n))D) ≡ (1 _ n) & f (F ⌈ (1 _ n)) & ω[n]
,! 13 (&I: 4,12) ¡

(((F ⌈ (1 _ n))D) ≡ (1 _ n) & f (F ⌈ (1 _ n)) & ω[n]
⇒ (λ(F ⌈ (1 _ n)) = n)
,! 14 (∀E: P19) ¡

((F ⌈ (1 _ n))D) ≡ (1 _ n) & f (F ⌈ (1 _ n)) & ω[n]
⇒ (λ(F ⌈ (1 _ n))) = n
,! 15 (()E: 14) ¡

(λ(F ⌈ (1 _ n))) = n ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

i ,! 17 (Prem) ¡

≤[1,i] & ≤[i,n] ,! 18 (Prem) ¡

f F & (1 _ n) ⊆ (FD) ,! 19 (&I: 3,5) ¡

(≤[1,i] & ≤[i,n] ⇒ (1 _ n)[i]) ,! 20 (∀E: VI2.4) ¡

≤[1,i] & ≤[i,n] ⇒ (1 _ n)[i] ,! 21 (()E: 20) ¡

(1 _ n)[i] ,! 22 (⇒E: 18,21) ¡

f F & (1 _ n) ⊆ (FD) & (1 _ n)[i] ,! 23 (&I: 19,22) ¡

(f F & (1 _ n) ⊆ (FD) & (1 _ n)[i]
⇒ ((F ⌈ (1 _ n))´i) = (F´i))
,! 24 (∀E: III8.34) ¡

f F & (1 _ n) ⊆ (FD) & (1 _ n)[i]
⇒ ((F ⌈ (1 _ n))´i) = (F´i)
,! 25 (()E: 24) ¡

((F ⌈ (1 _ n))´i) = (F´i) ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

≤[1,i] & ≤[i,n] ⇒ ((F ⌈ (1 _ n))´i) = (F´i)
,! 27 (⇒I: 18,26) ¡

(≤[1,i] & ≤[i,n] ⇒ ((F ⌈ (1 _ n))´i) = (F´i))
,! 28 (()I: 27) ¡

∀i (≤[1,i] & ≤[i,n] ⇒ ((F ⌈ (1 _ n))´i) = (F´i))

,! 29 (∀I: 17,28) ¡

(λ(F ⌈ (1 _ n))) = n
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,n] ⇒ ((F ⌈ (1 _ n))´i) = (F´i))
,! 30 (&I: 16,29) ¡

((λ(F ⌈ (1 _ n))) = n
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,n] ⇒ ((F ⌈ (1 _ n))´i) = (F´i)))
,! 31 (()I: 30) ¡

∃G ((λG) = n & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,n] ⇒ (G´i) = (F´i)))
,! 32 (∃I: 31) ¡

f F & ω[n] & (1 _ n) ⊆ (F^D)
⇒ ∃G ((λG) = n & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,n] ⇒ (G´i) = (F´i)))
,! 33 (⇒I: 2,32) ¡

(f F & ω[n] & (1 _ n) ⊆ (F^D)
⇒ ∃G ((λG) = n
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,n] ⇒ (G´i) = (F´i))))
,! 34 (()I: 33) ¡

∀n∀F (f F & ω[n] & (1 _ n) ⊆ (F^D)
⇒ ∃G ((λG) = n
& ∀i (≤[1,i] & ≤[i,n] ⇒ (G´i) = (F´i))))
! 35 (∀I: 1,34) ¡

▯

! **40.** ¡

⊢ ∀F∀G (F ≣ G & (1 _ (λF))[i] ⇒ (F´i) = (G´i)) ¡

F,G ,! 1 (Prem) ¡

F ≣ G & (1 _ (λF))[i] ,! 2 (Prem) ¡

F ≣ G ,! 3 (&E: 2) ¡

(1 _ (λF))[i] ,! 4 (&E: 2) ¡

((1 _ (λF))[i] ⇒ θ F) ,! 5 (∀E: P27) ¡

(1 _ (λF))[i] ⇒ θ F ,! 6 (()E: 5) ¡

θ F ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

θ F & F ≣ G ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(θ F ⇒ (F^D) ≡ (1 _ (λF))) ,! 9 (∀E: P23) ¡

θ F ⇒ (F^D) ≡ (1 _ (λF)) ,! 10 (()E: 9) ¡

(**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 11 (⇒E: 7,10) ¡

(1 _ (λ**F**))[**i**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 12 (&I: 4,11) ¡

((1 _ (λ**F**))[**i**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ⇒ (**F**^{D})[**i**])
,! 13 (∀E: II1.36) ¡

(1 _ (λ**F**))[**i**] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ⇒ (**F**^{D})[**i**]
,! 14 (()E: 13) ¡

(**F**^{D})[**i**] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

θ **F** & **F** ≣ **G** & (**F**^{D})[**i**] ,! 16 (&I: 8,15) ¡

(θ **F** & **F** ≣ **G** & (**F**^{D})[**i**] ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**))
,! 17 (∀E: P12) ¡

θ **F** & **F** ≣ **G** & (**F**^{D})[**i**] ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**)
,! 18 (()E: 17) ¡

(**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

F ≣ **G** & (1 _ (λ**F**))[**i**] ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**)
,! 20 (⇒I: 2,19) ¡

(**F** ≣ **G** & (1 _ (λ**F**))[**i**] ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**))
,! 21 (()I: 20) ¡

∀F∀G (F ≣ G & (1 _ (λF))[i] ⇒ (F´i) = (G´i))
! 22 (∀I: 1,21) ¡

▯

! P41 and P42 say that, if two finite sequences have the same length and have the same value for every entry in their domains, then they are equivalent. ¡

! **41.** ¡

⊢ ∀F∀G ((λF) = (λG) & ∀i ((1 _ (λF))[i] ⇒ (F´i) = (G´i))
⇒ F ≣ G) ¡

F,**G** ,! 1 (Prem) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) & ∀i ((1 _ (λ**F**))[i] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
,! 2 (Prem) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) ,! 3 (&E: 2) ¡

∀i ((1 _ (λ**F**))[i] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i)) ,! 4 (&E: 2) ¡

θ **F** ,! 5 (𝕋E: P17,3) ¡

(θ **F** ⇒ **f** **F**) ,! 6 (∀E: P2) ¡

θ F ⇒ f F ,! 7 (()E: 6) ¡

f F ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(θ F ⇒ (F^{D}) ≡ (1 _ (λF))) ,! 9 (∀E: P23) ¡

θ F ⇒ (F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ,! 10 (()E: 9) ¡

(F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ,! 11 (⇒E: 5,10) ¡

θ G ,! 12 (𝕋E: P17,3) ¡

(θ G ⇒ (G^{D}) ≡ (1 _ (λG))) ,! 13 (∀E: P23) ¡

θ G ⇒ (G^{D}) ≡ (1 _ (λG)) ,! 14 (()E: 13) ¡

(G^{D}) ≡ (1 _ (λG)) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

(G^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ,! 16 (=E: 3,15) ¡

(F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) & (G^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ,! 17 (&I: 11,16) ¡

((F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) & (G^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ⇒ (F^{D}) ≡ (G^{D}))
,! 18 (∀E: P17) ¡

(F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) & (G^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ⇒ (F^{D}) ≡ (G^{D})
,! 19 (()E: 18) ¡

(F^{D}) ≡ (G^{D}) ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

f F & (F^{D}) ≡ (G^{D}) ,! 21 (&I: 8,20) ¡

x ,! 22 (Prem) ¡

(F^{D})[x] ,! 23 (Prem) ¡

(F^{D})[x] & (F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ,! 24 (&I: 11,23) ¡

((F^{D})[x] & (F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ⇒ (1 _ (λF))[x])
,! 25 (∀E: II1.35) ¡

(F^{D})[x] & (F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ⇒ (1 _ (λF))[x]
,! 26 (()E: 25) ¡

(1 _ (λF))[x] ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

((1 _ (λF))[x] ⇒ (F´x) = (G´x)) ,! 28 (∀E: 4) ¡

(1 _ (λF))[x] ⇒ (F´x) = (G´x) ,! 29 (()E: 28) ¡

(F´x) = (G´x) ,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

(F^{D})[x] ⇒ (F´x) = (G´x) ,! 31 (⇒I: 23,30) ¡

((**F**^{D})[**x**] ⇒ (**F**´**x**) = (**G**´**x**)) ,! 32 (()I: 31) ¡

∀x ((**F**^{D})[x] ⇒ (**F**´x) = (**G**´x)) ,! 33 (∀I: 22,32) ¡

f F & (**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) & ∀x ((**F**^{D})[x] ⇒ (**F**´x) = (**G**´x))
,! 34 (&I: 21,33) ¡

(**f F** & (**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) & ∀x ((**F**^{D})[x] ⇒ (**F**´x) = (**G**´x))
⇒ **F** ≣ **G**)
,! 35 (∀E: III8.30) ¡

f F & (**F**^{D}) ≡ (**G**^{D}) & ∀x ((**F**^{D})[x] ⇒ (**F**´x) = (**G**´x)) ⇒ **F** ≣ **G**
,! 36 (()E: 35) ¡

F ≣ **G** ,! 37 (⇒E: 34,36) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) & ∀i ((1 _ (λ**F**))[i] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i)) ⇒ **F** ≣ **G**
,! 38 (⇒I: 2,37) ¡

((λ**F**) = (λ**G**) & ∀i ((1 _ (λ**F**))[i] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i)) ⇒ **F** ≣ **G**)
,! 39 (()I: 38) ¡

∀F∀G ((λF) = (λG) & ∀i ((1 _ (λF))[i] ⇒ (F´i) = (G´i))
⇒ F ≣ G)
! 40 (∀I: 1,39) ¡

▯

! **42.** ¡

⊢ ∀F∀G ((λF) = (λG) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λF)] ⇒ (F´i) = (G´i))
⇒ F ≣ G) ¡

F,**G** ,! 1 (Prem) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
,! 2 (Prem) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) ,! 3 (&E: 2) ¡

∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
,! 4 (&E: 2) ¡

θ **F** ,! 5 (𝕋E: P17,3) ¡

i ,! 6 (Prem) ¡

(1 _ (λ**F**))[**i**] ,! 7 (Prem) ¡

((1 _ (λ**F**))[**i**] ⇒ ≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)])
,! 8 (∀E: VI2.3;
(λ**F**): P17,5) ¡

(1 _ (λ**F**))[**i**] ⇒ ≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)]
,! 9 (()E: 8) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)] ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**))
,! 11 (∀E: 4) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)] ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**)
,! 12 (()E: 11) ¡

(**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(1 _ (λ**F**))[**i**] ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 14 (⇒I: 7,13) ¡

((1 _ (λ**F**))[**i**] ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**)) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀i ((1 _ (λ**F**))[i] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i)) ,! 16 (∀I: 6,15) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) & ∀i ((1 _ (λ**F**))[i] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
,! 17 (&I: 3,16) ¡

((λ**F**) = (λ**G**) & ∀i ((1 _ (λ**F**))[i] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
⇒ **F** ≣ **G**)
,! 18 (∀E: P41) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) & ∀i ((1 _ (λ**F**))[i] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i)) ⇒ **F** ≣ **G**
,! 19 (()E: 18) ¡

F ≣ **G** ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
⇒ **F** ≣ **G**
,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

((λ**F**) = (λ**G**) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
⇒ **F** ≣ **G**)
,! 22 (()I: 21) ¡

∀F∀G ((λF) = (λG) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λF)] ⇒ (F´i) = (G´i))
⇒ F ≣ G)
! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! **43.** P43 says that sequences of length 1 which have the same value at the first entry, are equivalent. ¡

⊦ ∀F∀G ((λF) = 1 & (λG) = 1 & (F´1) = (G´1) ⇒ F ≣ G) ¡

F,**G** ,! 1 (Prem) ¡

(λ**F**) = 1 & (λ**G**) = 1 & (**F**´1) = (**G**´1) ,! 2 (Prem) ¡

$(\lambda\mathbf{F}) = 1$,! 3 (&E: 2) ¡

$(\lambda\mathbf{G}) = 1$,! 4 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{F}'1) = (\mathbf{G}'1)$,! 5 (&E: 2) ¡

$((\lambda\mathbf{F}) = (\lambda\mathbf{G}) \,\&\, \forall i\ (\leq[1,i] \,\&\, \leq[i,(\lambda\mathbf{F})] \Rightarrow (\mathbf{F}'i) = (\mathbf{G}'i)) \Rightarrow \mathbf{F} \equiv \mathbf{G}\ )$
,! 6 (∀E: P42) ¡

$(\lambda\mathbf{F}) = (\lambda\mathbf{G}) \,\&\, \forall i\ (\leq[1,i] \,\&\, \leq[i,(\lambda\mathbf{F})] \Rightarrow (\mathbf{F}'i) = (\mathbf{G}'i)) \Rightarrow \mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$
,! 7 (()E: 6) ¡

! To show: $(\lambda\mathbf{F}) = (\lambda\mathbf{G}) \,\&\, \forall i\ (\leq[1,i] \,\&\, \leq[i,(\lambda\mathbf{F})] \Rightarrow (\mathbf{F}'i) = (\mathbf{G}'i))$
¡

$(\lambda\mathbf{F}) = (\lambda\mathbf{G})$,! 8 (=E: 3,4) ¡

! To show: $\forall i\ (\leq[1,i] \,\&\, \leq[i,(\lambda\mathbf{F})] \Rightarrow (\mathbf{F}'i) = (\mathbf{G}'i))$ ¡

$\mathbf{i}$,! 9 (Prem) ¡

$\leq[1,\mathbf{i}] \,\&\, \leq[\mathbf{i},(\lambda\mathbf{F})]$,! 10 (Prem) ¡

$\leq[1,\mathbf{i}] \,\&\, \leq[\mathbf{i},1]$,! 11 (=E: 3,10) ¡

$(\leq[1,\mathbf{i}] \,\&\, \leq[\mathbf{i},1] \Rightarrow 1 = \mathbf{i}\ )$,! 12 (∀E: V3.22) ¡

$\leq[1,\mathbf{i}] \,\&\, \leq[\mathbf{i},1] \Rightarrow 1 = \mathbf{i}$,! 13 (()E: 12) ¡

$1 = \mathbf{i}$,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

$(\mathbf{F}'\mathbf{i}) = (\mathbf{G}'\mathbf{i})$,! 15 (=E: 5,14) ¡

$\leq[1,\mathbf{i}] \,\&\, \leq[\mathbf{i},(\lambda\mathbf{F})] \Rightarrow (\mathbf{F}'\mathbf{i}) = (\mathbf{G}'\mathbf{i})$,! 16 (⇒I: 10,15) ¡

$(\leq[1,\mathbf{i}] \,\&\, \leq[\mathbf{i},(\lambda\mathbf{F})] \Rightarrow (\mathbf{F}'\mathbf{i}) = (\mathbf{G}'\mathbf{i}))$
,! 17 (()I: 16) ¡

$\forall i\ (\leq[1,i] \,\&\, \leq[i,(\lambda\mathbf{F})] \Rightarrow (\mathbf{F}'i) = (\mathbf{G}'i))$
,! 18 (∀I: 9,17) ¡

$(\lambda\mathbf{F}) = (\lambda\mathbf{G}) \,\&\, \forall i\ (\leq[1,i] \,\&\, \leq[i,(\lambda\mathbf{F})] \Rightarrow (\mathbf{F}'i) = (\mathbf{G}'i))$
,! 19 (&I: 8,18) ¡

! Conclusion. ¡

$\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$,! 20 (⇒E: 7,19) ¡

$(\lambda\mathbf{F}) = 1 \,\&\, (\lambda\mathbf{G}) = 1 \,\&\, (\mathbf{F}'1) = (\mathbf{G}'1) \Rightarrow \mathbf{F} \equiv \mathbf{G}$
,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

$((\lambda\mathbf{F}) = 1 \,\&\, (\lambda\mathbf{G}) = 1 \,\&\, (\mathbf{F}'1) = (\mathbf{G}'1) \Rightarrow \mathbf{F} \equiv \mathbf{G}\ )$
,! 22 (()I: 21) ¡

∀F∀G ((λF) = 1 & (λG) = 1 & (F´1) = (G´1) ⇒ F ≣ G)
! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! **44.** P44 says that sequences of length 2 which have the same value at their first and second entries, are equivalent. ¡

⊦ ∀F∀G ((λF) = 2 & (λG) = 2 & (F´1) = (G´1) & (F´2) = (G´2) ⇒ F ≣ G) ¡

F,**G** ,! 1 (Prem) ¡

(λ**F**) = 2 & (λ**G**) = 2 & (**F**´1) = (**G**´1) & (**F**´2) = (**G**´2)
,! 2 (Prem) ¡

(λ**F**) = 2 ,! 3 (&E: 2) ¡

(λ**G**) = 2 ,! 4 (&E: 2) ¡

(**F**´1) = (**G**´1) ,! 5 (&E: 2) ¡

(**F**´2) = (**G**´2) ,! 6 (&E: 2) ¡

((λ**F**) = (λ**G**) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i)) ⇒ **F** ≣ **G**)
,! 7 (∀E: P42) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i)) ⇒ **F** ≣ **G**
,! 8 (()E: 7) ¡

! To show: (λ**F**) = (λ**G**) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
¡

(λ**F**) = (λ**G**) ,! 9 (=E: 3,4) ¡

! To show: ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i)) ¡

i ,! 10 (Prem) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)] ,! 11 (Prem) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,2] ,! 12 (=E: 3,11) ¡

(≤[1,**i**] & ≤[**i**,2] ⇒ **i** = 1 ∨ **i** = 2)
,! 13 (∀E: V3.61) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,2] ⇒ **i** = 1 ∨ **i** = 2 ,! 14 (()E: 13) ¡

i = 1 ∨ **i** = 2 ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

i = 1 ,! 16 (Prem) ¡

(**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 17 (=E: 5,16) ¡

i = 1 ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 18 (⇒I: 16,17) ¡

i = 2 ,! 19 (Prem) ¡

(**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 20 (=E: 6,19) ¡

i = 2 ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 21 (⇒I: 19,20) ¡

(**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 22 (∨E: 15,17,20)
¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)] ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 23 (⇒I: 11,22) ¡

(≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)] ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**))
,! 24 (()I: 23) ¡

∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
,! 25 (∀I: 10,24) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
,! 26 (&I: 9,25) ¡

! Conclusion. ¡

F ≣ **G** ,! 27 (⇒E: 8,26) ¡

(λ**F**) = 2 & (λ**G**) = 2 & (**F**´1) = (**G**´1) & (**F**´2) = (**G**´2) ⇒ **F** ≣ **G**
,! 28 (⇒I: 2,27) ¡

((λ**F**) = 2 & (λ**G**) = 2 & (**F**´1) = (**G**´1) & (**F**´2) = (**G**´2)
⇒ **F** ≣ **G**)
,! 29 (()I: 28) ¡

∀F∀G ((λF) = 2 & (λG) = 2 & (F´1) = (G´1) & (F´2) = (G´2)
⇒ F ≣ G)
! 30 (∀I: 1,29) ¡

□

! **45.** P45 says that sequences of length 3 which have the same value at their first, second and third entries, are equivalent.
¡

⊢ ∀F∀G ((λF) = 3 & (λG) = 3 & (F´1) = (G´1) & (F´2) = (G´2)
& (F´3) = (G´3)
⇒ F ≣ G) ¡

F,**G** ,! 1 (Prem) ¡

(λ**F**) = 3 & (λ**G**) = 3 & (**F**´1) = (**G**´1) & (**F**´2) = (**G**´2)
& (**F**´3) = (**G**´3)
,! 2 (Prem) ¡

(λ**F**) = 3 ,! 3 (&E: 2) ¡

(λ**G**) = 3 ,! 4 (&E: 2) ¡

(**F**´1) = (**G**´1) ,! 5 (&E: 2) ¡

(**F**´2) = (**G**´2) ,! 6 (&E: 2) ¡

(**F**´3) = (**G**´3) ,! 7 (&E: 2) ¡

((λ**F**) = (λ**G**) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
⇒ **F** ≣ **G**)
,! 8 (∀E: P42) ¡

(λ**F**) = (λ**G**) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
⇒ **F** ≣ **G**
,! 9 (()E: 8) ¡

! To show: (λ**F**) = (λ**G**) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i))
¡

(λ**F**) = (λ**G**) ,! 10 (=E: 3,4) ¡

! To show: ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λ**F**)] ⇒ (**F**´i) = (**G**´i)) ¡

i ,! 11 (Prem) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,(λ**F**)] ,! 12 (Prem) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,3] ,! 13 (=E: 3,12) ¡

(≤[1,**i**] & ≤[**i**,3] ⇒ **i** = 1 ∨ **i** = 2 ∨ **i** = 3)
,! 14 (∀E: V3.62) ¡

≤[1,**i**] & ≤[**i**,3] ⇒ **i** = 1 ∨ **i** = 2 ∨ **i** = 3
,! 15 (()E: 14) ¡

i = 1 ∨ **i** = 2 ∨ **i** = 3 ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

i = 1 ,! 17 (Prem) ¡

(**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 18 (=E: 5,17) ¡

i = 1 ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 19 (⇒I: 17,18) ¡

i = 2 ∨ **i** = 3 ,! 20 (Prem) ¡

i = 2 ,! 21 (Prem) ¡

(**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 22 (=E: 6,21) ¡

i = 2 ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 23 (⇒I: 21,22) ¡

i = 3 ,! 24 (Prem) ¡

(**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 25 (=E: 7,24) ¡

i = 3 ⇒ (**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 26 (⇒I: 24,25) ¡

(**F**´**i**) = (**G**´**i**) ,! 27 (∨E: 20,23,26)
¡

i = 2 ∨ i = 3 ⇒ (F´i) = (G´i)   ,! 28 (⇒I: 20,27)   ¡

(F´i) = (G´i)   ,! 29 (∨E: 16,19,28)
¡

≤[1,i] & ≤[i,(λF)] ⇒ (F´i) = (G´i) ,! 30 (⇒I: 12,29)   ¡

(≤[1,i] & ≤[i,(λF)] ⇒ (F´i) = (G´i))
,! 31 (()I: 30)   ¡

∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λF)] ⇒ (F´i) = (G´i))
,! 32 (∀I: 11,31)   ¡

(λF) = (λG) & ∀i (≤[1,i] & ≤[i,(λF)] ⇒ (F´i) = (G´i))
,! 33 (&I: 10,32)   ¡

! Conclusion.   ¡

F ≣ G   ,! 34 (⇒E: 9,33)   ¡

(λF) = 3 & (λG) = 3 & (F´1) = (G´1) & (F´2) = (G´2)
& (F´3) = (G´3)
⇒ F ≣ G
,! 35 (⇒I: 2,34)   ¡

((λF) = 3 & (λG) = 3 & (F´1) = (G´1) & (F´2) = (G´2)
& (F´3) = (G´3)
⇒ F ≣ G)
,! 36 (()I: 35)   ¡

∀F∀G ((λF) = 3 & (λG) = 3 & (F´1) = (G´1) & (F´2) = (G´2)
& (F´3) = (G´3)
⇒ F ≣ G)
! 37 (∀I: 1,36)   ¡

□

! **46.** The empty relationship has length 0.   ¡

⊢ (λΦ) = 0   ¡

(θ Φ & ω[0] & (Φ^{D}) ≡ (1 _ 0) ⇒ (λΦ) = 0)
,! 1 (∀E: P18)   ¡

θ Φ & ω[0] & (Φ^{D}) ≡ (1 _ 0) ⇒ (λΦ) = 0   ,! 2 (()E: 1)   ¡

θ Φ & ω[0]   ,! 3 (&I: ω0,P13)   ¡

(Φ^{D}) ≡ ϕ & (1 _ 0) ≡ ϕ   ,! 4 (&I: III5.22,
VI2.18)   ¡

((Φ^{D}) ≡ ϕ & (1 _ 0) ≡ ϕ ⇒ (Φ^{D}) ≡ (1 _ 0))
,! 5 (∀E: II1.17)   ¡

(Φ^{D}) ≡ φ & (1 _ 0) ≡ φ ⇒ (Φ^{D}) ≡ (1 _ 0) ,! 6 (()E: 5) ¡

(Φ^{D}) ≡ (1 _ 0) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

θ Φ & ω[0] & (Φ^{D}) ≡ (1 _ 0) ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(λΦ) = 0 ! 9 (⇒E: 2,8) ¡

▯

! **47.** ¡

├ ∀F (F ≣ Φ ⇒ (λF) = 0) ¡

F ,! 1 (Prem) ¡

F ≣ Φ ,! 2 (Prem) ¡

(λΦ) = 0 & **F** ≣ Φ ,! 3 (&I: P46,2) ¡

((λΦ) = 0 & **F** ≣ Φ ⇒ (λ**F**) = 0) ,! 4 (∀E: P37) ¡

(λΦ) = 0 & **F** ≣ Φ ⇒ (λ**F**) = 0 ,! 5 (()E: 4) ¡

(λ**F**) = 0 ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

F ≣ Φ ⇒ (λ**F**) = 0 ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(**F** ≣ Φ ⇒ (λ**F**) = 0) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀F (F ≣ Φ ⇒ (λF) = 0) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **48.** Pairing relationships, where the first pair is 1, have length 1. ¡

├ ∀a (λ(1 ▪ a)) = 1 ¡

a ,! 1 (Prem) ¡

θ (1 ▪ **a**) ,! 2 (∀E: P14)

θ (1 ▪ **a**) & ω[1] ,! 3 (&I: IV9.2,2)) ¡

((1 ▪ **a**)^{D}) ≡ (1$^{\bullet}$) ,! 4 (∀E: III12.18) ¡

(1 _ 1) ≡ (1$^{\bullet}$) ,! 5 (∀E: VI2.31) ¡

((1 ▪ **a**)^{D}) ≡ (1$^{\bullet}$) & (1 _ 1) ≡ (1$^{\bullet}$) ,! 6 (&I: 4,5) ¡

(((1 ▪ **a**)^{D}) ≡ (1$^{\bullet}$) & (1 _ 1) ≡ (1$^{\bullet}$) ⇒ ((1 ▪ **a**)^{D}) ≡ (1 _ 1))
,! 7 (∀E: II1.17) ¡

((1 ▪ **a**)^{D}) ≡ (1$^{\bullet}$) & (1 _ 1) ≡ (1$^{\bullet}$) ⇒ ((1 ▪ **a**)^{D}) ≡ (1 _ 1)

,! 8 (()E: 7) ¡

((1 ▪ **a**)^{D}) ≡ (1 _ 1) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

θ (1 ▪ **a**) & ω[1] & ((1 ▪ **a**)^{D}) ≡ (1 _ 1) ,! 10 (&I: 3,9) ¡

(θ (1 ▪ **a**) & ω[1] & ((1 ▪ **a**)^{D}) ≡ (1 _ 1) ⇒ (λ(1 ▪ **a**)) = 1)
,! 11 (∀E: P18) ¡

θ (1 ▪ **a**) & ω[1] & ((1 ▪ **a**)^{D}) ≡ (1 _ 1) ⇒ (λ(1 ▪ **a**)) = 1
,! 12 (()E: 11) ¡

(λ(1 ▪ **a**)) = 1 ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

∀a (λ(1 ▪ a)) = 1 ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **49.** ¡

⊢ ∀F∀a (F ≣ (1 ▪ a) ⇒ (λF) = 1) ¡

F,**a** ,! 1 (Prem) ¡

F ≣ (1 ▪ **a**) ,! 2 (Prem) ¡

(λ(1 ▪ **a**)) = 1 ,! 3 (∀E: P48) ¡

(λ(1 ▪ **a**)) = 1 & **F** ≣ (1 ▪ **a**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((λ(1 ▪ **a**)) = 1 & **F** ≣ (1 ▪ **a**) ⇒ (λ**F**) = 1)
,! 5 (∀E: P37) ¡

(λ(1 ▪ **a**)) = 1 & **F** ≣ (1 ▪ **a**) ⇒ (λ**F**) = 1
,! 6 (()E: 5) ¡

(λ**F**) = 1 ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

F ≣ (1 ▪ **a**) ⇒ (λ**F**) = 1 ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**F** ≣ (1 ▪ **a**) ⇒ (λ**F**) = 1) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀F∀a (F ≣ (1 ▪ a) ⇒ (λF) = 1) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **50.** ¡

⊢ ∀F ((λF) = 0 ⇒ (F^{D}) ≡ ϕ) ¡

F ,! 1 (Prem) ¡

(λ**F**) = 0 ,! 2 (Prem) ¡

⊏⊏⊏⊏((λ**F**) = 0 ⇒ (**F**^{D}) ≡ (1 _ 0)) ,! 3 (∀E: P24) ¡

$(\lambda \mathbf{F}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{F}^D) \equiv (1 \_ 0)$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{F}^D) \equiv (1 \_ 0)$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\mathbf{F}^D) \equiv (1 \_ 0) \ \& \ (1 \_ 0) \equiv \phi$,! 6 (&I: VI2.18,5) ¡

$(\ (\mathbf{F}^D) \equiv (1 \_ 0) \ \& \ (1 \_ 0) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{F}^D) \equiv \phi \ )$
,! 7 (∀E: II1.15) ¡

$(\mathbf{F}^D) \equiv (1 \_ 0) \ \& \ (1 \_ 0) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{F}^D) \equiv \phi$
,! 8 (()E: 7) ¡

$(\mathbf{F}^D) \equiv \phi$,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

$(\lambda \mathbf{F}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{F}^D) \equiv \phi$,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

$(\ (\lambda \mathbf{F}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{F}^D) \equiv \phi \ )$,! 11 (()I: 10) ¡

$\forall F \ (\ (\lambda F) = 0 \Rightarrow (F^D) \equiv \phi \ )$! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **51.** The only finite sequences of 0 length are equivalent to the empty relationship. ¡

$\vdash \forall F \ (\ (\lambda F) = 0 \Rightarrow F \equiv \Phi \ )$ ¡

F ,! 1 (Prem) ¡

$(\lambda \mathbf{F}) = 0$,! 2 (Prem) ¡

⊏⊏⊏⊏ $(\ (\lambda \mathbf{F}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{F}^D) \equiv \phi \ )$,! 3 (∀E: P50) ¡

$(\lambda \mathbf{F}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{F}^D) \equiv \phi$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{F}^D) \equiv \phi$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\ (\mathbf{F}^D) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{F} \equiv \Phi \ )$,! 6 (∀E: III5.24) ¡

$(\mathbf{F}^D) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{F} \equiv \Phi$,! 7 (()E: 6) ¡

$\mathbf{F} \equiv \Phi$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$(\lambda \mathbf{F}) = 0 \Rightarrow \mathbf{F} \equiv \Phi$,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

$(\ (\lambda \mathbf{F}) = 0 \Rightarrow \mathbf{F} \equiv \Phi \ )$,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall F \ (\ (\lambda F) = 0 \Rightarrow F \equiv \Phi \ )$! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **52.** The only sequences of length 1 are equivalent to a pairing relationship (where the first pair is 1). ¡

⊦ ∀F ((λF) = 1 ⇒ ∃b F ≣ (1 ▪ b)) ¡

F ,! 1 (Prem) ¡

(λ**F**) = 1 ,! 2 (Prem) ¡

⊏⊏⊏⊏((λ**F**) = 1 ⇒ (**F**D) ≡ (1 _ 1)) ,! 3 (∀E: P24) ¡

(λ**F**) = 1 ⇒ (**F**D) ≡ (1 _ 1) ,! 4 (()E: 3) ¡

(**F**D) ≡ (1 _ 1) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**F**D) ≡ (1 _ 1) & (1 _ 1) ≡ (1•) ,! 6 (&I: VI2.31,5) ¡

((**F**D) ≡ (1 _ 1) & (1 _ 1) ≡ (1•) ⇒ (**F**D) ≡ (1•))
,! 7 (∀E: II1.15) ¡

(**F**D) ≡ (1 _ 1) & (1 _ 1) ≡ (1•) ⇒ (**F**D) ≡ (1•)
,! 8 (()E: 7) ¡

(**F**D) ≡ (1•) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

θ **F** ,! 10 (𝕋E: P17,2) ¡

(θ **F** ⇒ **f F**) ,! 11 (∀E: P2) ¡

θ **F** ⇒ **f F** ,! 12 (()E: 11) ¡

f F ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(**F**D) ≡ (1•) & **f F** ,! 14 (&I: 9,13) ¡

F 𝔽 (1•) ,! 15 (𝕊I: III8.10,14) ¡

(**F** 𝔽 (1•) ⇒ ∃b **F** ≣ (1 ▪ b)) ,! 16 (∀E: III12.23) ¡

F 𝔽 (1•) ⇒ ∃b **F** ≣ (1 ▪ b) ,! 17 (()E: 16) ¡

∃b **F** ≣ (1 ▪ b) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

(λ**F**) = 1 ⇒ ∃b **F** ≣ (1 ▪ b) ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

((λ**F**) = 1 ⇒ ∃b **F** ≣ (1 ▪ b)) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀F ((λF) = 1 ⇒ ∃b F ≣ (1 ▪ b)) ! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **53.** ¡

⊦ ∀a∃F ((λF) = 1 & (F´1) = a) ¡

a ,! 1 (Prem) ¡

(λ(1 ▪ a)) = 1 ,! 2 (∀E: P48) ¡

((1 ▪ a)´1) = a ,! 3 (∀E: III12.24) ¡

(λ(1 ▪ a)) = 1 & ((1 ▪ a)´1) = a ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((λ(1 ▪ a)) = 1 & ((1 ▪ a)´1) = a) ,! 5 (()I: 4) ¡

∃F ((λF) = 1 & (F´1) = a) ,! 6 (∃I: 5) ¡

∀a∃F ((λF) = 1 & (F´1) = a) ! 7 (∀I: 1,6) ¡

▯

! **54.** ¡

⊢ ∀n∀m∀F (≤[m,n] & (λF) = n
⇒ (λ ((⊕m) ∘ (F ⌈ ((m+1) _ n)))) = (n-m)) ¡

n,m,F ,! 1 (Prem) ¡

≤[m,n] & (λF) = n ,! 2 (Prem) ¡

≤[m,n] ,! 3 (&E: 2) ¡

(λF) = n ,! 4 (&E: 2) ¡

((λF) = n ⇒ (F^{D}) ≡ (1 _ n)) ,! 5 (∀E: P24) ¡

(λF) = n ⇒ (F^{D}) ≡ (1 _ n) ,! 6 (()E: 5) ¡

(F^{D}) ≡ (1 _ n) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(≤[m,n] ⇒ ω[m]) ,! 8 (∀E: V3.6) ¡

≤[m,n] ⇒ ω[m] ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[m] ,! 10 (⇒E: 3,9) ¡

ω[1] & ω[m] ,! 11 (&I: IV9.2,10) ¡

(ω[1] & ω[m] ⇒ ≤[1,(m+1)]) ,! 12 (∀E: V3.34) ¡

ω[1] & ω[m] ⇒ ≤[1,(m+1)] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[1,(m+1)] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

ω[m] & ω[1] ,! 15 (&I: IV9.2,10) ¡

(≤[1,(m+1)] ⇒ ((m+1) _ n) ⊆ (1 _ n))
,! 16 (∀E: VI2.26;

(m+1): V1.7,15) ¡

≤[1,(m+1)] ⇒ ((m+1) _ n) ⊆ (1 _ n) ,! 17 (()E: 16) ¡

((m+1) _ n) ⊆ (1 _ n) ,! 18 (⇒E: 14,17) ¡

(F^D) ≡ (1 _ n) & ((m+1) _ n) ⊆ (1 _ n)
,! 19 (&I: 7,18) ¡

((F^D) ≡ (1 _ n) & ((m+1) _ n) ⊆ (1 _ n)
⇒ ((F ⌈ ((m+1) _ n))^D) ≡ ((m+1) _ n))
,! 20 (∀E: III7.32) ¡

(F^D) ≡ (1 _ n) & ((m+1) _ n) ⊆ (1 _ n)
⇒ ((F ⌈ ((m+1) _ n))^D) ≡ ((m+1) _ n)
,! 21 (()E: 20) ¡

((F ⌈ ((m+1) _ n))^D) ≡ ((m+1) _ n) ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

((F ⌈ ((m+1) _ n))^D) ≡ ((m+1) _ n) & ≤[m,n]
,! 23 (&I: 3,22) ¡

(((F ⌈ ((m+1) _ n))^D) ≡ ((m+1) _ n) & ≤[m,n]
⇒ (((⊕m) ∘ (F ⌈ ((m+1) _ n)))^D) ≡ (1 _ (n-m)))
,! 24 (∀E: VI2.57) ¡

((F ⌈ ((m+1) _ n))^D) ≡ ((m+1) _ n) & ≤[m,n]
⇒ (((⊕m) ∘ (F ⌈ ((m+1) _ n)))^D) ≡ (1 _ (n-m))
,! 25 (()E: 24) ¡

(((⊕m) ∘ (F ⌈ ((m+1) _ n)))^D) ≡ (1 _ (n-m))
,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

(ω[m] ⇒ f (⊕m)) ,! 27 (∀E: V10.10) ¡

ω[m] ⇒ f (⊕m) ,! 28 (()E: 27) ¡

f (⊕m) ,! 29 (⇒E: 10,28) ¡

θ F ,! 30 (𝕋E: P17,4) ¡

(θ F ⇒ f F) ,! 31 (∀E: P2) ¡

θ F ⇒ f F ,! 32 (()E: 31) ¡

f F ,! 33 (⇒E: 30,32) ¡

(f F ⇒ f (F ⌈ ((m+1) _ n))) ,! 34 (∀E: III8.4) ¡

f F ⇒ f (F ⌈ ((m+1) _ n)) ,! 35 (()E: 34) ¡

f (F ⌈ ((m+1) _ n)) ,! 36 (⇒E: 33,35) ¡

f (⊕m) & **f** (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)) ,! 37 (&I: 29,36) ¡

(**f** (⊕m) & **f** (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**))
⇒ **f** ((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**))))
,! 38 (∀E: III10.22) ¡

f (⊕m) & **f** (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)) ⇒ **f** ((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))
,! 39 (()E: 38) ¡

f ((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**))) ,! 40 (⇒E: 37,39) ¡

(((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))^{D}) ≡ (1 _ (**n**-**m**))
& **f** ((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))
,! 41 (&I: 26,40) ¡

(≤[**m**,**n**] ⇒ ω[(**n**-**m**)]) ,! 42 (∀E: V5.8) ¡

≤[**m**,**n**] ⇒ ω[(**n**-**m**)] ,! 43 (()E: 42) ¡

ω[(**n**-**m**)] ,! 44 (⇒E: 3,43) ¡

(((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))^{D}) ≡ (1 _ (**n**-**m**))
& **f** ((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))
& ω[(**n**-**m**)]
,! 45 (&I: 41,44) ¡

((((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))^{D}) ≡ (1 _ (**n**-**m**))
& **f** ((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))
& ω[(**n**-**m**)]
⇒ (λ ((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))) = (**n**-**m**))
,! 46 (∀E: P19;
(**n**-**m**): V5.7,3) ¡

(((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))^{D}) ≡ (1 _ (**n**-**m**))
& **f** ((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))
& ω[(**n**-**m**)]
⇒ (λ ((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))) = (**n**-**m**)
,! 47 (()E: 46) ¡

(λ ((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))) = (**n**-**m**)
,! 48 (⇒E: 45,47) ¡

≤[**m**,**n**] & (λ**F**) = **n** ⇒ (λ ((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))) = (**n**-**m**)
,! 49 (⇒I: 2,48) ¡

(≤[**m**,**n**] & (λ**F**) = **n**
⇒ (λ ((⊕m) ∘ (**F** ⌈ ((m+1) _ **n**)))) = (**n**-**m**))
,! 50 (()I: 49) ¡

∀n∀m∀F (≤[m,n] & (λF) = n
⇒ (λ ((⊕m) ∘ (F ⌈ ((m+1) _ n)))) = (n-m))
! 51 (∀I: 1,50) ¡

▯

! **55.** ¡

⊢ ∀G∀c (θ G & ω[c]
⇒ (((Θc) ∘ G)^{D}) ≡ ((c+1) _ (c+(λG)))) ¡

G,**c** ,! 1 (Prem) ¡

θ **G** & ω[**c**] ,! 2 (Prem) ¡

θ **G** ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**c**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(∀x (∃y ((Θ**c**) ∘ **G**)[x,y] ⇔ ((**c**+1) _ (**c**+(λ**G**)))[x])
⇒ (((Θ**c**) ∘ **G**)^{D}) ≡ ((**c**+1) _ (**c**+(λ**G**))))
,! 5 (∀E: III5.13) ¡

∀x (∃y ((Θ**c**) ∘ **G**)[x,y] ⇔ ((**c**+1) _ (**c**+(λ**G**)))[x])
⇒ (((Θ**c**) ∘ **G**)^{D}) ≡ ((**c**+1) _ (**c**+(λ**G**)))
,! 6 (()E: 5) ¡

ω[**c**] & ω[1] ,! 7 (&I: IV9.2,6) ¡

(ω[**c**] & ω[1] ⇒ (**c**+1) = (1+**c**)) ,! 8 (∀E: V2.5) ¡

ω[**c**] & ω[1] ⇒ (**c**+1) = (1+**c**) ,! 9 (()E: 8) ¡

(**c**+1) = (1+**c**) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(θ **G** ⇒ ω[(λ**G**)]) ,! 11 (∀E: P21) ¡

θ **G** ⇒ ω[(λ**G**)] ,! 12 (()E: 11) ¡

ω[(λ**G**)] ,! 13 (⇒E: 3,12) ¡

ω[**c**] & ω[(λ**G**)] ,! 14 (&I: 4,13) ¡

(ω[**c**] & ω[(λ**G**)] ⇒ (**c**+(λ**G**)) = ((λ**G**)+**c**))
,! 15 (∀E: V2.5;
(λ**G**): P17,3) ¡

ω[**c**] & ω[(λ**G**)] ⇒ (**c**+(λ**G**)) = ((λ**G**)+**c**) ,! 16 (()E: 15) ¡

(**c**+(λ**G**)) = ((λ**G**)+**c**) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

x ,! 18 (Prem) ¡

((1 _ (λG))[(x-c)] ⇔ ((1+c) _ ((λG)+c))[x])
,! 19 (∀E: VI2.48;
(λG): P17,3) ¡

(1 _ (λG))[(x-c)] ⇔ ((1+c) _ ((λG)+c))[x]
,! 20 (()E: 19) ¡

(1 _ (λG))[(x-c)] ⇔ ((c+1) _ ((λG)+c))[x]
,! 21 (=E: 10,20) ¡

(1 _ (λG))[(x-c)] ⇔ ((c+1) _ (c+(λG)))[x]
,! 22 (=E: 17,21) ¡

∃y ((Θc) ∘ G)[x,y] ,! 23 (Prem) ¡

((Θc) ∘ G)[x,y] ,! 24 (∃E: 23) ¡

(((Θc) ∘ G)[x,y] ⇒ ∃z((Θc)[x,z] & G[z,y]))
,! 25 (∀E: III10.3) ¡

((Θc) ∘ G)[x,y] ⇒ ∃z((Θc)[x,z] & G[z,y])
,! 26 (()E: 25) ¡

∃z((Θc)[x,z] & G[z,y]) ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

((Θc)[x,z] & G[z,y]) ,! 28 (∃E: 27) ¡

(Θc)[x,z] & G[z,y] ,! 29 (()E: 28) ¡

(Θc)[x,z] ,! 30 (&E: 29) ¡

G[z,y] ,! 31 (&E: 29) ¡

θ G & G[z,y] ,! 32 (&I: 3,31) ¡

(θ G & G[z,y] ⇒ (1 _ (λG))[z]) ,! 33 (∀E: P26) ¡

θ G & G[z,y] ⇒ (1 _ (λG))[z] ,! 34 (()E: 33) ¡

(1 _ (λG))[z] ,! 35 (⇒E: 32,34) ¡

((Θc)[x,z] ⇒ (x-c) = z) ,! 36 (∀E: V10.19) ¡

(Θc)[x,z] ⇒ (x-c) = z ,! 37 (()E: 36) ¡

(x-c) = z ,! 38 (⇒E: 30,37) ¡

(1 _ (λG))[(x-c)] ,! 39 (=E: 35,38) ¡

(1 _ (λG))[(x-c)] ⇒ ((c+1) _ (c+(λG)))[x]
,! 40 (⇔E: 22) ¡

((c+1) _ (c+(λG)))[x] ,! 41 (⇒E: 39,40) ¡

∃y ((⊖c) ∘ G)[x,y] ⇒ ((c+1) _ (c+(λG)))[x]
,! 42 (⇒I: 23,41) ¡

((c+1) _ (c+(λG)))[x] ,! 43 (Prem) ¡

((c+1) _ (c+(λG)))[x] ⇒ (1 _ (λG))[(x-c)]
,! 44 (⇔E: 22) ¡

(1 _ (λG))[(x-c)] ,! 45 (⇒E: 43,44) ¡

(θ G ⇒ (G^{D}) ≡ (1 _ (λG))) ,! 46 (∀E: P23) ¡

θ G ⇒ (G^{D}) ≡ (1 _ (λG)) ,! 47 (()E: 46) ¡

(G^{D}) ≡ (1 _ (λG)) ,! 48 (⇒E: 3,47) ¡

(1 _ (λG))[(x-c)] & (G^{D}) ≡ (1 _ (λG))
,! 49 (&I: 45,48) ¡

≤[c,x] ,! 50 (𝕋E: V5.7,45) ¡

((1 _ (λG))[(x-c)] & (G^{D}) ≡ (1 _ (λG))
⇒ ∃y G[(x-c),y])
,! 51 (∀E: III5.9;
(x-c): V5.7,50) ¡

(1 _ (λG))[(x-c)] & (G^{D}) ≡ (1 _ (λG))
⇒ ∃y G[(x-c),y]
,! 52 (()E: 51) ¡

∃y G[(x-c),y] ,! 53 (⇒E: 49,52) ¡

G[(x-c),y] ,! 54 (∃E: 53) ¡

(≤[c,x] ⇒ (⊖c)[x,(x-c)]) ,! 55 (∀E: V10.21) ¡

≤[c,x] ⇒ (⊖c)[x,(x-c)] ,! 56 (()E: 55) ¡

(⊖c)[x,(x-c)] ,! 57 (⇒E: 50,56) ¡

(⊖c)[x,(x-c)] & G[(x-c),y] ,! 58 (&I: 54,57) ¡

((⊖c)[x,(x-c)] & G[(x-c),y] ⇒ ((⊖c) ∘ G)[x,y])
,! 59 (∀E: III10.5;
(x-c): V5.7,50) ¡

(⊖c)[x,(x-c)] & G[(x-c),y] ⇒ ((⊖c) ∘ G)[x,y]
,! 60 (()E: 59) ¡

((⊖c) ∘ G)[x,y] ,! 61 (⇒E: 58,60) ¡

∃y ((⊖c) ∘ G)[x,y] ,! 62 (∃I: 61) ¡

((c+1) _ (c+(λG)))[x] ⇒ ∃y ((⊖c) ∘ G)[x,y]
,! 63 (⇒I: 43,62) ¡

∃y ((⊖c) ∘ G)[x,y] ⇔ ((c+1) _ (c+(λG)))[x]
,! 64 (⇔I: 42,63) ¡

(∃y ((⊖c) ∘ G)[x,y] ⇔ ((c+1) _ (c+(λG)))[x])
,! 65 (()I: 64) ¡

∀x (∃y ((⊖c) ∘ G)[x,y] ⇔ ((c+1) _ (c+(λG)))[x])
,! 66 (∀I: 65) ¡

(((⊖c) ∘ G)^{D}) ≡ ((c+1) (c+(λG))) ,! 67 (⇒E: 6,66) ¡

θ G & ω[c] ⇒ (((⊖c) ∘ G)^{D}) ≡ ((c+1) (c+(λG)))
,! 68 (⇒I: 2,67) ¡

(θ G & ω[c] ⇒ (((⊖c) ∘ G)^{D}) ≡ ((c+1) (c+(λG))))
,! 69 (()I: 68) ¡

∀G∀c (θ G & ω[c]
⇒ (((⊖c) ∘ G)^{D}) ≡ ((c+1) _ (c+(λG))))
! 70 (∀I: 1,69) ¡

▯

! **56.** ¡

⊢ ∀F∀G (θ F & θ G
⇒ ((F^{D}) ∪ (((⊖(λF)) ° G)^{D})) ≡ (1 _ ((λF)+(λG)))
& ((F^{D}) ∩ (((⊖(λF)) ° G)^{D})) ≡ φ) ¡

F,G ,! 1 (Prem) ¡

θ F & θ G ,! 2 (Prem) ¡

θ F ,! 3 (&E: 2) ¡

θ G ,! 4 (&E: 2) ¡

(θ F ⇒ ω[(λF)] & (F^{D}) ≡ (1 _ (λF)))
,! 5 (∀E: P20) ¡

θ F ⇒ ω[(λF)] & (F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[(λF)] & (F^{D}) ≡ (1 _ (λF)) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[(λF)] ,! 8 (&E: 7) ¡

(θ G ⇒ ω[(λG)]) ,! 9 (∀E: P21) ¡

θ G ⇒ ω[(λG)] ,! 10 (()E: 9) ¡

ω[(λ**G**)] ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

ω[(λ**F**)] & ω[(λ**G**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**)) ,! 12 (&I: 7,11) ¡

θ **G** & ω[(λ**F**)] ,! 13 (&I: 4,8) ¡

(θ **G** & ω[(λ**F**)]
⇒ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D}) ≡ (((λ**F**)+1) _ ((λ**F**)+(λ**G**))))
,! 14 (∀E: P55;
(λ**F**): P17,3) ¡

θ **G** & ω[(λ**F**)]
⇒ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D}) ≡ (((λ**F**)+1) _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
,! 15 (()E: 14) ¡

(((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D}) ≡ (((λ**F**)+1) _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

ω[(λ**F**)] & ω[(λ**G**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**))
& (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D}) ≡ (((λ**F**)+1) _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
,! 17 (&I: 12,16) ¡

(ω[(λ**F**)] & ω[(λ**G**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**))
& (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D}) ≡ (((λ**F**)+1) _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
⇒ ((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
& ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ)
,! 18 (∀E: VI2.37;
(λ**F**): P17,3;
(λ**G**): P17,4) ¡

ω[(λ**F**)] & ω[(λ**G**)] & (**F**^{D}) ≡ (1 _ (λ**F**))
& (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D}) ≡ (((λ**F**)+1) _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
⇒ ((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
& ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ
,! 19 (()E: 18) ¡

((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
& ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ
,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

θ **F** & θ **G**
⇒ ((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
& ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ
,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(θ **F** & θ **G**
⇒ ((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
& ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ)

,! 22 (()I: 21) ¡

∀F∀G (θ F & θ G
⇒ ((F^{D}) ∪ (((Θ(λF)) ∘ G)^{D})) ≡ (1 _ ((λF)+(λG)))
& ((F^{D}) ∩ (((Θ(λF)) ∘ G)^{D})) ≡ ϕ)
,! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! **57.** ¡

⊢ ∀F∀G (θ F & θ G
⇒ ((F^{D}) ∪ (((Θ(λF)) ∘ G)^{D})) ≡ (1 _ ((λF)+(λG)))) ¡

F,**G** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & θ **G** ,! 2 (Prem) ¡

(θ **F** & θ **G**
⇒ ((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
& ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ)
,! 3 (∀E: P56) ¡

θ **F** & θ **G**
⇒ ((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
& ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ
,! 4 (()E: 3) ¡

((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
& ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
,! 6 (&E: 5) ¡

θ **F** & θ **G**
⇒ ((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(θ **F** & θ **G**
⇒ ((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**))))
,! 8 (()I: 7) ¡

∀F∀G (θ F & θ G
⇒ ((F^{D}) ∪ (((Θ(λF)) ∘ G)^{D})) ≡ (1 _ ((λF)+(λG))))
,! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **58.** ¡

⊢ ∀F∀G (θ F & θ G ⇒ ((F^{D}) ∩ (((Θ(λF)) ∘ G)^{D})) ≡ ϕ) ¡

F,**G** ,! 1 (Prem) ¡

θ **F** & θ **G** ,! 2 (Prem) ¡

(θ **F** & θ **G**
⇒ ((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
& ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ)
,! 3 (∀E: P56) ¡

θ **F** & θ **G**
⇒ ((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
& ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ
,! 4 (()E: 3) ¡

((**F**^{D}) ∪ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ (1 _ ((λ**F**)+(λ**G**)))
& ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ ,! 6 (&E: 5) ¡

θ **F** & θ **G** ⇒ ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ
,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(θ **F** & θ **G** ⇒ ((**F**^{D}) ∩ (((Θ(λ**F**)) ∘ **G**)^{D})) ≡ ϕ)
,! 8 (()I: 7) ¡

∀F∀G (θ F & θ G ⇒ ((F^{D}) ∩ (((Θ(λF)) ∘ G)^{D})) ≡ ϕ)
,! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯