!CHAPTER 2

FINITE INTERVALS¡

! This chapter introduces and develops the concept of finite intervals. The finite interval (**b** _ **c**) is satified by those finite numbers betweeen **b** and **c** (inclusive). ¡

! **1.** (**b** _ **c**) represents the finite interval between **b** and **c** (inclusive). ¡

𝔻 _ ; (**b** _ **c**) ; ; {a : ≤[**b**,a] & ≤[a,**c**]} ¡

! P2 through P26 are mostly simple consequences of the definition. ¡

! **2.** ¡

⊦ ∀b∀c∀x ((b _ c)[x] ⇔ ≤[b,x] & ≤[x,c]) ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

∀x ({a : ≤[**b**,a] ∨ ≤[a,**c**]}[x] ⇔ ≤[**b**,x] & ≤[x,**c**])
,! 2 (Pred) ¡

∀x ((**b** _ **c**)[x] ⇔ ≤[**b**,x] & ≤[x,**c**]) ,! 3 (𝔻I: P1,2) ¡

∀b∀c∀x ((b _ c)[x] ⇔ ≤[b,x] & ≤[x,c]) ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **3.** ¡

⊦ ∀b∀c∀x ((b _ c)[x] ⇒ ≤[b,x] & ≤[x,c]) ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

((**b** _ **c**)[**x**] ⇔ ≤[**b**,**x**] & ≤[**x**,**c**]) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ⇔ ≤[**b**,**x**] & ≤[**x**,**c**] ,! 3 (()E: 2) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ≤[**b**,**x**] & ≤[**x**,**c**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

((**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ≤[**b**,**x**] & ≤[**x**,**c**]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀b∀c∀x ((b _ c)[x] ⇒ ≤[b,x] & ≤[x,c]) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **4.** ¡

⊦ ∀b∀c∀x (≤[b,x] & ≤[x,c] ⇒ (b _ c)[x]) ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

((**b** _ **c**)[**x**] ⇔ ≤[**b**,**x**] & ≤[**x**,**c**]) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ⇔ ≤[**b**,**x**] & ≤[**x**,**c**] ,! 3 (()E: 2) ¡

≤[b,x] & ≤[x,c] ⇒ (b _ c)[x] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(≤[b,x] & ≤[x,c] ⇒ (b _ c)[x]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀b∀c∀x (≤[b,x] & ≤[x,c] ⇒ (b _ c)[x]) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! **5.** ¡

⊦ ∀b∀c∀x ((b _ c)[x] ⇒ ≤[b,x]) ¡

b,c,x ,! 1 (Prem) ¡

(b _ c)[x] ,! 2 (Prem) ¡

((b _ c)[x] ⇒ ≤[b,x] & ≤[x,c]) ,! 3 (∀E: P3) ¡

(b _ c)[x] ⇒ ≤[b,x] & ≤[x,c] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[b,x] & ≤[x,c] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[b,x] ,! 6 (&E: 5) ¡

(b _ c)[x] ⇒ ≤[b,x] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

((b _ c)[x] ⇒ ≤[b,x]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀b∀c∀x ((b _ c)[x] ⇒ ≤[b,x]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **6.** ¡

⊦ ∀b∀c∀x ((b _ c)[x] ⇒ ≤[x,c]) ¡

b,c,x ,! 1 (Prem) ¡

(b _ c)[x] ,! 2 (Prem) ¡

((b _ c)[x] ⇒ ≤[b,x] & ≤[x,c]) ,! 3 (∀E: P3) ¡

(b _ c)[x] ⇒ ≤[b,x] & ≤[x,c] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[b,x] & ≤[x,c] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[x,c] ,! 6 (&E: 5) ¡

(b _ c)[x] ⇒ ≤[x,c] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

((b _ c)[x] ⇒ ≤[x,c]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀b∀c∀x ((b _ c)[x] ⇒ ≤[x,c]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **7.** ¡

⊦ ∀b∀c (≤[b,c] ⇒ (b _ c)[b]) ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**b**,**c**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**b**,**c**] ⇒ ω[**b**]) ,! 3 (∀E: V3.6) ¡

≤[**b**,**c**] ⇒ ω[**b**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**b**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[**b**] ⇒ ≤[**b**,**b**]) ,! 6 (∀E: V3.23) ¡

ω[**b**] ⇒ ≤[**b**,**b**] ,! 7 (()E: 6) ¡

≤[**b**,**b**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

≤[**b**,**b**] & ≤[**b**,**c**] ,! 9 (&I: 2,8) ¡

(≤[**b**,**b**] & ≤[**b**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**)[**b**]) ,! 10 (∀E: V3.4) ¡

≤[**b**,**b**] & ≤[**b**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**)[**b**] ,! 11 (()E: 10) ¡

(**b** _ **c**)[**b**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

≤[**b**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**)[**b**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(≤[**b**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**)[**b**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀b∀c (≤[b,c] ⇒ (b _ c)[b]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

□

! **8.** ¡

⊦ ∀b∀c (≤[b,c] ⇒ (b _ c)[c]) ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**b**,**c**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**b**,**c**] ⇒ ω[**c**]) ,! 3 (∀E: V3.7) ¡

≤[**b**,**c**] ⇒ ω[**c**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**c**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[**c**] ⇒ ≤[**c**,**c**]) ,! 6 (∀E: V3.23) ¡

ω[**c**] ⇒ ≤[**c**,**c**] ,! 7 (()E: 6) ¡

≤[**c**,**c**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

≤[**b**,**c**] & ≤[**c**,**c**] ,! 9 (&I: 2,8) ¡

(≤[**b**,**c**] & ≤[**c**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**)[**c**]) ,! 10 (∀E: P4) ¡

≤[**b**,**c**] & ≤[**c**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**)[**c**] ,! 11 (()E: 10) ¡

(**b** _ **c**)[**c**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

≤[**b**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**)[**c**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(≤[**b**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**)[**c**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀b∀c (≤[b,c] ⇒ (b _ c)[c]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

□

! **9.** ¡

⊢ ∀b∀c∀x (<[x,b] ⇒ ¬ (b _ c)[x]) ¡

b,**c**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

<[**x**,**b**] ,! 2 (Prem) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ,! 3 (Prem) ¡

((**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ≤[**b**,**x**]) ,! 4 (∀E: P5) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ≤[**b**,**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[**b**,**x**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

<[**x**,**b**] & ≤[**b**,**x**] ,! 7 (&I: 2,6) ¡

(<[**x**,**b**] & ≤[**b**,**x**] ⇒ 𝔉) ,! 8 (∀E: V4.19) ¡

<[**x**,**b**] & ≤[**b**,**x**] ⇒ 𝔉 ,! 9 (()E: 8) ¡

𝔉 ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ⇒ 𝔉 ,! 11 (⇒I: 3,10) ¡

¬ (**b** _ **c**)[**x**] ,! 12 (¬I: 11) ¡

<[**x**,**b**] ⇒ ¬ (**b** _ **c**)[**x**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(<[**x**,**b**] ⇒ ¬ (**b** _ **c**)[**x**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀b∀c∀x (<[x,b] ⇒ ¬ (b _ c)[x]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

□

! **10.** ¡

⊢ ∀b∀c∀x (<[c,x] ⇒ ¬ (b _ c)[x]) ¡

b,**c**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

<[**c**,**x**] ,! 2 (Prem) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ,! 3 (Prem) ¡

((**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ≤[**x**,**c**]) ,! 4 (∀E: P6) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ≤[**x**,**c**] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[**x**,**c**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

<[**c**,**x**] & ≤[**x**,**c**] ,! 7 (&I: 2,6) ¡

(<[**c**,**x**] & ≤[**x**,**c**] ⇒ ℑ) ,! 8 (∀E: V4.19) ¡

<[**c**,**x**] & ≤[**x**,**c**] ⇒ ℑ ,! 9 (()E: 8) ¡

ℑ ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ℑ ,! 11 (⇒I: 3,10) ¡

¬ (**b** _ **c**)[**x**] ,! 12 (¬I: 11) ¡

<[**c**,**x**] ⇒ ¬ (**b** _ **c**)[**x**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(<[**c**,**x**] ⇒ ¬ (**b** _ **c**)[**x**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀b∀c∀x (<[c,x] ⇒ ¬ (b _ c)[x]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **11.** ¡

⊦ ∀b∀c ¬ ((b+1) _ c)[b] ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

((**b**+1) _ **c**)[**b**] ,! 2 (Prem) ¡

! We need to show that ≤[(**b**+1),**b**]. P5 cannot be used, because one would need first to establish that ω[**b**]. But the 𝕋E rule cannot be applied upon line 2, since (**b**+1) does not appear in an argument place. Instead, we proceed as follows... ¡

{a : ≤[(**b**+1),a] & ≤[a,**c**]}[**b**] ,! 3 (𝔻E: P1,2) ¡

∀x ({a : ≤[(**b**+1),a] ∨ ≤[a,**c**]}[x] ⇔ ≤[(**b**+1),x] & ≤[x,**c**])
,! 4 (Pred) ¡

({a : ≤[(**b**+1),a] ∨ ≤[a,**c**]}[**b**] ⇔ ≤[(**b**+1),**b**] & ≤[**b**,**c**])
,! 5 (∀E: 4) ¡

{a : ≤[(**b**+1),a] ∨ ≤[a,**c**]}[**b**] ⇔ ≤[(**b**+1),**b**] & ≤[**b**,**c**]
,! 6 (()E: 5) ¡

{a : ≤[(**b**+1),a] ∨ ≤[a,**c**]}[**b**] ⇒ ≤[(**b**+1),**b**] & ≤[**b**,**c**] ,! 7 (⇔E: 6) ¡

≤[(**b**+1),**b**] & ≤[**b**,**c**] ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

≤[(**b**+1),**b**] ,! 9 (&E: 8) ¡

(≤[(**b**+1),**b**] ⇒ 1 = 0) ,! 10 (∀E: V3.44) ¡

≤[(**b**+1),**b**] ⇒ 1 = 0 ,! 11 (()E: 10) ¡

1 = 0 ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

ℑ ,! 13 (ℑI: IV9.6,12) ¡

((**b**+1) _ **c**)[**b**] ⇒ ℑ ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

¬ ((**b**+1) _ **c**)[**b**] ,! 15 (¬I: 14) ¡

∀b∀c ¬ ((b+1) _ c)[b] ! 16 (∀I: 1,15) ¡

□

! **12.** ¡

⊢ ∀b∀c ¬ (b _ c)[(c+1)] ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

(**b** _ **c**)[(**c**+1)] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**c**] & ω[1] ,! 3 (𝕋E: V1.7,2) ¡

ω[**c**] ,! 4 (&E: 3) ¡

(ω[**c**] ⇒ <[**c**,(**c**+1)]) ,! 5 (∀E: V4.26) ¡

ω[**c**] ⇒ <[**c**,(**c**+1)] ,! 6 (()E: 5) ¡

<[**c**,(**c**+1)] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(<[**c**,(**c**+1)] ⇒ ¬ (**b** _ **c**)[(**c**+1)]) ,! 8 (∀E: P10; (**c**+1): V1.7,3) ¡

<[**c**,(**c**+1)] ⇒ ¬ (**b** _ **c**)[(**c**+1)] ,! 9 (()E: 8) ¡

¬ (**b** _ **c**)[(**c**+1)] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

ℑ ,! 11 (ℑI: 2,10) ¡

(**b** _ **c**)[(**c**+1)] ⇒ ℑ ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

¬ (**b** _ **c**)[(**c**+1)] ,! 13 (¬I: 12) ¡

∀b∀c ¬ (b _ c)[(c+1)] ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **13.** ¡

⊢ ∀b∀c (¬ (b _ c) ≡ ϕ ⇒ ≤[b,c]) ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

(¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ∃x (**b** _ **c**)[x]) ,! 3 (∀E: II5.16) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ∃x (**b** _ **c**)[x] ,! 4 (()E: 3) ¡

∃x (**b** _ **c**)[x] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ,! 6 (∃E: 5) ¡

((**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ≤[**b**,**x**] & ≤[**x**,**c**]) ,! 7 (∀E: P3) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ≤[**b**,**x**] & ≤[**x**,**c**] ,! 8 (()E: 7) ¡

≤[**b**,**x**] & ≤[**x**,**c**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(≤[**b**,**x**] & ≤[**x**,**c**] ⇒ ≤[**b**,**c**]) ,! 10 (∀E: V3.20) ¡

≤[**b**,**x**] & ≤[**x**,**c**] ⇒ ≤[**b**,**c**] ,! 11 (()E: 10) ¡

≤[**b**,**c**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ≤[**b**,**c**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ≤[**b**,**c**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀b∀c (¬ (b _ c) ≡ ϕ ⇒ ≤[b,c]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **14.** ¡

⊢ ∀b∀c (≤[b,c] ⇒ ¬ (b _ c) ≡ ϕ) ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**b**,**c**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**b**,**c**] ⇒ ω[**c**]) ,! 3 (∀E V3.7) ¡

≤[**b**,**c**] ⇒ ω[**c**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**c**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[**c**] ⇒ ≤[**c**,**c**]) ,! 6 (∀E: V3.23) ¡

ω[**c**] ⇒ ≤[**c**,**c**] ,! 7 (()E: 6) ¡

≤[c,c] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

≤[b,c] & ≤[c,c] ,! 9 (Prem) ¡

(≤[b,c] & ≤[c,c] ⇒ (b _ c)[c]) ,! 10 (∀E: P4) ¡

≤[b,c] & ≤[c,c] ⇒ (b _ c)[c] ,! 11 (()E: 10) ¡

(b _ c)[c] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

∃x (b _ c)[x] ,! 13 (∃I: 12) ¡

(∃x (b _ c)[x] ⇒ ¬ (b _ c) ≡ ϕ) ,! 14 (∀E: II5.7) ¡

∃x (b _ c)[x] ⇒ ¬ (b _ c) ≡ ϕ ,! 15 (()E: 14) ¡

¬ (b _ c) ≡ ϕ ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

≤[b,c] ⇒ ¬ (b _ c) ≡ ϕ ,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

(≤[b,c] ⇒ ¬ (b _ c) ≡ ϕ) ,! 18 (()I: 17) ¡

∀b∀c (≤[b,c] ⇒ ¬ (b _ c) ≡ ϕ) ! 19 (∀I: 1,18) ¡

□

! **15.** ¡

⊦ ∀b∀c (¬ (b _ c) ≡ ϕ ⇔ ≤[b,c]) ¡

b,c ,! 1 (Prem) ¡

(¬ (b _ c) ≡ ϕ ⇒ ≤[b,c]) ,! 2 (∀E: P13) ¡

¬ (b _ c) ≡ ϕ ⇒ ≤[b,c] ,! 3 (()E: 2) ¡

(≤[b,c] ⇒ ¬ (b _ c) ≡ ϕ) ,! 4 (∀E: P14) ¡

≤[b,c] ⇒ ¬ (b _ c) ≡ ϕ ,! 5 (()E: 4) ¡

¬ (b _ c) ≡ ϕ ⇔ ≤[b,c] ,! 6 (⇔I: 3,5) ¡

(¬ (b _ c) ≡ ϕ ⇔ ≤[b,c]) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀b∀c (¬ (b _ c) ≡ ϕ ⇔ ≤[b,c]) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

□

! **16.** ¡

⊦ ∀b∀c (¬ ≤[b,c] ⇒ (b _ c) ≡ ϕ) ¡

b,c ,! 1 (Prem) ¡

¬ ≤[b,c] ,! 2 (Prem) ¡

¬(**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 3 (Prem) ¡

(¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ≤[**b**,**c**]) ,! 4 (∀E: P13) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ≤[**b**,**c**] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[**b**,**c**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

𝔉 ,! 7 (𝔉I: 2,6) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ 𝔉 ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 9 (¬I: 8) ¡

(**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 10 (¬E: 9) ¡

¬ ≤[**b**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(¬ ≤[**b**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**) ≡ ϕ) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀b∀c (¬ ≤[b,c] ⇒ (b _ c) ≡ ϕ) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **17.** ¡

⊢ ∀b∀c (<[c,b] ⇒ (b _ c) ≡ ϕ) ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

<[**c**,**b**] ,! 2 (Prem) ¡

(<[**c**,**b**] ⇒ ¬ ≤[**b**,**c**]) ,! 3 (∀E: V4.20) ¡

<[**c**,**b**] ⇒ ¬ ≤[**b**,**c**] ,! 4 (()E: 3) ¡

¬ ≤[**b**,**c**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(¬ ≤[**b**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**) ≡ ϕ) ,! 6 (∀E: P16) ¡

¬ ≤[**b**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 7 (()E: 6) ¡

(**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

<[**c**,**b**] ⇒ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(<[**c**,**b**] ⇒ (**b** _ **c**) ≡ ϕ) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀b∀c (<[c,b] ⇒ (b _ c) ≡ ϕ) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **18.** ¡

⊢ (1 _ 0) ≡ ϕ ¡

(<[0,1] ⇒ (1 _ 0) ≡ ϕ) ,! 1 (∀E: P17) ¡

<[0,1] ⇒ (1 _ 0) ≡ ϕ ,! 2 (()E: 1) ¡

(1 _ 0) ≡ ϕ ,! 3 (⇒E: V4.27) ¡

▯

! **19.** ¡

⊦ ∀b∀c (¬ (b _ c) ≡ ϕ ⇒ ω[b] & ω[c]) ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

(¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ≤[**b**,**c**]) ,! 3 (∀E: P13) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ≤[**b**,**c**] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[**b**,**c**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(≤[**b**,**c**] ⇒ ω[**b**] & ω[**c**]) ,! 6 (∀E: V3.5) ¡

≤[**b**,**c**] ⇒ ω[**b**] & ω[**c**] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[**b**] & ω[**c**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ω[**b**] & ω[**c**] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ω[**b**] & ω[**c**]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀b∀c (¬ (b _ c) ≡ ϕ ⇒ ω[b] & ω[c]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **20.** ¡

⊦ ∀b∀c (¬ ω[b] ⇒ (b _ c) ≡ ϕ) ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

¬ ω[**b**] ,! 2 (Prem) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 3 (Prem) ¡

(¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ω[**b**] & ω[**c**]) ,! 4 (∀E: P19) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ω[**b**] & ω[**c**] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[**b**] & ω[**c**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**b**] ,! 7 (&E: 6) ¡

ℑ ,! 8 (ℑI: 2,7) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ℑ ,! 9 (⇒I: 3,8) ¡

¬¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 10 (¬I: 9) ¡

(**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 11 (¬E: 10) ¡

¬ ω[**b**] ⇒ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(¬ ω[**b**] ⇒ (**b** _ **c**) ≡ ϕ) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀b∀c (¬ ω[b] ⇒ (b _ c) ≡ ϕ) ,! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **21.** ¡

⊢ ∀b∀c (¬ ω[c] ⇒ (b _ c) ≡ ϕ) ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

¬ ω[**c**] ,! 2 (Prem) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 3 (Prem) ¡

(¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ω[**b**] & ω[**c**]) ,! 4 (∀E: P19) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ω[**b**] & ω[**c**] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[**b**] & ω[**c**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**c**] ,! 7 (&E: 6) ¡

ℑ ,! 8 (ℑI: 2,7) ¡

¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ ℑ ,! 9 (⇒I: 3,8) ¡

¬¬ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 10 (¬I: 9) ¡

(**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 11 (¬E: 10) ¡

¬ ω[**c**] ⇒ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(¬ ω[**c**] ⇒ (**b** _ **c**) ≡ ϕ) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀b∀c (¬ ω[c] ⇒ (b _ c) ≡ ϕ) ,! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **22.** ¡

⊢ ∀b∀c∀x ((b _ c)[x] ⇒ ω[x]) ¡

b,**c**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

((**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ≤[**b**,**x**]) ,! 3 (∀E: P5) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ≤[**b**,**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[**b**,**x**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(≤[**b**,**x**] ⇒ ω[**x**]) ,! 6 (∀E: V3.7) ¡

≤[**b**,**x**] ⇒ ω[**x**] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[**x**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ω[**x**] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((**b** _ **c**)[**x**] ⇒ ω[**x**]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀b∀c∀x ((b _ c)[x] ⇒ ω[x]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **23.** ¡

⊢ ∀b∀c (b _ c) ⊆ ω ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

∀x ((**b** _ **c**)[x] ⇒ ω[x]) ,! 2 (∀E: P22) ¡

(**b** _ **c**) ⊆ ω ,! 3 (𝕊I: II1.1,2) ¡

∀b∀c (b _ c) ⊆ ω ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **24.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d (≤[c,a] & ≤[b,d] ⇒ (a _ b) ⊆ (c _ d)) ¡

a,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**c**,**a**] & ≤[**b**,**d**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**c**,**a**] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[**b**,**d**] ,! 4 (&E: 2) ¡

x ,! 5 (Prem) ¡

(**a** _ **b**)[**x**] ,! 6 (Prem) ¡

((**a** _ **b**)[**x**] ⇒ ≤[**a**,**x**] & ≤[**x**,**b**]) ,! 7 (∀E: P3) ¡

(**a** _ **b**)[**x**] ⇒ ≤[**a**,**x**] & ≤[**x**,**b**] ,! 8 (()E: 7) ¡

≤[**a**,**x**] & ≤[**x**,**b**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

≤[a,x] ,! 10 (&E: 9) ¡

≤[x,b] ,! 11 (&E: 9) ¡

≤[c,a] & ≤[a,x] ,! 12 (&I: 3,10) ¡

(≤[c,a] & ≤[a,x] ⇒ ≤[c,x]) ,! 13 (∀E: V3.20) ¡

≤[c,a] & ≤[a,x] ⇒ ≤[c,x] ,! 14 (()E: 13) ¡

≤[c,x] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

≤[x,b] & ≤[b,d] ,! 16 (&I: 4,11) ¡

(≤[x,b] & ≤[b,d] ⇒ ≤[x,d]) ,! 17 (∀E: V3.20) ¡

≤[x,b] & ≤[b,d] ⇒ ≤[x,d] ,! 18 (()E: 17) ¡

≤[x,d] ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

≤[c,x] & ≤[x,d] ,! 20 (&I: 15,19) ¡

(≤[c,x] & ≤[x,d] ⇒ (c _ d)[x]) ,! 21 (∀E: P4) ¡

≤[c,x] & ≤[x,d] ⇒ (c _ d)[x] ,! 22 (()E: 21) ¡

(c _ d)[x] ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

(a _ b)[x] ⇒ (c _ d)[x] ,! 24 (⇒I: 6,23) ¡

((a _ b)[x] ⇒ (c _ d)[x]) ,! 25 (()I: 24) ¡

∀x ((a _ b)[x] ⇒ (c _ d)[x]) ,! 26 (∀I: 5,25) ¡

(a _ b) ⊆ (c _ d) ,! 27 (𝕊I: II1.1,26) ¡

≤[c,a] & ≤[b,d] ⇒ (a _ b) ⊆ (c _ d) ,! 28 (⇒I: 2,27) ¡

(≤[c,a] & ≤[b,d] ⇒ (a _ b) ⊆ (c _ d)) ,! 29 (()I: 28) ¡

∀a∀b∀c∀d (≤[c,a] & ≤[b,d] ⇒ (a _ b) ⊆ (c _ d)) ! 30 (∀I: 1,29) ¡

□

! **25.** ¡

⊦ ∀a∀b∀c(≤[b,c] ⇒ (a _ b) ⊆ (a _ c)) ¡

a,b,c ,! 1 (Prem) ¡

≤[b,c] ,! 2 (Prem) ¡

((**a** _ **b**) ≡ ϕ ∨ ¬ (**a** _ **b**) ≡ ϕ) ,! 3 (∀E: II1.48) ¡

(**a** _ **b**) ≡ ϕ ∨ ¬ (**a** _ **b**) ≡ ϕ ,! 4 (()E: 3) ¡

((**a** _ **b**) ≡ ϕ ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**a** _ **c**)) ,! 5 (∀E: II5.8) ¡

(**a** _ **b**) ≡ ϕ ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**a** _ **c**) ,! 6 (()E: 5) ¡

¬ (**a** _ **b**) ≡ ϕ ,! 7 (Prem) ¡

(¬ (**a** _ **b**) ≡ ϕ ⇒ ω[**a**] & ω[**b**]) ,! 8 (∀E: P19) ¡

¬ (**a** _ **b**) ≡ ϕ ⇒ ω[**a**] & ω[**b**] ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

ω[**a**] ,! 11 (&E: 10) ¡

(ω[**a**] ⇒ ≤[**a**,**a**]) ,! 12 (∀E: V3.23) ¡

ω[**a**] ⇒ ≤[**a**,**a**] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[**a**,**a**] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

≤[**a**,**a**] & ≤[**b**,**c**] ,! 15 (&I: 2,14) ¡

(≤[**a**,**a**] & ≤[**b**,**c**] ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**a** _ **c**))
,! 16 (∀E: P24) ¡

≤[**a**,**a**] & ≤[**b**,**c**] ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**a** _ **c**)
,! 17 (()E: 16) ¡

(**a** _ **b**) ⊆ (**a** _ **c**) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

¬ (**a** _ **b**) ≡ ϕ ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**a** _ **c**) ,! 19 (⇒I: 7,18) ¡

(**a** _ **b**) ⊆ (**a** _ **c**) ,! 20 (∨E: 4,6,19) ¡

≤[**b**,**c**] ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**a** _ **c**) ,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(≤[**b**,**c**] ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**a** _ **c**)) ,! 22 (()I: 21) ¡

∀a∀b∀c (≤[b,c] ⇒ (a _ b) ⊆ (a _ c)) ! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! **26.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c (≤[c,a] ⇒ (a _ b) ⊆ (c _ b)) ¡

a,**b**,**c** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**c**,**a**] ,! 2 (Prem) ¡

((**a** _ **b**) ≡ ϕ ∨ ¬ (**a** _ **b**) ≡ ϕ) ,! 3 (∀E: II1.48) ¡

(**a** _ **b**) ≡ ϕ ∨ ¬ (**a** _ **b**) ≡ ϕ ,! 4 (()E: 3) ¡

((**a** _ **b**) ≡ ϕ ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**c** _ **b**)) ,! 5 (∀E: II5.8) ¡

(**a** _ **b**) ≡ ϕ ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**c** _ **b**) ,! 6 (()E: 5) ¡

¬ (**a** _ **b**) ≡ ϕ ,! 7 (Prem) ¡

(¬ (**a** _ **b**) ≡ ϕ ⇒ ω[**a**] & ω[**b**]) ,! 8 (∀E: P19) ¡

¬ (**a** _ **b**) ≡ ϕ ⇒ ω[**a**] & ω[**b**] ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

ω[**b**] ,! 11 (&E: 10) ¡

(ω[**b**] ⇒ ≤[**b**,**b**]) ,! 12 (∀E: V3.23) ¡

ω[**b**] ⇒ ≤[**b**,**b**] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[**b**,**b**] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

≤[**c**,**a**] & ≤[**b**,**b**] ,! 15 (&I: 2,14) ¡

(≤[**c**,**a**] & ≤[**b**,**b**] ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**c** _ **b**))
,! 16 (∀E: P24) ¡

≤[**c**,**a**] & ≤[**b**,**b**] ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**c** _ **b**)
,! 17 (()E: 16) ¡

(**a** _ **b**) ⊆ (**c** _ **b**) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

¬ (**a** _ **b**) ≡ ϕ ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**c** _ **b**) ,! 19 (⇒I: 7,18) ¡

(**a** _ **b**) ⊆ (**c** _ **b**) ,! 20 (∨E: 4,6,19) ¡

≤[**c**,**a**] ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**c** _ **b**) ,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(≤[**c**,**a**] ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ (**c** _ **b**)) ,! 22 (()I: 21) ¡

∀a∀b∀c (≤[c,a] ⇒ (a _ b) ⊆ (c _ b)) ! 23 (∀I: 22) ¡

▯

! P27 and P28 are opposite halves of P29, which they serve to prove. ¡

! **27.** ¡

⊦ ∀a∀b∀c (≤[a,(c+1)] & ≤[c,b]
⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ⊆ (a _ b)) ¡

a,**b**,**c** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**a**,(**c**+1)] & ≤[**c**,**b**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[a,(c+1)] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[c,b] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[c,b] ⇒ (a _ c) ⊆ (a _ b)) ,! 5 (∀E: P25) ¡

≤[c,b] ⇒ (a _ c) ⊆ (a _ b) ,! 6 (()E: 5) ¡

(a _ c) ⊆ (a _ b) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

ω[c] & ω[1] ,! 8 (𝕋E: V1.7,3) ¡

(≤[a,(c+1)] ⇒ ((c+1) _ b) ⊆ (a _ b))
,! 9 (∀E: P26;
(c+1): V1.7,8) ¡

≤[a,(c+1)] ⇒ ((c+1) _ b) ⊆ (a _ b) ,! 10 (()E: 9) ¡

((c+1) _ b) ⊆ (a _ b) ,! 11 (⇒E: 3,10) ¡

(a _ c) ⊆ (a _ b) & ((c+1) _ b) ⊆ (a _ b)
,! 12 (&I: 7,11) ¡

((a _ c) ⊆ (a _ b) & ((c+1) _ b) ⊆ (a _ b)
⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ⊆ (a _ b))
,! 13 (∀E: II2.14) ¡

(a _ c) ⊆ (a _ b) & ((c+1) _ b) ⊆ (a _ b)
⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ⊆ (a _ b)
,! 14 (()E: 13) ¡

((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ⊆ (a _ b) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

≤[a,(c+1)] & ≤[c,b] ⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ⊆ (a _ b)
,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(≤[a,(c+1)] & ≤[c,b] ⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ⊆ (a _ b))
,! 17 (()I: 16) ¡

∀a∀b∀c (≤[a,(c+1)] & ≤[c,b]
⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ⊆ (a _ b))
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **28.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c (ω[c] ⇒ (a _ b) ⊆ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b))) ¡

a,b,c ,! 1 (Prem) ¡

ω[c] ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

(a _ b)[x]	,! 4 (Prem)	¡
((a _ b)[x] ⇒ ≤[a,x] & ≤[x,b])	,! 5 (∀E: P3)	¡
(a _ b)[x] ⇒ ≤[a,x] & ≤[x,b]	,! 6 (()E: 5)	¡
≤[a,x] & ≤[x,b]	,! 7 (⇒E: 4,6)	¡
≤[a,x]	,! 8 (&E: 7)	¡
≤[x,b]	,! 9 (&E: 7)	¡
(≤[a,x] ⇒ ω[x])	,! 10 (∀E: V3.7)	¡
≤[a,x] ⇒ ω[x]	,! 11 (()E: 10)	¡
ω[x]	,! 12 (⇒E: 8,11)	¡
ω[x] & ω[c]	,! 13 (&E: 2,12)	¡
(ω[x] & ω[c] ⇒ ≤[x,c] ∨ ≤[(c+1),x])	,! 14 (∀E: V3.65)	¡
ω[x] & ω[c] ⇒ ≤[x,c] ∨ ≤[(c+1),x]	,! 15 (()E: 14)	¡
≤[x,c] ∨ ≤[(c+1),x]	,! 16 (⇒E: 13,15)	¡
≤[x,c]	,! 17 (Prem)	¡
≤[a,x] & ≤[x,c]	,! 18 (&I: 8,17)	¡
(≤[a,x] & ≤[x,c] ⇒ (a _ c)[x])	,! 19 (∀E: P4)	¡
≤[a,x] & ≤[x,c] ⇒ (a _ c)[x]	,! 20 (()E: 19)	¡
(a _ c)[x]	,! 21 (⇒E: 18,20)	¡
(a _ c)[x] ∨ ((c+1) _ b)[x]	,! 22 (∨I: 21)	¡
≤[x,c] ⇒ (a _ c)[x] ∨ ((c+1) _ b)[x]	,! 23 (⇒I: 17,22)	¡
≤[(c+1),x]	,! 24 (Prem)	¡
≤[(c+1),x] & ≤[x,b]	,! 25 (&I: 24)	¡
ω[c] & ω[1]	,! 26 (𝕋E: V1.7,24)	¡
(≤[(c+1),x] & ≤[x,b] ⇒ ((c+1) _ b)[x])	,! 27 (∀E: P4; (c+1): V1.7,26)	¡
≤[(c+1),x] & ≤[x,b] ⇒ ((c+1) _ b)[x]		

,! 28 (()E: 27) ¡

((**c**+1) _ **b**)[**x**] ,! 29 (⇒E: 25,28) ¡

(**a** _ **c**)[**x**] ∨ ((**c**+1) _ **b**)[**x**] ,! 30 (∨I: 29) ¡

≤[(**c**+1),**x**] ⇒ (**a** _ **c**)[**x**] ∨ ((**c**+1) _ **b**)[**x**]
,! 31 (⇒I: 24,30) ¡

(**a** _ **c**)[**x**] ∨ ((**c**+1) _ **b**)[**x**] ,! 32 (∨E: 16,23,31)
¡

((**a** _ **c**)[**x**] ∨ ((**c**+1) _ **b**)[**x**]
⇒ ((**a** _ **c**) ∪ ((**c**+1) _ **b**))[**x**])
,! 33 (∀E: II2.4) ¡

(**a** _ **c**)[**x**] ∨ ((**c**+1) _ **b**)[**x**] ⇒ ((**a** _ **c**) ∪ ((**c**+1) _ **b**))[**x**]
,! 34 (()E: 33) ¡

((**a** _ **c**) ∪ ((**c**+1) _ **b**))[**x**] ,! 35 (⇒E: 32,34) ¡

(**a** _ **b**)[**x**] ⇒ ((**a** _ **c**) ∪ ((**c**+1) _ **b**))[**x**]
,! 36 (⇒I: 4,35) ¡

((**a** _ **b**)[**x**] ⇒ ((**a** _ **c**) ∪ ((**c**+1) _ **b**))[**x**])
,! 37 (()I: 36) ¡

∀x ((**a** _ **b**)[x] ⇒ ((**a** _ **c**) ∪ ((**c**+1) _ **b**))[x])
,! 38 (∀I: 3,37) ¡

(**a** _ **b**) ⊆ ((**a** _ **c**) ∪ ((**c**+1) _ **b**)) ,! 39 ($I: II1.1,38)
¡

ω[**c**] ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ ((**a** _ **c**) ∪ ((**c**+1) _ **b**))
,! 40 (⇒I: 2,39) ¡

(ω[**c**] ⇒ (**a** _ **b**) ⊆ ((**a** _ **c**) ∪ ((**c**+1) _ **b**)))
,! 41 (()I: 40) ¡

∀a∀b∀c (ω[c] ⇒ (a _ b) ⊆ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)))
! 42 (∀I: 1,41) ¡

▯

! **29.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c (≤[a,(c+1)] & ≤[c,b]
⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b)) ¡

a,**b**,**c** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**a**,(**c**+1)] & ≤[**c**,**b**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**a**,(**c**+1)] & ≤[**c**,**b**] ⇒ ((**a** _ **c**) ∪ ((**c**+1) _ **b**)) ⊆ (**a** _ **b**))

,! 3 (∀E: P27) ¡

≤[a,(c+1)] & ≤[c,b] ⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ⊆ (a _ b)
,! 4 (()E: 3) ¡

((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ⊆ (a _ b) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[a,(c+1)] ,! 6 (&E: 2) ¡

ω[c] & ω[1] ,! 7 (𝕋E: V1.7,6) ¡

ω[c] ,! 8 (&E: 7) ¡

(ω[c] ⇒ (a _ b) ⊆ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)))
,! 9 (∀E: P28) ¡

ω[c] ⇒ (a _ b) ⊆ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b))
,! 10 (()E: 9) ¡

(a _ b) ⊆ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ⊆ (a _ b)
& (a _ b) ⊆ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b))
,! 12 (&I: 5,11) ¡

(((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ⊆ (a _ b)
& (a _ b) ⊆ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b))
⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b))
,! 13 (∀E: II1.8) ¡

((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ⊆ (a _ b)
& (a _ b) ⊆ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b))
⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b)
,! 14 (()E: 13) ¡

((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

≤[a,(c+1)] & ≤[c,b] ⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b)
,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(≤[a,(c+1)] & ≤[c,b] ⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b))
,! 17 (()I: 16) ¡

∀a∀b∀c (≤[a,(c+1)] & ≤[c,b]
⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b))
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **30.** The finite interval (b _ b) is equivalent to the singleton (b•), when b is a finite number. ¡

⊢ ∀b (ω[b] ⇒ (b _ b) ≡ (b•)) ¡

b ,! 1 (Prem) ¡

ω[b] ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

((b _ b)[x] ⇔ ≤[b,x] & ≤[x,b]) ,! 4 (∀E: P2) ¡

(b _ b)[x] ⇔ ≤[b,x] & ≤[x,b] ,! 5 (()E: 4) ¡

((b•)[x] ⇔ x = b) ,! 6 (∀E: II8.2) ¡

(b•)[x] ⇔ x = b ,! 7 (()E: 6) ¡

(b _ b)[x] ,! 8 (Prem) ¡

(b _ b)[x] ⇒ ≤[b,x] & ≤[x,b] ,! 9 (⇔E: 5) ¡

≤[b,x] & ≤[x,b] ,! 10 (⇒E: 8,9) ¡

≤[b,x] ,! 11 (&E: 10) ¡

≤[x,b] ,! 12 (&E: 11) ¡

≤[x,b] & ≤[b,x] ,! 13 (&I: 11,12) ¡

(≤[x,b] & ≤[b,x] ⇒ x = b) ,! 14 (∀E: V3.22) ¡

≤[x,b] & ≤[b,x] ⇒ x = b ,! 15 (()E: 14) ¡

x = b ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

x = b ⇒ (b•)[x] ,! 17 (⇔E: 7) ¡

(b•)[x] ,! 18 (⇒E: 16,17) ¡

(b _ b)[x] ⇒ (b•)[x] ,! 19 (⇒I: 8,18) ¡

(b•)[x] ,! 20 (Prem) ¡

(b•)[x] ⇒ x = b ,! 21 (⇔E: 7) ¡

x = b ,! 22 (⇒E: 20,21) ¡

(ω[b] ⇒ ≤[b,b]) ,! 23 (∀E: V3.23) ¡

ω[b] ⇒ ≤[b,b] ,! 24 (()E: 23) ¡

≤[b,b] ,! 25 (⇒E: 2,24) ¡

(≤[b,b] ⇒ (b _ b)[b]) ,! 26 (∀E: P7) ¡

≤[b,b] ⇒ (b _ b)[b] ,! 27 (()E: 26) ¡

(**b** _ **b**)[**b**] ,! 28 (⇒E: 25,27) ¡

(**b** _ **b**)[**x**] ,! 29 (=E: 22,28) ¡

(**b**•)[**x**] ⇒ (**b** _ **b**)[**x**] ,! 30 (⇒I: 20,29) ¡

(**b** _ **b**)[**x**] ⇔ (**b**•)[**x**] ,! 31 (⇔I: 19,30) ¡

((**b** _ **b**)[**x**] ⇔ (**b**•)[**x**]) ,! 32 (()I: 31) ¡

∀x ((**b** _ **b**)[x] ⇔ (**b**•)[x]) ,! 33 (∀I: 3,32) ¡

(**b** _ **b**) ≡ (**b**•) ,! 34 (𝕊I: II1.7,33) ¡

ω[**b**] ⇒ (**b** _ **b**) ≡ (**b**•) ,! 35 (⇒I: 2,34) ¡

(ω[**b**] ⇒ (**b** _ **b**) ≡ (**b**•)) ,! 36 (()I: 35) ¡

∀b (ω[b] ⇒ (b _ b) ≡ (b•)) ! 37 (∀I: 1,36) ¡

▯

! **31.** Corollary of P30. ¡

⊢ (1 _ 1) ≡ (1•) ¡

(ω[1] ⇒ (1 _ 1) ≡ (1•)) ,! 1 (∀E: P30) ¡

ω[1] ⇒ (1 _ 1) ≡ (1•) ,! 2 (()E: 1) ¡

(1 _ 1) ≡ (1•) ,! 3 (⇒E: IV9.2,2) ¡

▯

! **32.** ¡

⊢ ∀b∀c (≤[b,c] ⇒ (((b+1) _ c) ∪ (b•)) ≡ (b _ c)) ¡

b,**c** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**b**,**c**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**b**,**c**] ⇒ ω[**b**]) ,! 3 (∀E: V3.6) ¡

≤[**b**,**c**] ⇒ ω[**b**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**b**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[**b**] ⇒ ≤[**b**,(**b**+1)]) ,! 6 (∀E: V3.35) ¡

ω[**b**] ⇒ ≤[**b**,(**b**+1)] ,! 7 (()E: 6) ¡

≤[**b**,(**b**+1)] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

≤[b,(b+1)] & ≤[b,c] ,! 9 (&I: 2,8) ¡

(≤[b,(b+1)] & ≤[b,c]
⇒ ((b _ b) ∪ ((b+1) _ c)) ≡ (b _ c))
,! 10 (∀E: P27) ¡

≤[b,(b+1)] & ≤[b,c] ⇒ ((b _ b) ∪ ((b+1) _ c)) ≡ (b _ c)
,! 11 (()E: 10) ¡

((b _ b) ∪ ((b+1) _ c)) ≡ (b _ c) ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(ω[b] ⇒ (b _ b) ≡ (b•)) ,! 13 (∀E: P30) ¡

ω[b] ⇒ (b _ b) ≡ (b•) ,! 14 (()E: 13) ¡

(b _ b) ≡ (b•) ,! 15 (⇒E: 5,14) ¡

(b _ b) ≡ (b•) & ((b _ b) ∪ ((b+1) _ c)) ≡ (b _ c)
,! 16 (&I: 12,15) ¡

((b _ b) ≡ (b•) & ((b _ b) ∪ ((b+1) _ c)) ≡ (b _ c)
⇒ ((b•) ∪ ((b+1) _ c)) ≡ (b _ c))
,! 17 (∀E: II2.44) ¡

(b _ b) ≡ (b•) & ((b _ b) ∪ ((b+1) _ c)) ≡ (b _ c)
⇒ ((b•) ∪ ((b+1) _ c)) ≡ (b _ c)
,! 18 (()E: 17) ¡

((b•) ∪ ((b+1) _ c)) ≡ (b _ c) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

(((b•) ∪ ((b+1) _ c)) ≡ (b _ c)
⇒ (((b+1) _ c) ∪ (b•)) ≡ (b _ c))
,! 20 (∀E: II2.19) ¡

((b•) ∪ ((b+1) _ c)) ≡ (b _ c)
⇒ (((b+1) _ c) ∪ (b•)) ≡ (b _ c)
,! 21 (()E: 20) ¡

(((b+1) _ c) ∪ (b•)) ≡ (b _ c) ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

≤[b,c] ⇒ (((b+1) _ c) ∪ (b•)) ≡ (b _ c)
,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

(≤[b,c] ⇒ (((b+1) _ c) ∪ (b•)) ≡ (b _ c))
,! 24 (()I: 23) ¡

∀b∀c (≤[b,c] ⇒ (((b+1) _ c) ∪ (b•)) ≡ (b _ c))
! 25 (∀I: 1,24) ¡

□

! **33.** ¡

⊦ ∀b∀c (≤[b,(c+1)] ⇒ ((b _ c) ∪ ((c+1)•)) ≡ (b _ (c+1))) ¡

b,c ,! 1 (Prem) ¡

≤[b,(c+1)] ,! 2 (Prem) ¡

ω[c] & ω[1] ,! 3 (𝕋E: V1.7,2) ¡

(ω[c] & ω[1] ⇒ ≤[c,(c+1)]) ,! 4 (∀E: V3.33) ¡

ω[c] & ω[1] ⇒ ≤[c,(c+1)] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[c,(c+1)] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[b,(c+1)] & ≤[c,(c+1)] ,! 7 (&I: 2,6) ¡

(≤[b,(c+1)] & ≤[c,(c+1)]
⇒ ((b _ c) ∪ ((c+1) _ (c+1))) ≡ (b _ (c+1)))
,! 8 (∀E: P29;
(c+1): V1.7,3) ¡

≤[b,(c+1)] & ≤[c,(c+1)]
⇒ ((b _ c) ∪ ((c+1) _ (c+1))) ≡ (b _ (c+1))
,! 9 (()E: 8) ¡

((b _ c) ∪ ((c+1) _ (c+1))) ≡ (b _ (c+1))
,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(ω[c] & ω[1] ⇒ ω[(c+1)]) ,! 11 (∀E: V1.8) ¡

ω[c] & ω[1] ⇒ ω[(c+1)] ,! 12 (()E: 11) ¡

ω[(c+1)] ,! 13 (⇒E: 3,12) ¡

(ω[(c+1)] ⇒ ((c+1) _ (c+1)) ≡ ((c+1)•))
,! 14 (∀E: P30;
(c+1): V1.7,3) ¡

ω[(c+1)] ⇒ ((c+1) _ (c+1)) ≡ ((c+1)•)
,! 15 (()E: 14) ¡

((c+1) _ (c+1)) ≡ ((c+1)•) ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

((c+1) _ (c+1)) ≡ ((c+1)•)
& ((b _ c) ∪ ((c+1) _ (c+1))) ≡ (b _ (c+1))
,! 17 (&I: 10,16) ¡

(((c+1) _ (c+1)) ≡ ((c+1)•)
& ((b _ c) ∪ ((c+1) _ (c+1))) ≡ (b _ (c+1))
⇒ ((b _ c) ∪ ((c+1)•)) ≡ (b _ (c+1)))
,! 18 (∀E: II2.46) ¡

((c+1) _ (c+1)) ≡ ((c+1)•)

& ((b _ c) ∪ ((c+1) _ (c+1))) ≡ (b _ (c+1))
⇒ ((b _ c) ∪ ((c+1)•)) ≡ (b _ (c+1))
,! 19 (()E: 18) ¡

((b _ c) ∪ ((c+1)•)) ≡ (b _ (c+1)) ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

≤[b,(c+1)] ⇒ ((b _ c) ∪ ((c+1)•)) ≡ (b _ (c+1))
,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(≤[b,(c+1)] ⇒ ((b _ c) ∪ ((c+1)•)) ≡ (b _ (c+1)))
,! 22 (()I: 21) ¡

∀b∀c (≤[b,(c+1)] ⇒ ((b _ c) ∪ ((c+1)•)) ≡ (b _ (c+1)))
! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! **34.** ¡

⊢ ∀b∀c (ω[b] ⇒ ((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•))) ¡

b,c ,! 1 (Prem) ¡

ω[b] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[b,c] ∨ ¬ ≤[b,c]) ,! 3 (∀E: I3.18) ¡

≤[b,c] ∨ ¬ ≤[b,c] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[b,c] ,! 5 (Prem) ¡

(≤[b,c] ⇒ (((b+1) _ c) ∪ (b•)) ≡ (b _ c))
,! 6 (∀E: P32) ¡

≤[b,c] ⇒ (((b+1) _ c) ∪ (b•)) ≡ (b _ c)
,! 7 (()E: 6) ¡

(((b+1) _ c) ∪ (b•)) ≡ (b _ c) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

((((b+1) _ c) ∪ (b•)) ≡ (b _ c)
⇒ (b _ c) ≡ (((b+1) _ c) ∪ (b•)))
,! 9 (∀E: II1.10) ¡

(((b+1) _ c) ∪ (b•)) ≡ (b _ c)
⇒ (b _ c) ≡ (((b+1) _ c) ∪ (b•))
,! 10 (()E: 9) ¡

(b _ c) ≡ (((b+1) _ c) ∪ (b•)) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

¬ ((b+1) _ c)[b] ,! 12 (∀E: P11) ¡

(b _ c) ≡ (((b+1) _ c) ∪ (b•)) & ¬ ((b+1) _ c)[b]
,! 13 (&I: 11,12) ¡

((b _ c) ≡ (((b+1) _ c) ∪ (b•)) & ¬ ((b+1) _ c)[b]
⇒ ((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•)))
,! 14 (∀E: II8.61) ¡

(b _ c) ≡ (((b+1) _ c) ∪ (b•)) & ¬ ((b+1) _ c)[b]
⇒ ((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•))
,! 15 (()E: 14) ¡

((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•)) ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

≤[b,c] ⇒ ((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•))
,! 17 (⇒I: 5,16) ¡

¬ ≤[b,c] ,! 18 (Prem) ¡

(¬ ≤[b,c] ⇒ (b _ c) ≡ ϕ) ,! 19 (∀E: P16) ¡

¬ ≤[b,c] ⇒ (b _ c) ≡ ϕ ,! 20 (()E: 19) ¡

(b _ c) ≡ ϕ ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

((b _ c) ≡ ϕ ⇒ ((b _ c) \ (b•)) ≡ ϕ)
,! 22 (∀E: II7.52) ¡

(b _ c) ≡ ϕ ⇒ ((b _ c) \ (b•)) ≡ ϕ
,! 23 (()E: 22) ¡

((b _ c) \ (b•)) ≡ ϕ ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

(ω[b] ⇒ ≤[b,(b+1)]) ,! 25 (∀E: V3.35) ¡

ω[b] ⇒ ≤[b,(b+1)] ,! 26 (()E: 25) ¡

≤[b,(b+1)] ,! 27 (⇒E: 2,26) ¡

ω[b] & ω[1] ,! 28 (&I: IV9.2,2) ¡

(≤[b,(b+1)] ⇒ ((b+1) _ c) ⊆ (b _ c))
,! 29 (∀E: P26;
(b+1): V1.7,28) ¡

≤[b,(b+1)] ⇒ ((b+1) _ c) ⊆ (b _ c)
,! 30 (()E: 29) ¡

((b+1) _ c) ⊆ (b _ c) ,! 31 (⇒E: 27,30) ¡

(b _ c) ≡ ϕ & ((b+1) _ c) ⊆ (b _ c)
,! 32 (&I: 21,31) ¡

((b _ c) ≡ ϕ & ((b+1) _ c) ⊆ (b _ c)
⇒ ((b+1) _ c) ≡ ϕ)
,! 33 (∀E: II5.11) ¡

(b _ c) ≡ ϕ & ((b+1) _ c) ⊆ (b _ c) ⇒ ((b+1) _ c) ≡ ϕ
,! 34 (()E: 33) ¡

((b+1) _ c) ≡ ϕ ,! 35 (⇒E: 32,34) ¡

((b+1) _ c) ≡ ϕ & ((b _ c) \ (b•)) ≡ ϕ
,! 36 (&I: 24,35) ¡

(((b+1) _ c) ≡ ϕ & ((b _ c) \ (b•)) ≡ ϕ
⇒ ((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•)))
,! 37 (∀E: II1.17) ¡

((b+1) _ c) ≡ ϕ & ((b _ c) \ (b•)) ≡ ϕ
⇒ ((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•))
,! 38 (()E: 36) ¡

((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•)) ,! 39 (⇒E: 36,38) ¡

¬ ≤[b,c] ⇒ ((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•))
,! 40 (⇒I: 18,39) ¡

((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•)) ,! 41 (∨E: 4,17,40) ¡

ω[b] ⇒ ((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•))
,! 42 (⇒I: 2,41) ¡

(ω[b] ⇒ ((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•)))
,! 43 (()I: 42) ¡

∀b∀c (ω[b] ⇒ ((b+1) _ c) ≡ ((b _ c) \ (b•)))
! 44 (∀I: 1,43) ¡

▯

! **35.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d (<[b,c] ⇒ ((a _ b) ∩ (c _ d)) ≡ ϕ) ¡

a,b,c,d ,! 1 (Prem) ¡

<[b,c] ,! 2 (Prem) ¡

(∀x ((a _ b)[x] & (c _ d)[x] ⇒ ℱ)
⇒ ((a _ b) ∩ (c _ d)) ≡ ϕ)
,! 3 (∀E: II5.27) ¡

∀x ((a _ b)[x] & (c _ d)[x] ⇒ ℱ)
⇒ ((a _ b) ∩ (c _ d)) ≡ ϕ
,! 4 (()E: 3) ¡

x ,! 5 (Prem) ¡

(a _ b)[x] & (c _ d)[x] ,! 6 (Prem) ¡

(**a** _ **b**)[**x**] ,! 7 (&E: 6) ¡

(**c** _ **d**)[**x**] ,! 8 (&E: 6) ¡

((**a** _ **b**)[**x**] ⇒ ≤[**x**,**b**]) ,! 9 (∀E: P6) ¡

(**a** _ **b**)[**x**] ⇒ ≤[**x**,**b**] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[**x**,**b**] ,! 11 (⇒E: 7,10) ¡

((**c** _ **d**)[**x**] ⇒ ≤[**c**,**x**]) ,! 12 (∀E: P5) ¡

(**c** _ **d**)[**x**] ⇒ ≤[**c**,**x**] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[**c**,**x**] ,! 14 (⇒E: 8,13) ¡

≤[**c**,**x**] & ≤[**x**,**b**] ,! 15 (&I: 11,14) ¡

(≤[**c**,**x**] & ≤[**x**,**b**] ⇒ ≤[**c**,**b**]) ,! 16 (∀E: V3.20) ¡

≤[**c**,**x**] & ≤[**x**,**b**] ⇒ ≤[**c**,**b**] ,! 17 (()E: 16) ¡

≤[**c**,**b**] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

<[**b**,**c**] & ≤[**c**,**b**] ,! 19 (&E: 2,18) ¡

(<[**b**,**c**] & ≤[**c**,**b**] ⇒ 𝔉) ,! 20 (∀E: V4.19) ¡

<[**b**,**c**] & ≤[**c**,**b**] ⇒ 𝔉 ,! 21 (()E: 20) ¡

𝔉 ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

(**a** _ **b**)[**x**] & (**c** _ **d**)[**x**] ⇒ 𝔉 ,! 23 (⇒I: 6,22) ¡

((**a** _ **b**)[**x**] & (**c** _ **d**)[**x**] ⇒ 𝔉) ,! 24 (()I: 23) ¡

∀x ((**a** _ **b**)[x] & (**c** _ **d**)[x] ⇒ 𝔉) ,! 25 (∀I: 5,24) ¡

((**a** _ **b**) ∩ (**c** _ **d**)) ≡ ϕ ,! 26 (⇒E: 3,25) ¡

<[**b**,**c**] ⇒ ((**a** _ **b**) ∩ (**c** _ **d**)) ≡ ϕ ,! 27 (⇒I: 2,26) ¡

(<[**b**,**c**] ⇒ ((**a** _ **b**) ∩ (**c** _ **d**)) ≡ ϕ) ,! 28 (()I: 27) ¡

∀a∀b∀c∀d (<[b,c] ⇒ ((a _ b) ∩ (c _ d)) ≡ ϕ)
! 29 (∀I: 1,28) ¡

□

! **36.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c (≤[a,(c+1)] & ≤[c,b]
⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b)
& ((a _ c) ∩ ((c+1) _ b)) ≡ ϕ) ¡

```
   a,b,c                                            ,! 1 (Prem)          ¡

     ≤[a,(c+1)] & ≤[c,b]                            ,! 2 (Prem)          ¡

     ( ≤[a,(c+1)] & ≤[c,b]
       ⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b) )
                                                    ,! 3 (∀E: P29)       ¡

     ≤[a,(c+1)] & ≤[c,b]
     ⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b)
                                                    ,! 4 (()E: 3)        ¡

     ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b)              ,! 5 (⇒E: 2,4)       ¡

     ≤[a,(c+1)]                                     ,! 6 (&E: 2)         ¡

     ω[c] & ω[1]                                    ,! 7 (𝕋E: V1.7,6)    ¡

     ω[c]                                           ,! 8 (&E: 7)         ¡

     ( ω[c] ⇒ <[c,(c+1)] )                          ,! 9 (∀E: V4.26)     ¡

     ω[c] ⇒ <[c,(c+1)]                              ,! 10 (()E: 9)       ¡

     <[c,(c+1)]                                     ,! 11 (⇒E: 8,10)     ¡

     ( <[c,(c+1)] ⇒ ((a _ c) ∩ ((c+1) _ b)) ≡ ϕ )
                                                    ,! 12 (∀E: P35;
                                                    (c+1): V1.7,7)       ¡

     <[c,(c+1)] ⇒ ((a _ c) ∩ ((c+1) _ b)) ≡ ϕ
                                                    ,! 13 (()E: 12)      ¡

     ((a _ c) ∩ ((c+1) _ b)) ≡ ϕ                    ,! 14 (⇒E: 11,13)    ¡

     ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b)
     & ((a _ c) ∩ ((c+1) _ b)) ≡ ϕ
                                                    ,! 15 (&I: 5,14)     ¡

   ≤[a,(c+1)] & ≤[c,b]
   ⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b)
      & ((a _ c) ∩ ((c+1) _ b)) ≡ ϕ
                                                    ,! 16 (⇒I: 2,15)     ¡

   ( ≤[a,(c+1)] & ≤[c,b]
     ⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b)
        & ((a _ c) ∩ ((c+1) _ b)) ≡ ϕ )
                                                    ,! 17 (()I: 16)      ¡

∀a∀b∀c ( ≤[a,(c+1)] & ≤[c,b]
           ⇒ ((a _ c) ∪ ((c+1) _ b)) ≡ (a _ b)
              & ((a _ c) ∩ ((c+1) _ b)) ≡ ϕ )
                                                     ! 18 (∀I: 1,17)     ¡
```

▯

! **37.** ¡

├ ∀A∀B∀a∀b (ω[a] & ω[b] & A ≡ (1 _ a) & B ≡ ((a+1) _ (a+b))
⇒ (A ∪ B) ≡ (1 _ (a+b)) & (A ∩ B) ≡ φ) ¡

A,**B**,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] & **A** ≡ (1 _ **a**) & **B** ≡ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))
,! 2 (Prem) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**a**] ,! 4 (&E: 2) ¡

A ≡ (1 _ **a**) & **B** ≡ ((**a**+1) _ (**a**+**b**)) ,! 5 (&I: 2) ¡

(ω[**a**] ⇒ ≤[1,(**a**+1)]) ,! 6 (∀E: V3.37) ¡

ω[**a**] ⇒ ≤[1,(**a**+1)] ,! 7 (()E: 6) ¡

≤[1,(**a**+1)] ,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

(ω[**a**] & ω[**b**] ⇒ ≤[**a**,(**a**+**b**)]) ,! 9 (∀E: V3.33) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ⇒ ≤[**a**,(**a**+**b**)] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[**a**,(**a**+**b**)] ,! 11 (⇒E: 3,10) ¡

≤[1,(**a**+1)] & ≤[**a**,(**a**+**b**)] ,! 12 (&I: 8,11) ¡

(≤[1,(**a**+1)] & ≤[**a**,(**a**+**b**)]
⇒ ((1 _ **a**) ∪ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ (1 _ (**a**+**b**))
& ((1 _ **a**) ∩ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ φ)
,! 13 (∀E: P36;
(**a**+**b**): V1.7,3) ¡

≤[1,(**a**+1)] & ≤[**a**,(**a**+**b**)]
⇒ ((1 _ **a**) ∪ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ (1 _ (**a**+**b**))
& ((1 _ **a**) ∩ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ φ
,! 14 (()E: 13) ¡

((1 _ **a**) ∪ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ (1 _ (**a**+**b**))
& ((1 _ **a**) ∩ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ φ
,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

((1 _ **a**) ∪ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ (1 _ (**a**+**b**))
,! 16 (&E: 15) ¡

((1 _ **a**) ∩ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ φ ,! 17 (&E: 15) ¡

A ≡ (1 _ **a**) & **B** ≡ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))
& ((1 _ **a**) ∪ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ (1 _ (**a**+**b**))
,! 18 (&I: 5,16) ¡

(**A** ≡ (1 _ **a**) & **B** ≡ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))
  & ((1 _ **a**) ∪ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ (1 _ (**a**+**b**))
  ⇒ (**A** ∪ **B**) ≡ (1 _ (**a**+**b**)))
,! 19 (∀E: II2.43) ¡

A ≡ (1 _ **a**) & **B** ≡ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))
& ((1 _ **a**) ∪ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ (1 _ (**a**+**b**))
⇒ (**A** ∪ **B**) ≡ (1 _ (**a**+**b**))
,! 20 (()E: 19) ¡

(**A** ∪ **B**) ≡ (1 _ (**a**+**b**)) ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

A ≡ (1 _ **a**) & **B** ≡ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))
& ((1 _ **a**) ∩ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ ϕ
,! 22 (&I: 5,17) ¡

(**A** ≡ (1 _ **a**) & **B** ≡ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))
  & ((1 _ **a**) ∩ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ ϕ
  ⇒ (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ)
,! 23 (∀E: II3.39) ¡

A ≡ (1 _ **a**) & **B** ≡ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))
& ((1 _ **a**) ∩ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))) ≡ ϕ
⇒ (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
,! 24 (()E: 23) ¡

(**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ,! 25 (⇒E: 22,24) ¡

(**A** ∪ **B**) ≡ (1 _ (**a**+**b**)) & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ,! 26 (&I: 21,25) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] & **A** ≡ (1 _ **a**) & **B** ≡ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))
⇒ (**A** ∪ **B**) ≡ (1 _ (**a**+**b**)) & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
,! 27 (⇒I: 2,26) ¡

(ω[**a**] & ω[**b**] & **A** ≡ (1 _ **a**) & **B** ≡ ((**a**+1) _ (**a**+**b**))
  ⇒ (**A** ∪ **B**) ≡ (1 _ (**a**+**b**)) & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ)
,! 28 (()I: 27) ¡

∀A∀B∀a∀b (ω[a] & ω[b] & A ≡ (1 _ a) & B ≡ ((a+1) _ (a+b))
  ⇒ (A ∪ B) ≡ (1 _ (a+b)) & (A ∩ B) ≡ ϕ)
,! 29 (∀I: 1,28) ¡

□

! **38.** If P is contained in the finite interval (0 _ n) but is not satisfied by 0, then P is in fact contained in the finite interval (1 _ n). ¡

⊢ ∀n∀P (P ⊆ (0 _ n) & ¬ P[0] ⇒ P ⊆ (1 _ n)) ¡

n,**P** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ (0 _ **n**) & ¬ **P**[0] ,! 2 (Prem) ¡

P ⊆ (0 _ n)   ,! 3 (&E: 2)   ¡

¬ P[0]   ,! 4 (&E: 2)   ¡

(P ⊆ (0 _ n) ⇒ (P \ (0•)) ⊆ ((0 _ n) \ (0•)))
                                           ,! 5 (∀E: II7.28)   ¡

P ⊆ (0 _ n) ⇒ (P \ (0•)) ⊆ ((0 _ n) \ (0•))
                                           ,! 6 (()E: 5)   ¡

(P \ (0•)) ⊆ ((0 _ n) \ (0•))   ,! 7 (⇒E: 3,6)   ¡

(¬ P[0] ⇒ (P \ (0•)) ≡ P)   ,! 8 (∀E: II8.50)   ¡

¬ P[0] ⇒ (P \ (0•)) ≡ P   ,! 9 (()E: 8)   ¡

(P \ (0•)) ≡ P   ,! 10 (⇒E: 4,9)   ¡

(P \ (0•)) ≡ P & (P \ (0•)) ⊆ ((0 _ n) \ (0•))
                                           ,! 11 (&I: 7,10)   ¡

((P \ (0•)) ≡ P & (P \ (0•)) ⊆ ((0 _ n) \ (0•))
  ⇒ P ⊆ ((0 _ n) \ (0•)))
                                           ,! 12 (∀E: II1.30)   ¡

(P \ (0•)) ≡ P & (P \ (0•)) ⊆ ((0 _ n) \ (0•))
⇒ P ⊆ ((0 _ n) \ (0•))
                                           ,! 13 (()E: 12)   ¡

P ⊆ ((0 _ n) \ (0•))   ,! 14 (⇒E: 11,13)   ¡

(ω[0] ⇒ ((0+1) _ n) ≡ ((0 _ n) \ (0•)))
                                           ,! 15 (∀E: P34)   ¡

ω[0] ⇒ ((0+1) _ n) ≡ ((0 _ n) \ (0•))
                                           ,! 16 (()E: 15)   ¡

((0+1) _ n) ≡ ((0 _ n) \ (0•))   ,! 17 (⇒E: ω0,16)   ¡

(1 _ n) ≡ ((0 _ n) \ (0•))   ,! 18 (=E: V2.67,17)
                                                                 ¡

(1 _ n) ≡ ((0 _ n) \ (0•)) & P ⊆ ((0 _ n) \ (0•))
                                           ,! 19 (&I: 14,18)   ¡

((1 _ n) ≡ ((0 _ n) \ (0•)) & P ⊆ ((0 _ n) \ (0•))
  ⇒ P ⊆ (1 _ n))
                                           ,! 20 (∀E: II1.31)   ¡

(1 _ n) ≡ ((0 _ n) \ (0•)) & P ⊆ ((0 _ n) \ (0•))
⇒ P ⊆ (1 _ n)   ,! 21 (()E: 20)   ¡

P ⊆ (1 _ n) ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

P ⊆ (0 _ n) & ¬ P[0] ⇒ P ⊆ (1 _ n) ,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

(P ⊆ (0 _ n) & ¬ P[0] ⇒ P ⊆ (1 _ n))
,! 24 (()I: 23) ¡

∀n∀P (P ⊆ (0 _ n) & ¬ P[0] ⇒ P ⊆ (1 _ n))
! 25 (∀I: 1,24) ¡

▯

! **39.** ¡

⊦ ∀P∀b∀c∀x (P ⊆ (b _ c) & P[x] ⇒ P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ) ¡

P,b,c,x ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ (b _ c) & P[x] ,! 2 (Prem) ¡

P ⊆ (b _ c) ,! 3 (&E: 2) ¡

P[x] ,! 4 (&E: 2) ¡

(b _ c) ⊆ ω ,! 5 (∀E: P23) ¡

P ⊆ (b _ c) & (b _ c) ⊆ ω ,! 6 (&I: 3,5) ¡

(P ⊆ (b _ c) & (b _ c) ⊆ ω ⇒ P ⊆ ω)
,! 7 (∀E: II1.5) ¡

P ⊆ (b _ c) & (b _ c) ⊆ ω ⇒ P ⊆ ω ,! 8 (()E: 7) ¡

P ⊆ ω ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

∃x P[x] ,! 10 (∃I: 4) ¡

(∃x P[x] ⇒ ¬ P ≡ ϕ) ,! 11 (∀E: II5.7) ¡

∃x P[x] ⇒ ¬ P ≡ ϕ ,! 12 (()E: 11) ¡

¬ P ≡ ϕ ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ ,! 14 (&I: 9,13) ¡

P ⊆ (b _ c) & P[x] ⇒ P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(P ⊆ (b _ c) & P[x] ⇒ P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ)
,! 16 (()I: 15) ¡

∀P∀b∀c∀x (P ⊆ (b _ c) & P[x] ⇒ P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ)
! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **40.** If those things satisfying P are all less than or equal to n, then P is contained in the finite interval (0 _ n). ¡

⊢ ∀n∀P (∀y (P[y] ⇒ ≤[y,n]) ⇒ P ⊆ (0 _ n)) ¡

n,**P** ,! 1 (Prem) ¡

∀y (**P**[y] ⇒ ≤[y,**n**]) ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

P[**x**] ,! 4 (Prem) ¡

(**P**[**x**] ⇒ ≤[**x**,**n**]) ,! 5 (∀E: 2) ¡

P[**x**] ⇒ ≤[**x**,**n**] ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[**x**,**n**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(≤[**x**,**n**] ⇒ ω[**x**] & ω[**n**]) ,! 8 (∀E: V3.5) ¡

≤[**x**,**n**] ⇒ ω[**x**] & ω[**n**] ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[**x**] & ω[**n**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

ω[**x**] ,! 11 (&E: 10) ¡

(ω[**x**] ⇒ ≤[0,**x**]) ,! 12 (∀E: V3.24) ¡

ω[**x**] ⇒ ≤[0,**x**] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[0,**x**] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

≤[0,**x**] & ≤[**x**,**n**] ,! 15 (&I: 7,14) ¡

(≤[0,**x**] & ≤[**x**,**n**] ⇒ (0 _ **n**)[**x**]) ,! 16 (∀E: P4) ¡

≤[0,**x**] & ≤[**x**,**n**] ⇒ (0 _ **n**)[**x**] ,! 17 (()E: 16) ¡

(0 _ **n**)[**x**] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

P[**x**] ⇒ (0 _ **n**)[**x**] ,! 19 (⇒I: 4,18) ¡

(**P**[**x**] ⇒ (0 _ **n**)[**x**]) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀x (**P**[x] ⇒ (0 _ **n**)[x]) ,! 21 (∀I: 3,20) ¡

P ⊆ (0 _ **n**) ,! 22 (𝕊I: II1.1,21) ¡

∀y (**P**[y] ⇒ ≤[y,**n**]) ⇒ **P** ⊆ (0 _ **n**) ,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

(∀y (**P**[y] ⇒ ≤[y,**n**]) ⇒ **P** ⊆ (0 _ **n**)) ,! 24 (()I: 23) ¡

∀n∀P (∀y (P[y] ⇒ ≤[y,n]) ⇒ P ⊆ (0 _ n)) ! 25 (∀I: 1,24) ¡

! **41.** ¡

```
⊢ ∀a∀b∀c ( ≤[a,b] ⇒ (b _ c) ⊆ (a ∞) )                    ¡
   a,b,c                                 ,! 1 (Prem)        ¡
     ≤[a,b]                              ,! 2 (Prem)        ¡
       x                                 ,! 3 (Prem)        ¡
         (b _ c)[x]                      ,! 4 (Prem)        ¡
         ( (b _ c)[x] ⇒ ≤[b,x] & ≤[x,c] ) ,! 5 (∀E: P3)     ¡
         (b _ c)[x] ⇒ ≤[b,x] & ≤[x,c]    ,! 6 (()E: 5)      ¡
         ≤[b,x] & ≤[x,c]                 ,! 7 (⇒E: 4,6)     ¡
         ≤[b,x]                          ,! 8 (&E: 7)       ¡
         ≤[a,b] & ≤[b,x]                 ,! 9 (&I: 2,8)     ¡
         ( ≤[a,b] & ≤[b,x] ⇒ ≤[a,x] )    ,! 10 (∀E: V3.20)  ¡
         ≤[a,b] & ≤[b,x] ⇒ ≤[a,x]        ,! 11 (()E: 10)    ¡
         ≤[a,x]                          ,! 12 (⇒E: 9,11)   ¡
         ( ≤[a,x] ⇒ (a ∞)[x] )           ,! 13 (∀E: V9.4)   ¡
         ≤[a,x] ⇒ (a ∞)[x]               ,! 14 (()E: 13)    ¡
         (a ∞)[x]                        ,! 15 (⇒E: 12,14)  ¡
       (b _ c)[x] ⇒ (a ∞)[x]             ,! 16 (⇒I: 4,15)   ¡
       ( (b _ c)[x] ⇒ (a ∞)[x] )         ,! 17 (()I: 16)    ¡
     ∀x ( (b _ c)[x] ⇒ (a ∞)[x] )        ,! 18 (∀I: 3,17)   ¡
     (b _ c) ⊆ (a ∞)                     ,! 19 (𝕊I: II1.1,18)
                                                            ¡
   ≤[a,b] ⇒ (b _ c) ⊆ (a ∞)              ,! 20 (⇒I: 2,19)   ¡
   ( ≤[a,b] ⇒ (b _ c) ⊆ (a ∞) )          ,! 21 (()I: 20)    ¡
∀a∀b∀c ( ≤[a,b] ⇒ (b _ c) ⊆ (a ∞) )       ! 22 (∀I: 1,21)   ¡
```


! **42.** Evidentally, the proposition could be improved to
∀b∀c (ω[b] ⇒ (b _ c) ⊆ (b ∞)) ¡

```
⊦ ∀b∀c ( ω[b] ⇒ ((b+1) _ c) ⊆ (b ∞) )                            ¡
  b,c                                           ,! 1 (Prem)       ¡
    ω[b]                                        ,! 2 (Prem)       ¡
    ( ω[b] ⇒ ≤[b,(b+1)] )                       ,! 3 (∀E: V3.35)  ¡
    ω[b] ⇒ ≤[b,(b+1)]                           ,! 4 (()E: 3)     ¡
    ≤[b,(b+1)]                                  ,! 5 (⇒E: 2,4)    ¡
    ω[b] & ω[1]                                 ,! 6 (&I: IV9.2,2) ¡
    ( ≤[b,(b+1)] ⇒ ((b+1) _ c) ⊆ (b ∞) ),! 7 (∀E: P41;
                                                (b+1): V1.7,6)    ¡
    ≤[b,(b+1)] ⇒ ((b+1) _ c) ⊆ (b ∞)            ,! 8 (()E: 7)     ¡
    ((b+1) _ c) ⊆ (b ∞)                         ,! 9 (⇒E: 5,8)    ¡
  ω[b] ⇒ ((b+1) _ c) ⊆ (b ∞)                    ,! 10 (⇒I: 2,9)   ¡
  ( ω[b] ⇒ ((b+1) _ c) ⊆ (b ∞) )                ,! 11 (()I: 10)   ¡
∀b∀c ( ω[b] ⇒ ((b+1) _ c) ⊆ (b ∞) )              ! 12 (∀I: 1,11)  ¡
□
```

! P43 through P55 relate intervals with their translations. ¡

! **43.** ¡

```
⊦ ∀n∀m∀k∀x ( ω[k] & (n _ m)[x] ⇔ ((n+k) _ (m+k))[(x+k)] )        ¡
  n,m,k,x                                       ,! 1 (Prem)       ¡
  ( (n _ m)[x] ⇔ ≤[n,x] & ≤[x,m] )              ,! 2 (∀E: P2)     ¡
  (n _ m)[x] ⇔ ≤[n,x] & ≤[x,m]                  ,! 3 (()E: 2)     ¡
    ω[k] & (n _ m)[x]                           ,! 4 (Prem)       ¡
    ω[k]                                        ,! 5 (&E: 4)      ¡
    (n _ m)[x]                                  ,! 6 (&E: 4)      ¡
    (n _ m)[x] ⇒ ≤[n,x] & ≤[x,m]                ,! 7 (⇔E: 3)      ¡
    ≤[n,x] & ≤[x,m]                             ,! 8 (⇒E: 6,7)    ¡
    ≤[n,x]                                      ,! 9 (&E: 8)      ¡
    ≤[x,m]                                      ,! 10 (&E: 8)     ¡
    ≤[n,x] & ω[k]                               ,! 11 (&I: 5,9)   ¡
```

(≤[n,x] & ω[k] ⇒ ≤[(n+k),(x+k)]) ,! 12 (∀E: V3.28) ¡

≤[n,x] & ω[k] ⇒ ≤[(n+k),(x+k)] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[(n+k),(x+k)] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

≤[x,m] & ω[k] ,! 15 (&I: 5,10) ¡

(≤[x,m] & ω[k] ⇒ ≤[(x+k),(m+k)]) ,! 16 (∀E: V3.28) ¡

≤[x,m] & ω[k] ⇒ ≤[(x+k),(m+k)] ,! 17 (()E: 16) ¡

≤[(x+k),(m+k)] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

≤[(n+k),(x+k)] & ≤[(x+k),(m+k)] ,! 19 (&I: 14,18) ¡

ω[n] & ω[k] ,! 20 (𝕋E: V1.7,14) ¡

ω[x] & ω[k] ,! 21 (𝕋E: V1.7,14) ¡

ω[m] & ω[k] ,! 22 (𝕋E: V1.7,18) ¡

(≤[(n+k),(x+k)] & ≤[(x+k),(m+k)] ⇒ ((n+k) _ (m+k))[(x+k)])
,! 23 (∀E: P4;
(n+k): V1.7,20;
(x+k): V1.7,21;
(m+k): V1.7,22) ¡

≤[(n+k),(x+k)] & ≤[(x+k),(m+k)] ⇒ ((n+k) _ (m+k))[(x+k)]
,! 24 (()E: 23) ¡

((n+k) _ (m+k))[(x+k)] ,! 25 (⇒E: 19,24) ¡

ω[k] & (n _ m)[x] ⇒ ((n+k) _ (m+k))[(x+k)]
,! 26 (⇒I: 4,25) ¡

((n+k) _ (m+k))[(x+k)] ,! 27 (Prem) ¡

{a : ≤[(n+k),a] & ≤[a,(m+k)]}[(x+k)] ,! 28 (𝔻E: P1,27) ¡

∀x ({a : ≤[(n+k),a] & ≤[a,(m+k)]}[x]
⇔ ≤[(n+k),x] & ≤[x,(m+k)])
,! 29 (Pred) ¡

ω[x] & ω[k] ,! 30 (𝕋E: V1.7,27) ¡

({a : ≤[(n+k),a] & ≤[a,(m+k)]}[(x+k)]
⇔ ≤[(n+k),(x+k)] & ≤[(x+k),(m+k)])
,! 31 (∀E: 29;
(x+k): V1.7,30) ¡

{a : ≤[(n+k),a] & ≤[a,(m+k)]}[(x+k)]
⇔ ≤[(n+k),(x+k)] & ≤[(x+k),(m+k)]
,! 32 (()E: 31) ¡

{a : ≤[(**n**+**k**),a] & ≤[a,(**m**+**k**)]}[(**x**+**k**)]
⇒ ≤[(**n**+**k**),(**x**+**k**)] & ≤[(**x**+**k**),(**m**+**k**)]
,! 33 (⇔E: 32) ¡

≤[(**n**+**k**),(**x**+**k**)] & ≤[(**x**+**k**),(**m**+**k**)] ,! 34 (⇒E: 28,33) ¡

≤[(**n**+**k**),(**x**+**k**)] ,! 35 (&E: 34) ¡

≤[(**x**+**k**),(**m**+**k**)] ,! 36 (&E: 34) ¡

ω[**k**] ,! 37 (&E: 30) ¡

(≤[(**n**+**k**),(**x**+**k**)] ⇒ ≤[**n**,**x**]) ,! 38 (∀E: V3.42) ¡

≤[(**n**+**k**),(**x**+**k**)] ⇒ ≤[**n**,**x**] ,! 39 (()E: 38) ¡

≤[**n**,**x**] ,! 40 (⇒E: 35,39) ¡

(≤[(**x**+**k**),(**m**+**k**)] ⇒ ≤[**x**,**m**]) ,! 41 (∀E: V3.42) ¡

≤[(**x**+**k**),(**m**+**k**)] ⇒ ≤[**x**,**m**] ,! 42 (()E: 41) ¡

≤[**x**,**m**] ,! 43 (⇒E: 36,42) ¡

≤[**n**,**x**] & ≤[**x**,**m**] ,! 44 (&I: 40,43) ¡

≤[**n**,**x**] & ≤[**x**,**m**] ⇒ (**n** _ **m**)[**x**] ,! 45 (⇔E: 3) ¡

(**n** _ **m**)[**x**] ,! 46 (⇒E: 44,45) ¡

ω[**k**] & (**n** _ **m**)[**x**] ,! 47 (&I: 37,46) ¡

((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[(**x**+**k**)] ⇒ ω[**k**] & (**n** _ **m**)[**x**]
,! 48 (⇒I: 27,47) ¡

ω[**k**] & (**n** _ **m**)[**x**] ⇔ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[(**x**+**k**)]
,! 49 (⇔I: 26,48) ¡

(ω[**k**] & (**n** _ **m**)[**x**] ⇔ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[(**x**+**k**)])
,! 50 (()I: 49) ¡

∀n∀m∀k∀x (ω[k] & (n _ m)[x] ⇔ ((n+k) _ (m+k))[(x+k)])
! 51 (∀I: 1,50) ¡

▯

! **44.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀x (ω[k] & (n _ m)[x] ⇒ ((n+k) _ (m+k))[(x+k)]) ¡

n,**m**,**k**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

(ω[**k**] & (**n** _ **m**)[**x**] ⇔ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[(**x**+**k**)])
,! 2 (∀E: P43) ¡

ω[k] & (n _ m)[x] ⇔ ((n+k) _ (m+k))[(x+k)]
,! 3 (()E: 2) ¡

ω[k] & (n _ m)[x] ⇒ ((n+k) _ (m+k))[(x+k)]
,! 4 (⇔E: 3) ¡

(ω[k] & (n _ m)[x] ⇒ ((n+k) _ (m+k))[(x+k)])
,! 5 (()I: 4) ¡

∀n∀m∀k∀x (ω[k] & (n _ m)[x] ⇒ ((n+k) _ (m+k))[(x+k)])
! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **45.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀x (((n+k) _ (m+k))[(x+k)] ⇒ (n _ m)[x]) ¡

n,m,k,x ,! 1 (Prem) ¡

((n+k) _ (m+k))[(x+k)] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[k] & (n _ m)[x] ⇔ ((n+k) _ (m+k))[(x+k)])
,! 3 (∀E: P43) ¡

ω[k] & (n _ m)[x] ⇔ ((n+k) _ (m+k))[(x+k)]
,! 4 (()E: 3) ¡

((n+k) _ (m+k))[(x+k)] ⇒ ω[k] & (n _ m)[x]
,! 5 (⇔E: 4) ¡

ω[k] & (n _ m)[x] ,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

(n _ m)[x] ,! 7 (&E: 6) ¡

((n+k) _ (m+k))[(x+k)] ⇒ (n _ m)[x] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(((n+k) _ (m+k))[(x+k)] ⇒ (n _ m)[x])
,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k∀x (((n+k) _ (m+k))[(x+k)] ⇒ (n _ m)[x])
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **46.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀x ((n _ m)[(x-k)] ⇒ ((n+k) _ (m+k))[x]) ¡

n,m,k,x ,! 1 (Prem) ¡

(n _ m)[(x-k)] ,! 2 (Prem) ¡

≤[k,x] ,! 3 (𝕋E: V5.7) ¡

(≤[k,x] ⇒ ω[k]) ,! 4 (∀E: V3.6) ¡

≤[**k**,**x**] ⇒ ω[**k**] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[**k**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**k**] & (**n** _ **m**)[(**x**-**k**)] ,! 7 (&I: 2,6) ¡

(ω[**k**] & (**n** _ **m**)[(**x**-**k**)] ⇒ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[((**x**-**k**)+**k**)])
,! 8 (∀E: P44;
(**x**-**k**): V5.7,3) ¡

ω[**k**] & (**n** _ **m**)[(**x**-**k**)] ⇒ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[((**x**-**k**)+**k**)]
,! 9 (()I: 8) ¡

((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[((**x**-**k**)+**k**)] ,! 10 (⇒I: 7,9) ¡

(≤[**k**,**x**] ⇒ ((**x**-**k**)+**k**) = **x**) ,! 11 (∀E: V6.3) ¡

≤[**k**,**x**] ⇒ ((**x**-**k**)+**k**) = **x** ,! 12 (()E: 11) ¡

((**x**-**k**)+**k**) = **x** ,! 13 (⇒E: 3,12) ¡

((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[**x**] ,! 14 (=E: 10,13) ¡

(**n** _ **m**)[(**x**-**k**)] ⇒ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[**x**] ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

((**n** _ **m**)[(**x**-**k**)] ⇒ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[**x**])
,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m∀k∀x ((n _ m)[(x-k)] ⇒ ((n+k) _ (m+k))[x])
! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **47.** ¡

├ ∀n∀m∀k∀x (((n+k) _ (m+k))[x] ⇒ (n _ m)[(x-k)]) ¡

n,**m**,**k**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

{a : ≤[(**n**+**k**),a] & ≤[a,(**m**+**k**)]}[**x**] ,! 3 (▯E: P1,2) ¡

∀x ({a : ≤[(**n**+**k**),a] & ≤[a,(**m**+**k**)]}[x]
⇔ ≤[(**n**+**k**),x] & ≤[x,(**m**+**k**)])
,! 4 (Pred) ¡

({a : ≤[(**n**+**k**),a] & ≤[a,(**m**+**k**)]}[**x**]
⇔ ≤[(**n**+**k**),**x**] & ≤[**x**,(**m**+**k**)])
,! 5 (∀E: 4) ¡

{a : ≤[(**n**+**k**),a] & ≤[a,(**m**+**k**)]}[**x**] ⇔ ≤[(**n**+**k**),**x**] & ≤[**x**,(**m**+**k**)]
,! 6 (()E: 5) ¡

{a : ≤[(**n**+**k**),a] & ≤[a,(**m**+**k**)]}[**x**] ⇒ ≤[(**n**+**k**),**x**] & ≤[**x**,(**m**+**k**)]

,! 7 (⇔E: 6) ¡

≤[(**n**+**k**),**x**] & ≤[**x**,(**m**+**k**)] ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

≤[(**n**+**k**),**x**] ,! 9 (&E: 8) ¡

(≤[(**n**+**k**),**x**] ⇒ ≤[**k**,**x**]) ,! 10 (∀E: V3.41) ¡

≤[(**n**+**k**),**x**] ⇒ ≤[**k**,**x**] ,! 11 (()E: 10) ¡

≤[**k**,**x**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(≤[**k**,**x**] ⇒ ((**x**-**k**)+**k**) = **x**) ,! 13 (∀E: V6.3) ¡

≤[**k**,**x**] ⇒ ((**x**-**k**)+**k**) = **x** ,! 14 (()E: 13) ¡

((**x**-**k**)+**k**) = **x** ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[((**x**-**k**)+**k**)] ,! 16 (=E: 2,15) ¡

(((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[((**x**-**k**)+**k**)] ⇒ (**n** _ **m**)[(**x**-**k**)])
,! 17 (∀E: P45;
(**x**-**k**): V5.7,12) ¡

((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[((**x**-**k**)+**k**)] ⇒ (**n** _ **m**)[(**x**-**k**)]
,! 18 (()I: 17) ¡

(**n** _ **m**)[(**x**-**k**)] ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[**x**] ⇒ (**n** _ **m**)[(**x**-**k**)] ,! 20 (⇒I: 2,19) ¡

(((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[**x**] ⇒ (**n** _ **m**)[(**x**-**k**)])
,! 21 (()I: 20) ¡

∀n∀m∀k∀x (((n+k) _ (m+k))[x] ⇒ (n _ m)[(x-k)])
! 22 (∀I: 1,21) ¡

▯

! **48.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k∀x ((n _ m)[(x-k)] ⇔ ((n+k) _ (m+k))[x]) ¡

n,**m**,**k**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((**n** _ **m**)[(**x**-**k**)] ⇒ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[**x**])
,! 2 (∀E: P46) ¡

(**n** _ **m**)[(**x**-**k**)] ⇒ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[**x**] ,! 3 (()E: 2) ¡

(((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[**x**] ⇒ (**n** _ **m**)[(**x**-**k**)])
,! 4 (∀E: P47) ¡

((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[**x**] ⇒ (**n** _ **m**)[(**x**-**k**)] ,! 5 (()E: 4) ¡

(n _ m)[(x-k)] ⇔ ((n+k) _ (m+k))[x] ,! 6 (⇔I: 3,5) ¡

((n _ m)[(x-k)] ⇔ ((n+k) _ (m+k))[x])
,! 7 (()I: 6) ¡

∀n∀m∀k∀x ((n _ m)[(x-k)] ⇔ ((n+k) _ (m+k))[x])
! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! 49. ¡

⊦ ∀n∀m∀k∀x (≤[k,n] & (n _ m)[x] ⇔ ((n-k) _ (m-k))[(x-k)]) ¡

n,m,k,x ,! 1 (Prem) ¡

(≤[k,n] ⇒ ((n-k)+k) = n) ,! 2 (∀E: V6.3) ¡

≤[k,n] ⇒ ((n-k)+k) = n ,! 3 (()E: 2) ¡

(≤[k,m] ⇒ ((m-k)+k) = m) ,! 4 (∀E: V6.3) ¡

≤[k,m] ⇒ ((m-k)+k) = m ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[k,n] & (n _ m)[x] ,! 6 (Prem) ¡

≤[k,n] ,! 7 (&E: 6) ¡

(n _ m)[x] ,! 8 (&E: 6) ¡

((n _ m)[x] ⇒ ≤[n,x] & ≤[x,m]) ,! 9 (∀E: P3) ¡

(n _ m)[x] ⇒ ≤[n,x] & ≤[x,m] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[n,x] & ≤[x,m] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

≤[n,x] ,! 12 (&E: 11) ¡

≤[x,m] ,! 13 (&E: 11) ¡

≤[k,n] & ≤[n,x] ,! 14 (&I: 7,12) ¡

(≤[k,n] & ≤[n,x] ⇒ ≤[k,x]) ,! 15 (∀E: V3.20) ¡

≤[k,n] & ≤[n,x] ⇒ ≤[k,x] ,! 16 (()E: 15) ¡

≤[k,x] ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

≤[k,x] & ≤[x,m] ,! 18 (&I: 13,17) ¡

(≤[k,x] & ≤[x,m] ⇒ ≤[k,m]) ,! 19 (∀E: V3.20) ¡

≤[k,x] & ≤[x,m] ⇒ ≤[k,m] ,! 20 (()E: 19) ¡

≤[k,m] ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

((n-k)+k) = n ,! 22 (⇒E: 3,7) ¡

((m-k)+k) = m ,! 23 (⇒E: 5,21) ¡

(((n-k)+k) _ m)[x] ,! 24 (=E: 8,22) ¡

(((n-k)+k) _ ((m-k)+k))[x] ,! 25 (=E: 23,24) ¡

((((n-k)+k) _ ((m-k)+k))[x] ⇒ ((n-k) _ (m-k))[(x-k)])
,! 26 (∀E: P47;
(n-k): V5.7,7;
(m-k): V5.7,21) ¡

(((n-k)+k) _ ((m-k)+k))[x] ⇒ ((n-k) _ (m-k))[(x-k)]
,! 27 (()E: 26) ¡

((n-k) _ (m-k))[(x-k)] ,! 28 (⇒E: 25,27) ¡

≤[k,n] & (n _ m)[x] ⇒ ((n-k) _ (m-k))[(x-k)]
,! 29 (⇒I: 6,28) ¡

((n-k) _ (m-k))[(x-k)] ,! 30 (Prem) ¡

{a : ≤[(n-k),a] & ≤[a,(m-k)]}[(x-k)] ,! 31 (𝔻E: P1,30) ¡

∀x ({a : ≤[(n-k),a] & ≤[a,(m-k)]}[x]
⇔ ≤[(n-k),x] & ≤[x,(m-k)])
,! 32 (Pred) ¡

≤[k,x] ,! 33 (𝕋E: V5.7,32) ¡

({a : ≤[(n-k),a] & ≤[a,(m-k)]}[(x-k)]
⇔ ≤[(n-k),(x-k)] & ≤[(x-k),(m-k)])
,! 34 (∀E: 32;
(x-k): V5.7,33) ¡

{a : ≤[(n-k),a] & ≤[a,(m-k)]}[(x-k)]
⇔ ≤[(n-k),(x-k)] & ≤[(x-k),(m-k)]
,! 35 (()E: 34) ¡

{a : ≤[(n-k),a] & ≤[a,(m-k)]}[(x-k)]
⇒ ≤[(n-k),(x-k)] & ≤[(x-k),(m-k)]
,! 36 (⇔E: 35) ¡

≤[(n-k),(x-k)] & ≤[(x-k),(m-k)] ,! 37 (⇒E: 31,36) ¡

≤[(n-k),(x-k)] ,! 38 (&E: 37) ¡

≤[(x-k),(m-k)] ,! 39 (&E: 37) ¡

≤[k,n] ,! 40 (𝕋E: V5.7,38) ¡

≤[k,m] ,! 41 (𝕋E: V5.7,39) ¡

((n-k)+k) = n ,! 42 (⇒E: 3,40) ¡

((m-k)+k) = m ,! 43 (⇒E: 5,41) ¡

(((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[(**x**-**k**)] ⇒ (((**n**-**k**)+**k**) _ ((**m**-**k**)+**k**))[**x**])
,! 44 (∀E: P46;
(**n**-**k**): V5.7,40;
(**m**-**k**): V5.7,41) ¡

((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[(**x**-**k**)] ⇒ (((**n**-**k**)+**k**) _ ((**m**-**k**)+**k**))[**x**]
,! 45 (()E: 44) ¡

(((**n**-**k**)+**k**) _ ((**m**-**k**)+**k**))[**x**] ,! 46 (⇒E: 30,45) ¡

(**n** _ ((**m**-**k**)+**k**))[**x**] ,! 47 (=E: 42,46) ¡

(**n** _ **m**)[**x**] ,! 48 (=E: 43,47) ¡

≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[**x**] ,! 49 (&I: 40,48) ¡

((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[(**x**-**k**)] ⇒ ≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[**x**]
,! 50 (⇒I: 30,49) ¡

≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[**x**] ⇔ ((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[(**x**-**k**)]
,! 51 (⇔I: 29,50) ¡

(≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[**x**] ⇔ ((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[(**x**-**k**)])
,! 52 (()I: 51) ¡

∀n∀m∀k∀x (≤[k,n] & (n _ m)[x] ⇔ ((n-k) _ (m-k))[(x-k)])
! 53 (∀I: 1,52) ¡

□

! **50.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀x (≤[k,n] & (n _ m)[x] ⇒ ((n-k) _ (m-k))[(x-k)]) ¡

n,m,**k**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

(≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[**x**] ⇔ ((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[(**x**-**k**)])
,! 2 (∀E: P49) ¡

≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[**x**] ⇔ ((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[(**x**-**k**)]
,! 3 (()E: 2) ¡

≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[**x**] ⇒ ((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[(**x**-**k**)]
,! 4 (⇔E: 3) ¡

(≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[**x**] ⇒ ((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[(**x**-**k**)])
,! 5 (()I: 4) ¡

∀n∀m∀k∀x (≤[k,n] & (n _ m)[x] ⇔ ((n-k) _ (m-k))[(x-k)])
! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! **51.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀x (((n-k) _ (m-k))[(x-k)] ⇒ (n _ m)[x]) ¡

n,m,k,x ,! 1 (Prem) ¡

((n-k) _ (m-k))[(x-k)] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[k,n] & (n _ m)[x] ⇔ ((n-k) _ (m-k))[(x-k)])
,! 3 (∀E: P49) ¡

≤[k,n] & (n _ m)[x] ⇔ ((n-k) _ (m-k))[(x-k)]
,! 4 (()E: 3) ¡

((n-k) _ (m-k))[(x-k)] ⇒ ≤[k,n] & (n _ m)[x]
,! 5 (⇔E: 4) ¡

≤[k,n] & (n _ m)[x] ,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

(n _ m)[x] ,! 7 (&E: 6) ¡

((n-k) _ (m-k))[(x-k)] ⇒ (n _ m)[x] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(((n-k) _ (m-k))[(x-k)] ⇒ (n _ m)[x])
,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k∀x (((n-k) _ (m-k))[(x-k)] ⇒ (n _ m)[x])
! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **52.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀x (≤[k,n] & (n _ m)[(x+k)] ⇒ ((n-k) _ (m-k))[x]) ¡

n,m,k,x ,! 1 (Prem) ¡

≤[k,n] & (n _ m)[(x+k)] ,! 2 (Prem) ¡

(n _ m)[(x+k)] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[x] & ω[k] ,! 4 (𝕋E: V1.7,3) ¡

(≤[k,n] & (n _ m)[(x+k)] ⇒ ((n-k) _ (m-k))[((x+k)-k)])
,! 5 (∀E: P50;
(x+k): V1.7,4) ¡

≤[k,n] & (n _ m)[(x+k)] ⇒ ((n-k) _ (m-k))[((x+k)-k)]
,! 6 (()I: 5) ¡

((n-k) _ (m-k))[((x+k)-k)] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(ω[x] & ω[k] ⇒ ((x+k)-k) = x) ,! 8 (∀E: V6.35) ¡

ω[x] & ω[k] ⇒ ((x+k)-k) = x ,! 9 (()E: 8) ¡

((x+k)-k) = x ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

((n-k) _ (m-k))[x] ,! 11 (=E: 7,10) ¡

≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)] ⇒ ((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**]
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)] ⇒ ((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**])
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k∀x (≤[k,n] & (n _ m)[(x+k)] ⇒ ((n-k) _ (m-k))[x])
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **53.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k∀x (((n-k) _ (m-k))[x] ⇒ ≤[k,n] & (n _ m)[(x+k)]) ¡

n,**m**,**k**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

{a : ≤[(**n**-**k**),a] & ≤[a,(**m**-**k**)]}[**x**] ,! 3 (𝔻E: P1,2) ¡

∀x ({a : ≤[(**n**-**k**),a] & ≤[a,(**m**-**k**)]}[x]
⇔ ≤[(**n**-**k**),x] & ≤[x,(**m**-**k**)])
,! 4 (Pred) ¡

({a : ≤[(**n**-**k**),a] & ≤[a,(**m**-**k**)]}[**x**]
⇔ ≤[(**n**-**k**),**x**] & ≤[**x**,(**m**-**k**)])
,! 5 (∀E: 4) ¡

{a : ≤[(**n**-**k**),a] & ≤[a,(**m**-**k**)]}[**x**] ⇔ ≤[(**n**-**k**),**x**] & ≤[**x**,(**m**-**k**)]
,! 6 (()E: 5) ¡

{a : ≤[(**n**-**k**),a] & ≤[a,(**m**-**k**)]}[**x**] ⇒ ≤[(**n**-**k**),**x**] & ≤[**x**,(**m**-**k**)]
,! 7 (⇔E: 6) ¡

≤[(**n**-**k**),**x**] & ≤[**x**,(**m**-**k**)] ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

≤[(**n**-**k**),**x**] ,! 9 (&E: 8) ¡

≤[**k**,**n**] ,! 10 (𝕋E: V5.7,9) ¡

(≤[(**n**-**k**),**x**] ⇒ ω[**x**]) ,! 11 (∀E: V3.7;
(**n**-**k**): V5.7,10) ¡

≤[(**n**-**k**),**x**] ⇒ ω[**x**] ,! 12 (()E: 11) ¡

ω[**x**] ,! 13 (⇒E: 9,12) ¡

(≤[**k**,**n**] ⇒ ω[**k**]) ,! 14 (∀E: V3.6) ¡

≤[**k**,**n**] ⇒ ω[**k**] ,! 15 (()E: 14) ¡

ω[**k**] ,! 16 (⇒E: 10,15) ¡

ω[**x**] & ω[**k**] ,! 17 (&I: 13,16) ¡

(ω[**x**] & ω[**k**] ⇒ ((**x**+**k**)-**k**) = **x**)   ,! 18 (∀E: V6.35)   ¡

ω[**x**] & ω[**k**] ⇒ ((**x**+**k**)-**k**) = **x**   ,! 19 (()E: 18)   ¡

((**x**+**k**)-**k**) = **x**   ,! 20 (⇒E: 17,19)   ¡

((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[((**x**+**k**)-**k**)]   ,! 21 (=E: 2,20)   ¡

(((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[((**x**+**k**)-**k**)] ⇒ (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)])
,! 22 (∀E: P51;
(**x**+**k**): V1.7,17)   ¡

((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[((**x**+**k**)-**k**)] ⇒ (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)]
,! 23 (()I: 22)   ¡

(**n** _ **m**)[(**x**+**k**)]   ,! 24 (⇒I: 21,23)   ¡

≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)]   ,! 25 (&I: 10,24)   ¡

((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**] ⇒ ≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)]
,! 26 (⇒I: 2,25)   ¡

(((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**] ⇒ ≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)])
,! 27 (()I: 26)   ¡

∀n∀m∀k∀x (((n-k) _ (m-k))[x] ⇒ ≤[k,n] & (n _ m)[(x+k)])
! 28 (∀I: 1,27)   ¡

□

! **54.**   ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀x (≤[k,n] & (n _ m)[(x+k)] ⇔ ((n-k) _ (m-k))[x])   ¡

n,m,**k**,**x**   ,! 1 (Prem)   ¡

(≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)] ⇒ ((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**])
,! 2 (∀E: P52)   ¡

≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)] ⇒ ((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**]
,! 3 (()E: 2)   ¡

(((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**] ⇒ ≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)])
,! 4 (∀E: P53)   ¡

((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**] ⇒ ≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)]
,! 5 (()E: 4)   ¡

≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)] ⇔ ((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**]
,! 6 (⇔I: 3,5)   ¡

(≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)] ⇔ ((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**])
,! 7 (()I: 6)   ¡

∀n∀m∀k∀x (≤[k,n] & (n _ m)[(x+k)] ⇔ ((n-k) _ (m-k))[x])
! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **55.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k∀x (((n-k) _ (m-k))[x] ⇒ (n _ m)[(x+k)]) ¡

n,**m**,**k**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

(((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**] ⇒ ≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)])
,! 3 (∀E: P53) ¡

((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**] ⇒ ≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)]
,! 4 (()E: 3) ¡

≤[**k**,**n**] & (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**n** _ **m**)[(**x**+**k**)] ,! 6 (&E: 5) ¡

((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**] ⇒ (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(((**n**-**k**) _ (**m**-**k**))[**x**] ⇒ (**n** _ **m**)[(**x**+**k**)])
,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m∀k∀x (((n-k) _ (m-k))[x] ⇒ (n _ m)[(x+k)])
! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **56.** A finite interval can be put into one-to-one correlation with its translation by adding k. ¡

⊦ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (n _ m) ~ ((n+k) _ (m+k))) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 5 (&E: 2) ¡

! We introduce a symbol **R** to stand in for ((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**)) ¡

((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**)) = ((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**)) ,! 6 (=I) ¡

∃R R = ((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**)) ,! 7 (∃I: 6) ¡

R = ((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**)) ,! 8 (∃E: 7) ¡

! To prove: **R** 𝔽 (**n** _ **m**) & **R** 𝟙 ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**)) ¡

! To prove: **R** 𝔽 (**n** _ **m**), i.e. (**R**^{D}) ≡ (**n** _ **m**) & **f** **R** ¡

! To prove: (**R**^{D}) ≡ (**n** _ **m**) ¡

(ω[**k**] ⇒ ((⊕**k**)^{D}) ≡ ω) ,! 9 (∀E: V10.9) ¡

ω[**k**] ⇒ ((⊕**k**)^{D}) ≡ ω ,! 10 (()E: 9) ¡

((⊕**k**)^{D}) ≡ ω ,! 11 (⇒E: 5,10) ¡

(**n** _ **m**) ⊆ ω ,! 12 (∀E: P23) ¡

((⊕**k**)^{D}) ≡ ω & (**n** _ **m**) ⊆ ω ,! 13 (&I: 11,12) ¡

(((⊕**k**)^{D}) ≡ ω & (**n** _ **m**) ⊆ ω ⇒ (**n** _ **m**) ⊆ ((⊕**k**)^{D}))
,! 14 (∀E: II1.31) ¡

((⊕**k**)^{D}) ≡ ω & (**n** _ **m**) ⊆ ω ⇒ (**n** _ **m**) ⊆ ((⊕**k**)^{D})
,! 15 (()E: 14) ¡

(**n** _ **m**) ⊆ ((⊕**k**)^{D}) ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

((**n** _ **m**) ⊆ ((⊕**k**)^{D}) ⇒ (((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**))^{D}) ≡ (**n** _ **m**))
,! 17 (∀E: III7.31) ¡

(**n** _ **m**) ⊆ ((⊕**k**)^{D}) ⇒ (((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**))^{D}) ≡ (**n** _ **m**)
,! 18 (()E: 17) ¡

(((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**))^{D}) ≡ (**n** _ **m**) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

(**R**^{D}) ≡ (**n** _ **m**) ,! 20 (=E: 8,19) ¡

! To prove: **f** **R** ¡

(ω[**k**] ⇒ **f** (⊕**k**)) ,! 21 (∀E: V10.10) ¡

ω[**k**] ⇒ **f** (⊕**k**) ,! 22 (()E: 21) ¡

f (⊕**k**) ,! 23 (⇒E: 5,22) ¡

(**f** (⊕**k**) ⇒ **f** ((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**))) ,! 24 (∀E: III8.4) ¡

f (⊕**k**) ⇒ **f** ((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**)) ,! 25 (()E: 24) ¡

f ((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**)) ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

f **R** ,! 27 (=E: 8,26) ¡

(**R**^{D}) ≡ (**n** _ **m**) & **f** **R** ,! 28 (&I: 20,27) ¡

R 𝔽 (**n** _ **m**) ,! 29 (𝕊I: III8.10,28) ¡

! To prove: **R** 𝟙 ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**)) i.e.
(**R**^{I}) ≡ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**)) & **1** **R** ¡

! To prove: (**R**^{I}) ≡ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**)) ¡

(∀y(∃x **R**[x,y] ⇔ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[y])
⇒ (**R**^{I}) ≡ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**)))
,! 30 (∀E: III6.14) ¡

∀y(∃x **R**[x,y] ⇔ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[y]) ⇒ (**R**^{I}) ≡ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))
,! 31 (()E: 30) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 32 (&I: 3,5) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 33 (&I: 4,5) ¡

y ,! 34 (Prem) ¡

∃x **R**[x,**y**] ,! 35 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 36 (∃E: 35) ¡

((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**))[**x**,**y**] ,! 37 (=E: 8,36) ¡

(((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**))[**x**,**y**] ⇒ (⊕**k**)[**x**,**y**] & (**n** _ **m**)[**x**])
,! 38 (∀E: III7.3) ¡

((⊕**k**) ⌈ (**n** _ **m**))[**x**,**y**] ⇒ (⊕**k**)[**x**,**y**] & (**n** _ **m**)[**x**]
,! 39 (()E: 38) ¡

(⊕**k**)[**x**,**y**] & (**n** _ **m**)[**x**] ,! 40 (⇒E: 37,39) ¡

(⊕**k**)[**x**,**y**] ,! 41 (&E: 40) ¡

(**n** _ **m**)[**x**] ,! 42 (&E: 40) ¡

ω[**k**] & (⊕**k**)[**x**,**y**] ,! 43 (&I: 5,41) ¡

(ω[**k**] & (⊕**k**)[**x**,**y**] ⇒ (**x**+**k**) = **y**) ,! 44 (∀E: V10.3) ¡

ω[**k**] & (⊕**k**)[**x**,**y**] ⇒ (**x**+**k**) = **y** ,! 45 (()E: 44) ¡

(**x**+**k**) = **y** ,! 46 (⇒E: 43,45) ¡

ω[**k**] & (**n** _ **m**)[**x**] ,! 47 (&I: 5,42) ¡

(ω[**k**] & (**n** _ **m**)[**x**] ⇒ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[(**x**+**k**)])
,! 48 (∀E: P43) ¡

ω[**k**] & (**n** _ **m**)[**x**] ⇒ ((**n**+**k**) _ (**m**+**k**))[(**x**+**k**)]
,! 49 (()E: 48) ¡

((n+k) _ (m+k))[(x+k)] ,! 50 (⇒E: 47,49) ¡

((n+k) _ (m+k))[y] ,! 51 (=E: 46,50) ¡

∃x R[x,y] ⇒ ((n+k) _ (m+k))[y] ,! 52 (⇒I: 35,51) ¡

((n+k) _ (m+k))[y] ,! 53 (Prem) ¡

(((n+k) _ (m+k))[y] ⇒ (n _ m)[(y-k)])
,! 54 (∀E: P47) ¡

((n+k) _ (m+k))[y] ⇒ (n _ m)[(y-k)]
,! 55 (()E: 54) ¡

(n _ m)[(y-k)] ,! 56 (⇒E: 53,55) ¡

≤[k,y] ,! 57 (𝕋E: V5.7,56) ¡

(≤[k,y] ⇒ ((y-k)+k) = y) ,! 58 (∀E: V6.3) ¡

≤[k,y] ⇒ ((y-k)+k) = y ,! 59 (()E: 58) ¡

((y-k)+k) = y ,! 60 (⇒E: 57,59) ¡

(((y-k)+k) = y ⇒ (⊕k)[(y-k),y])
,! 61 (∀E: V10.4;
(y-k): V5.7,57) ¡

((y-k)+k) = y ⇒ (⊕k)[(y-k),y] ,! 62 (()E: 61) ¡

(⊕k)[(y-k),y] ,! 63 (⇒E: 60,62) ¡

(⊕k)[(y-k),y] & (n _ m)[(y-k)] ,! 64 (&I: 56,63) ¡

((⊕k)[(y-k),y] & (n _ m)[(y-k)]
⇒ ((⊕k) ⌈ (n _ m))[(y-k),y])
,! 65 (∀E: III7.4;
(y-k): V5.7,57) ¡

(⊕k)[(y-k),y] & (n _ m)[(y-k)]
⇒ ((⊕k) ⌈ (n _ m))[(y-k),y]
,! 66 (()E: 65) ¡

((⊕k) ⌈ (n _ m))[(y-k),y] ,! 67 (⇒E: 53,55) ¡

R[(y-k),y] ,! 68 (=E: 8,67) ¡

∃x R[x,y] ,! 69 (∃E: 68;
(y-k): V5.7,57) ¡

((n+k) _ (m+k))[y] ⇒ ∃x R[x,y] ,! 70 (⇒I: 53,69) ¡

∃x R[x,y] ⇔ ((n+k) _ (m+k))[y] ,! 71 (⇔I: 52,70) ¡

(∃x R[x,y] ⇔ ((n+k) _ (m+k))[y]) ,! 72 (()I: 71) ¡

∀y(∃x R[x,y] ⇔ ((n+k) _ (m+k))[y]) ,! 73 (∀I: 72) ¡

(R^I) ≡ ((n+k) _ (m+k)) ,! 74 (⇒E: 31.73) ¡

! To prove: 1 R ¡

(ω[k] ⇒ 1 (⊕k)) ,! 75 (∀E: V10.14) ¡

ω[k] ⇒ 1 (⊕k) ,! 76 (()E: 75) ¡

1 (⊕k) ,! 77 (⇒E: 5,76) ¡

(1 (⊕k) ⇒ 1 ((⊕k) ⌈ (n _ m))) ,! 78 (∀E: III9.10) ¡

1 (⊕k) ⇒ 1 ((⊕k) ⌈ (n _ m)) ,! 79 (()E: 78) ¡

1 ((⊕k) ⌈ (n _ m)) ,! 80 (⇒E: 77,79) ¡

1 R ,! 81 (=E: 8,80) ¡

(R^I) ≡ ((n+k) _ (m+k)) & 1 R ,! 82 (&I: 74,81) ¡

R 𝟙 ((n+k) _ (m+k)) ,! 83 (𝕊I: III9.19,82) ¡

R 𝔽 (n _ m) & R 𝟙 ((n+k) _ (m+k)) ,! 84 (&I: 29,83) ¡

(R 𝔽 (n _ m) & R 𝟙 ((n+k) _ (m+k)))
,! 85 (()I: 84) ¡

∃R (R 𝔽 (n _ m) & R 𝟙 ((n+k) _ (m+k)))
,! 86 (∃I: 85) ¡

(n _ m) ~ ((n+k) _ (m+k)) ,! 87 (𝕊I: III13.1,86) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (n _ m) ~ ((n+k) _ (m+k))
,! 88 (⇒I: 2,87) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (n _ m) ~ ((n+k) _ (m+k)))
,! 89 (()I: 88) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (n _ m) ~ ((n+k) _ (m+k)))
! 90 (∀I: 1,89) ¡

□

! **57.** ¡

⊢ ∀n∀m∀F ((F^D) ≡ ((n+1) _ m) & ≤[n,m]
⇒ (((⊕n) ∘ F)^D) ≡ (1 _ (m-n))) ¡

n,m,F ,! 1 (Prem) ¡

(F^{D}) ≡ ((n+1) _ m) & ≤[n,m] ,! 2 (Prem) ¡

(F^{D}) ≡ ((n+1) _ m) ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[n,m] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[n,m] ⇒ ω[n]) ,! 5 (∀E: V3.6) ¡

≤[n,m] ⇒ ω[n] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[n] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(ω[n] ⇒ ≤[n,(n+1)]) ,! 8 (∀E: V3.35) ¡

ω[n] ⇒ ≤[n,(n+1)] ,! 9 (()E: 8) ¡

≤[n,(n+1)] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

ω[n] & ω[1] ,! 11 (&I: IV9.2,7) ¡

(ω[n] & ω[1] ⇒ ((n+1) - n) = 1) ,! 12 (∀E: V6.36) ¡

ω[n] & ω[1] ⇒ ((n+1) - n) = 1 ,! 13 (()E: 12) ¡

((n+1) - n) = 1 ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

(∀x(∃y ((⊕n) ∘ F)[x,y] ⇔ (1 _ (m-n))[x])
⇒ (((⊕n) ∘ F)^{D}) ≡ (1 _ (m-n)))
,! 15 (∀E: III5.13) ¡

∀x(∃y ((⊕n) ∘ F)[x,y] ⇔ (1 _ (m-n))[x])
⇒ (((⊕n) ∘ F)^{D}) ≡ (1 _ (m-n))
,! 16 (()E: 15) ¡

x ,! 17 (Prem) ¡

∃y ((⊕n) ∘ F)[x,y] ,! 18 (Prem) ¡

((⊕n) ∘ F)[x,y] ,! 19 (∃E: 18) ¡

(((⊕n) ∘ F)[x,y] ⇒ ∃z((⊕n)[x,z] & F[z,y]))
,! 20 (∀E: III10.3) ¡

((⊕n) ∘ F)[x,y] ⇒ ∃z((⊕n)[x,z] & F[z,y])
,! 21 (()E: 20) ¡

∃z((⊕n)[x,z] & F[z,y]) ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

((⊕n)[x,z] & F[z,y]) ,! 23 (∃E: 22) ¡

(⊕n)[x,z] & F[z,y] ,! 24 (()E: 23) ¡

(⊕n)[x,z] ,! 25 (&E: 24) ¡

F[z,y] ,! 26 (&E: 24) ¡

F[z,y] & (F^{D}) ≡ ((n+1) _ m) ,! 27 (&I: 3,26) ¡

(F[z,y] & (F^{D}) ≡ ((n+1) _ m) ⇒ ((n+1) _ m)[z])
,! 28 (∀E: III5.7) ¡

F[z,y] & (F^{D}) ≡ ((n+1) _ m) ⇒ ((n+1) _ m)[z]
,! 29 (()E: 28) ¡

((n+1) _ m)[z] ,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

≤[n,(n+1)] & ((n+1) _ m)[z] ,! 31 (&I: 10,30) ¡

(≤[n,(n+1)] & ((n+1) _ m)[z]
⇒ (((n+1)-n) _ (m-n))[(z-n)])
,! 32 (∀E: P50;
(n+1): V1.7,11) ¡

≤[n,(n+1)] & ((n+1) _ m)[z]
⇒ (((n+1)-n) _ (m-n))[(z-n)]
,! 33 (()E: 32) ¡

(((n+1)-n) _ (m-n))[(z-n)] ,! 34 (⇒E: 31,33) ¡

(1 _ (m-n))[(z-n)] ,! 35 (=E: 14,34) ¡

ω[n] & (⊕n)[x,z] ,! 36 (&I: 7,25) ¡

(ω[n] & (⊕n)[x,z] ⇒ (x+n) = z),! 37 (∀E: V10.3) ¡

ω[n] & (⊕n)[x,z] ⇒ (x+n) = z ,! 38 (()E: 37) ¡

(x+n) = z ,! 39 (⇒E: 36,38) ¡

((x+n) = z ⇒ (z-n) = x) ,! 40 (∀E: V6.8) ¡

(x+n) = z ⇒ (z-n) = x ,! 41 (()E: 40) ¡

(z-n) = x ,! 42 (⇒E: 39,41) ¡

(1 _ (m-n))[x] ,! 43 (=E: 35,42) ¡

∃y ((⊕n) ∘ F)[x,y] ⇒ (1 _ (m-n))[x]
,! 44 (⇒I: 18,43) ¡

(1 _ (m-n))[x] ,! 45 (Prem) ¡

((1 _ (m-n))[x] ⇒ ω[x]) ,! 46 (∀E: P22;
(m-n): V5.7,4) ¡

(1 _ (m-n))[x] ⇒ ω[x] ,! 47 (()E: 46) ¡

ω[x] ,! 48 (⇒E: 45,47) ¡

ω[x] & ω[n] ,! 49 (&I: 7,48) ¡

(ω[x] & ω[n] ⇒ (⊕n)[x,(x+n)]) ,! 50 (∀E: V10.5) ¡

ω[x] & ω[n] ⇒ (⊕n)[x,(x+n)] ,! 51 (()E: 50) ¡

(⊕n)[x,(x+n)] ,! 52 (⇒E: 49,51) ¡

(((n+1)-n) _ (m-n))[x] ,! 53 (=E: 14,45) ¡

((((n+1)-n) _ (m-n))[x] ⇒ ((n+1) _ m)[(x+n)])
,! 54 (∀E: P55; (n+1): V1.7,11) ¡

(((n+1)-n) _ (m-n))[x] ⇒ ((n+1) _ m)[(x+n)]
,! 55 (()E: 54) ¡

((n+1) _ m)[(x+n)] ,! 56 (⇒E: 53,55) ¡

((n+1) _ m)[(x+n)] & (F^D) ≡ ((n+1) _ m)
,! 57 (&I: 3,56) ¡

(((n+1) _ m)[(x+n)] & (F^D) ≡ ((n+1) _ m)
⇒ (F^D)[(x+n)])
,! 58 (∀E: II1.36; (x+n): V1.7,49) ¡

((n+1) _ m)[(x+n)] & (F^D) ≡ ((n+1) _ m) ⇒ (F^D)[(x+n)]
,! 59 (()E: 58) ¡

(F^D)[(x+n)] ,! 60 (⇒E: 57,59) ¡

((F^D)[(x+n)] ⇒ ∃y F[(x+n),y]) ,! 61 (∀E: III5.3; (x+n): V1.7,49) ¡

(F^D)[(x+n)] ⇒ ∃y F[(x+n),y] ,! 62 (()E: 61) ¡

∃y F[(x+n),y] ,! 63 (⇒E: 60,62) ¡

F[(x+n),y] ,! 64 (⇒E: 63) ¡

(⊕n)[x,(x+n)] & F[(x+n),y] ,! 65 (&I: 52,64) ¡

((⊕n)[x,(x+n)] & F[(x+n),y] ⇒ ((⊕n) ∘ F)[x,y])
,! 66 (∀E: III10.5; (x+n): V1.7,49) ¡

(⊕n)[x,(x+n)] & F[(x+n),y] ⇒ ((⊕n) ∘ F)[x,y]
,! 67 (()E: 66) ¡

((⊕n) ∘ F)[x,y] ,! 68 (⇒E: 65,67) ¡

∃y ((⊕n) ∘ F)[x,y] ,! 69 (∃I: 68) ¡

(1 _ (m-n))[x] ⇒ ∃y ((⊕n) ∘ F)[x,y]
,! 70 (⇒I: 45,69) ¡

∃y ((⊕n) ∘ F)[x,y] ⇔ (1 _ (m-n))[x]
,! 71 (⇔I: 44,70) ¡

(∃y ((⊕n) ∘ F)[x,y] ⇔ (1 _ (m-n))[x])
,! 72 (()I: 71) ¡

∀x(∃y ((⊕n) ∘ F)[x,y] ⇔ (1 _ (m-n))[x])
,! 73 (∀I: 72) ¡

(((⊕n) ∘ F)D) ≡ (1 _ (m-n)) ,! 74 (⇒E: 16,73) ¡

(FD) ≡ ((n+1) _ m) & ≤[n,m] ⇒ (((⊕n) ∘ F)D) ≡ (1 _ (m-n))
,! 75 (⇒I: 2,74) ¡

((FD) ≡ ((n+1) _ m) & ≤[n,m] ⇒ (((⊕n) ∘ F)D) ≡ (1 _ (m-n)))
,! 76 (()I: 75) ¡

∀n∀m∀F ((FD) ≡ ((n+1) _ m) & ≤[n,m]
⇒ (((⊕n) ∘ F)D) ≡ (1 _ (m-n)))
! 77 (∀I: 1,76) ¡

□

! **58.** The finite interval between 1 and n numbers n (when n is a finite number). ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ ℕ[n,(1 _ n)]) ¡

! We proceed by induction, taking ϕ to be
ℕ[n,(1 _ n)]
It must be shown that
ℕ[0,(1 _ 0)]
and
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & ℕ[n,(1 _ n)] ⇒ ℕ[m,(1 _ m)]) ¡

! To prove: ℕ[0,(1 _ 0)] ¡

(<[0,1] ⇒ (1 _ 0) ≡ ϕ) ,! 1 (∀E: P17) ¡

<[0,1] ⇒ (1 _ 0) ≡ ϕ ,! 2 (()E: 1) ¡

(1 _ 0) ≡ ϕ ,! 3 (⇒E: V4.27,2) ¡

((1 _ 0) ≡ ϕ ⇒ ℕ[0,(1 _ 0)]) ,! 4 (∀E: IV3.2) ¡

(1 _ 0) ≡ ϕ ⇒ ℿ[0,(1 _ 0)] ,! 5 (()E: 4) ¡

ℿ[0,(1 _ 0)] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

! To prove:
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & ℿ[n,(1 _ n)] ⇒ ℿ[m,(1 _ m)]) ¡

n,**m** ,! 7 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℿ[**n**,(1 _ **n**)] ,! 8 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 9 (&E: 8) ¡

ω[**n**] ,! 10 (&E: 8) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**]) ,! 11 (∀E: IV8.2) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**] ,! 12 (()E: 11) ¡

ω[**m**] ,! 13 (⇒E: 9,12) ¡

¬ (1 _ **n**)[(**n**+1)] ,! 14 (∀E: P12) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (1 _ **n**)[(**n**+1)] & ℿ[**n**,(1 _ **n**)]
,! 15 (&I: 8,14) ¡

ω[**n**] & ω[1] ,! 16 (&I: IV9.2,10)
¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (1 _ **n**)[(**n**+1)] & ℿ[**n**,(1 _ **n**)]
⇒ ℿ[**m**,((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•))])
,! 17 (∀E: IV2.12;
(**n**+1): V1.7,16) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (1 _ **n**)[(**n**+1)] & ℿ[**n**,(1 _ **n**)]
⇒ ℿ[**m**,((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•))]
,! 18 (()E: 17) ¡

ℿ[**m**,((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•))] ,! 19 (⇒E: 15,18) ¡

ω[**m**] & ℿ[**m**,((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•))] ,! 20 (&I: 13,19) ¡

(ω[**n**] ⇒ ≤[1,(**n**+1)]) ,! 21 (∀E: V3.37) ¡

ω[**n**] ⇒ ≤[1,(**n**+1)] ,! 22 (()E: 21) ¡

≤[1,(**n**+1)] ,! 23 (⇒E: 10,22) ¡

(≤[1,(**n**+1)] ⇒ ((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•)) ≡ (1 _ (**n**+1)))
,! 24 (∀E: P33) ¡

≤[1,(**n**+1)] ⇒ ((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•)) ≡ (1 _ (**n**+1))
,! 25 (()E: 24) ¡

((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•)) ≡ (1 _ (**n**+1)) ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

ω[**m**] & ♏[**m**,((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•))]
& ((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•)) ≡ (1 _ (**n**+1))
,! 27 (&I: 20,26) ¡

(ω[**m**] & ♏[**m**,((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•))]
& ((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•)) ≡ (1 _ (**n**+1))
⇒ ♏[**m**,(1 _ (**n**+1))])
,! 28 (∀E: IV4.5) ¡

ω[**m**] & ♏[**m**,((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•))]
& ((1 _ **n**) ∪ ((**n**+1)•)) ≡ (1 _ (**n**+1))
⇒ ♏[**m**,(1 _ (**n**+1))]
,! 29 (()E: 28) ¡

♏[**m**,(1 _ (**n**+1))] ,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ (**n**+1) = **m**) ,! 31 (∀E: V2.47) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ (**n**+1) = **m** ,! 32 (()E: 31) ¡

(**n**+1) = **m** ,! 33 (⇒E: 9,32) ¡

♏[**m**,(1 _ **m**)] ,! 34 (=E: 30,33) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ♏[**n**,(1 _ **n**)] ⇒ ♏[**m**,(1 _ **m**)]
,! 35 (⇒I: 8,34) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ♏[**n**,(1 _ **n**)] ⇒ ♏[**m**,(1 _ **m**)])
,! 36 (()I: 35) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & ♏[n,(1 _ n)] ⇒ ♏[m,(1 _ m)])
,! 37 (∀I: 1,36) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ♏[n,(1 _ n)]) ! 38 (Induct: 6,37)
¡

▯

! **59.** The finite interval between 0 and n numbers (n+1) (when n is a finite number). ¡

⊦ ∀n (ω[n] ⇒ ♏[(n+1),(0 _ n)]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[1] ,! 3 (&I: IV9.2,2) ¡

(ω[**n**] & ω[1] ⇒ ω[(**n**+1)]) ,! 4 (∀E: V1.8) ¡

ω[n] & ω[1] ⇒ ω[(n+1)] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[(n+1)] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(ω[(n+1)] ⇒ 𝔑[(n+1),(1 _ (n+1))]) ,! 7 (∀E: P58; (n+1): V1.7,3) ¡

ω[(n+1)] ⇒ 𝔑[(n+1),(1 _ (n+1))] ,! 8 (()E: 7) ¡

𝔑[(n+1),(1 _ (n+1))] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[(n+1)] & 𝔑[(n+1),(1 _ (n+1))] ,! 10 (&I: 6,9) ¡

ω[0] & ω[n] & ω[1] ,! 11 (&I: ω0,3) ¡

(ω[0] & ω[n] & ω[1] ⇒ (0 _ n) ~ ((0+1) _ (n+1))) ,! 12 (∀E: P56) ¡

ω[0] & ω[n] & ω[1] ⇒ (0 _ n) ~ ((0+1) _ (n+1)) ,! 13 (()E: 12) ¡

(0 _ n) ~ ((0+1) _ (n+1)) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

(0 _ n) ~ (1 _ (n+1)) ,! 15 (=E: V2.67,14) ¡

ω[(n+1)] & 𝔑[(n+1),(1 _ (n+1))] & (0 _ n) ~ (1 _ (n+1)) ,! 16 (&I: 10,15) ¡

(ω[(n+1)] & 𝔑[(n+1),(1 _ (n+1))] & (0 _ n) ~ (1 _ (n+1)) ⇒ 𝔑[(n+1),(0 _ n)]) ,! 17 (∀E: IV4.3; (n+1): V1.7,3) ¡

ω[(n+1)] & 𝔑[(n+1),(1 _ (n+1))] & (0 _ n) ~ (1 _ (n+1)) ⇒ 𝔑[(n+1),(0 _ n)] ,! 18 (()E: 17) ¡

𝔑[(n+1),(0 _ n)] ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

ω[n] ⇒ 𝔑[(n+1),(0 _ n)] ,! 20 (⇒I: 2,19) ¡

(ω[n] ⇒ 𝔑[(n+1),(0 _ n)]) ,! 21 (()I: 20) ¡

∀n (ω[n] ⇒ 𝔑[(n+1),(0 _ n)]) ! 22 (∀I: 1,21) ¡

▯

! **60.** The finite interval between n and m numbers ((m-n)+1) (when n is less than or equal to m). ¡

⊦ ∀n∀m (≤[n,m] ⇒ 𝔑[((m-n)+1),(n _ m)]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[n,m] ⇒ ω[(m-n)]) ,! 3 (∀E: V5.8) ¡

≤[n,m] ⇒ ω[(m-n)] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[(m-n)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[(m-n)] & ω[1] ,! 6 (&I: IV9.2,5) ¡

(ω[(m-n)] & ω[1] ⇒ ω[((m-n)+1)]) ,! 7 (∀E: V1.8;
(m-n): V5.7,2) ¡

ω[(m-n)] & ω[1] ⇒ ω[((m-n)+1)] ,! 8 (()E: 7) ¡

ω[((m-n)+1)] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

⊏⊏⊏⊏(ω[(m-n)] ⇒ ♏[((m-n)+1),(0 _ (m-n))])
,! 10 (∀E: P59;
(m-n): V5.7,2) ¡

ω[(m-n)] ⇒ ♏[((m-n)+1),(0 _ (m-n))]
,! 11 (()E: 10) ¡

♏[((m-n)+1),(0 _ (m-n))] ,! 12 (⇒E: 5,11) ¡

ω[((m-n)+1)] & ♏[((m-n)+1),(0 _ (m-n))]
,! 13 (&I: 9,12) ¡

ω[0] & ω[(m-n)] ,! 14 (&I: ω0,5) ¡

(≤[n,m] ⇒ ω[n]) ,! 15 (∀E: V3.6) ¡

≤[n,m] ⇒ ω[n] ,! 16 (()E: 15) ¡

ω[n] ,! 17 (⇒E: 2,16) ¡

ω[0] & ω[(m-n)] & ω[n] ,! 18 (&I: 14,17) ¡

(ω[0] & ω[(m-n)] & ω[n]
⇒ (0 _ (m-n)) ~ ((0+n) _ ((m-n)+n)))
,! 19 (∀E: P56;
(m-n): V5.7,2) ¡

ω[0] & ω[(m-n)] & ω[n] ⇒ (0 _ (m-n)) ~ ((0+n) _ ((m-n)+n))
,! 20 (()E: 19) ¡

(0 _ (m-n)) ~ ((0+n) _ ((m-n)+n)) ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

(ω[n] ⇒ (0+n) = n) ,! 22 (∀E: V2.33) ¡

ω[n] ⇒ (0+n) = n ,! 23 (()E: 22) ¡

(0+n) = n ,! 24 (⇒E: 17,23) ¡

(0 _ (m-n)) ~ (n _ ((m-n)+n)) ,! 25 (=E: 21,24) ¡

(≤[n,m] ⇒ ((m-n)+n) = m) ,! 26 (∀E: V6.3) ¡

≤[n,m] ⇒ ((m-n)+n) = m ,! 27 (()E: 26) ¡

((m-n)+n) = m ,! 28 (⇒E: 2,27) ¡

(0 _ (m-n)) ~ (n _ m) ,! 29 (=E: 21,28) ¡

ω[((m-n)+1)] & 𝔑[((m-n)+1),(0 _ (m-n))]
& (0 _ (m-n)) ~ (n _ m)
,! 30 (&I: 13,29) ¡

(ω[((m-n)+1)] & 𝔑[((m-n)+1),(0 _ (m-n))]
& (0 _ (m-n)) ~ (n _ m)
⇒ 𝔑[((m-n)+1),(n _ m)])
,! 31 (∀E: IV4.2;
((m-n)+1): V1.7,6) ¡

ω[((m-n)+1)] & 𝔑[((m-n)+1),(0 _ (m-n))]
& (0 _ (m-n)) ~ (n _ m)
⇒ 𝔑[((m-n)+1),(n _ m)]
,! 32 (()E: 31) ¡

𝔑[((m-n)+1),(n _ m)] ,! 33 (⇒E: 30,32) ¡

≤[n,m] ⇒ 𝔑[((m-n)+1),(n _ m)] ,! 34 (⇒I: 2,33) ¡

(≤[n,m] ⇒ 𝔑[((m-n)+1),(n _ m)]) ,! 35 (()I: 34) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ 𝔑[((m-n)+1),(n _ m)]) ! 36 (∀I: 1,35) ¡

▯

! **61.** Every finite interval is finite. ¡

⊦ ∀b∀c ƒ (b _ c) ¡

b,c ,! 1 (Prem) ¡

(≤[b,c] ∨ ¬ ≤[b,c]) ,! 2 (∀E: I3.18) ¡

≤[b,c] ∨ ¬ ≤[b,c] ,! 3 (()E: 2) ¡

≤[b,c] ,! 4 (Prem) ¡

(≤[b,c] ⇒ 𝔑[((c-b)+1),(b _ c)]) ,! 5 (∀E: P60) ¡

≤[b,c] ⇒ 𝔑[((c-b)+1),(b _ c)] ,! 6 (()E: 5) ¡

𝔑[((c-b)+1),(b _ c)] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

ω[(**c**-**b**)] & ω[1] ,! 8 (𝕋E: V1.7,7) ¡

(ω[(**c**-**b**)] & ω[1] ⇒ ω[((**c**-**b**)+1)]) ,! 9 (∀E: V1.8) ¡

ω[(**c**-**b**)] & ω[1] ⇒ ω[((**c**-**b**)+1)] ,! 10 (()E: 9) ¡

ω[((**c**-**b**)+1)] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[((**c**-**b**)+1)] & 𝔑[((**c**-**b**)+1),(**b** _ **c**)] ,! 12 (&I: 7,11) ¡

(ω[((**c**-**b**)+1)] & 𝔑[((**c**-**b**)+1),(**b** _ **c**)] ⇒ *f* (**b** _ **c**))
,! 13 (∀E: IV5.2;
((**c**-**b**)+1): V1.7,8) ¡

ω[((**c**-**b**)+1)] & 𝔑[((**c**-**b**)+1),(**b** _ **c**)] ⇒ *f* (**b** _ **c**)
,! 14 (()E: 13) ¡

f (**b** _ **c**) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

≤[**b**,**c**] ⇒ *f* (**b** _ **c**) ,! 16 (⇒I: 4,15) ¡

¬ ≤[**b**,**c**] ,! 17 (Prem) ¡

(¬ ≤[**b**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**) ≡ ϕ) ,! 18 (∀E: P16) ¡

¬ ≤[**b**,**c**] ⇒ (**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 19 (()E: 18) ¡

(**b** _ **c**) ≡ ϕ ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

((**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ *f* (**b** _ **c**)) ,! 21 (∀E: IV5.8) ¡

(**b** _ **c**) ≡ ϕ ⇒ *f* (**b** _ **c**) ,! 22 (()E: 21) ¡

f (**b** _ **c**) ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

¬ ≤[**b**,**c**] ⇒ *f* (**b** _ **c**) ,! 24 (⇒I: 17,23) ¡

f (**b** _ **c**) ,! 25 (∨I: 3,16,24) ¡

∀b∀c *f* (b _ c) ! 26 (∀I: 1,25) ¡

▯

! **62.** ¡

⊢ ∀P∀b∀c (P ⊆ (b _ c) ⇒ *f* P) ¡

P,**b**,**c** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ (**b** _ **c**) ,! 2 (Prem) ¡

f (**b** _ **c**) ,! 3 (∀E: P61) ¡

f (**b** _ **c**) & **P** ⊆ (**b** _ **c**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(ƒ (b _ c) & P ⊆ (b _ c) ⇒ ƒ P) ,! 5 (∀E: IV5.12) ¡

ƒ (b _ c) & P ⊆ (b _ c) ⇒ ƒ P ,! 6 (()E: 5) ¡

ƒ P ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ (b _ c) ⇒ ƒ P ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(P ⊆ (b _ c) ⇒ ƒ P) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀b∀c (P ⊆ (b _ c) ⇒ ƒ P) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **63.** ¡

⊦ ∀P∀b∀c∀x (P ⊆ (b _ c) & P[x] ⇒ P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ & ƒ P) ¡

P,b,c,x ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ (b _ c) & P[x] ,! 2 (Prem) ¡

(P ⊆ (b _ c) & P[x] ⇒ P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ)
,! 3 (∀E: P39) ¡

P ⊆ (b _ c) & P[x] ⇒ P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ
,! 4 (()E: 3) ¡

P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

P ⊆ (b _ c) ,! 6 (&E: 2) ¡

(P ⊆ (b _ c) ⇒ ƒ P) ,! 7 (∀E: P62) ¡

P ⊆ (b _ c) ⇒ ƒ P ,! 8 (()E: 7) ¡

ƒ P ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ & ƒ P ,! 10 (&I: 5,9) ¡

P ⊆ (b _ c) & P[x] ⇒ P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ & ƒ P
,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(P ⊆ (b _ c) & P[x] ⇒ P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ & ƒ P)
,! 12 (()I: 11) ¡

∀P∀b∀c∀x (P ⊆ (b _ c) & P[x] ⇒ P ⊆ ω & ¬ P ≡ ϕ & ƒ P)
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **64.** ¡

⊦ ∀P (∃x∀y(ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x]) ⇒ ƒ (ω ∩ P)) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

∃x∀y(ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]) ,! 2 (Prem) ¡

∀y(ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,**z**]) ,! 3 (∃E: 2) ¡

y ,! 4 (Prem) ¡

(ω ∩ **P**)[**y**] ,! 5 (Prem) ¡

((ω ∩ **P**)[**y**] ⇒ ω[**y**] & **P**[**y**]) ,! 6 (∀E: II3.3) ¡

(ω ∩ **P**)[**y**] ⇒ ω[**y**] & **P**[**y**] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[**y**,**z**]) ,! 9 (∀E: 3) ¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[**y**,**z**] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[**y**,**z**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(ω ∩ **P**)[**y**] ⇒ ≤[**y**,**z**] ,! 12 (⇒I: 5,11) ¡

((ω ∩ **P**)[**y**] ⇒ ≤[**y**,**z**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀y ((ω ∩ **P**)[**y**] ⇒ ≤[**y**,**z**]) ,! 14 (∀I: 4,13) ¡

(∀y ((ω ∩ **P**)[y] ⇒ ≤[y,**z**]) ⇒ (ω ∩ **P**) ⊆ (0 _ **z**))
,! 15 (∀E: P40) ¡

∀y ((ω ∩ **P**)[y] ⇒ ≤[y,**z**]) ⇒ (ω ∩ **P**) ⊆ (0 _ **z**)
,! 16 (()I: 15) ¡

(ω ∩ **P**) ⊆ (0 _ **z**) ,! 17 (⇒I: 14,16) ¡

((ω ∩ **P**) ⊆ (0 _ **z**) ⇒ *f* (ω ∩ **P**)) ,! 18 (∀E: P62) ¡

(ω ∩ **P**) ⊆ (0 _ **z**) ⇒ *f* (ω ∩ **P**) ,! 19 (()E: 18) ¡

f (ω ∩ **P**) ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

∃x∀y(ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]) ⇒ *f* (ω ∩ **P**),! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(∃x∀y(ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]) ⇒ *f* (ω ∩ **P**))
,! 22 (()I: 21) ¡

∀P (∃x∀y(ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x]) ⇒ *f* (ω ∩ P))
! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯