!**CHAPTER 8**

BASIC LAWS OF MULTIPLICATION¡

! This chapter establishes most of the basic laws of multiplication. Among the highlights:

P14: 1 is Left Multiplicative Identity
P16: Right Distributive Law of Multiplication over Addition
P18: 1 is Right Mulitplicative Identity
P19: (2 x 2) = 4
P20: Left Distributive Law of Multiplication over Addition
P25: Commutative Law of Multiplication
P28: Associative Law of Multiplication
P35-P36: Distributive Laws of Multiplication over Subtraction
P42-P45: Cancellation Laws of Multiplication
P66: The Division Algorithm (Existence)
P68: Uniqueness of the Division Algorithm

Induction proofs will be more used than in the chapter of addition, where they were shunned to the advantage of appeals to first principles. The development of propositions is ad hoc, and other developments are possible. ¡

! **1.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[k] & n = m ⇒ (n x k) = (m x k)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & **n** = **m** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 3 (&E: 2) ¡

n = **m** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**n** x **k**) = (**n** x **k**) ,! 5 (=I;
(**n** x **k**): C7.9,3) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) ,! 6 (=E: 4,5) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & **n** = **m** ⇒ (**n** x **k**) = (**m** x **k**)
,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] & **n** = **m** ⇒ (**n** x **k**) = (**m** x **k**))
,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[k] & n = m ⇒ (n x k) = (m x k))
! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **2.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[k] & n = m ⇒ (k x n) = (k x m)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & **n** = **m** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

n = **m** ,! 5 (&E: 2) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ,! 6 (&I: 3,4) ¡

(**k** x **n**) = (**k** x **n**) ,! 7 (=I;
(**k** x **n**): C7.9,6) ¡

(**k** x **n**) = (**k** x **m**) ,! 8 (=E:: 5,7) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & **n** = **m** ⇒ (**k** x **n**) = (**k** x **m**)
,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] & **n** = **m** ⇒ (**k** x **n**) = (**k** x **m**))
,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[k] & n = m ⇒ (k x n) = (k x m))
! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **3.** ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ (0 x n) = 0) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[0] & ω[0] & 𝔑[0,ϕ] & Φ $\upsilon_{\mathbf{n}}$ ϕ & **1** Φ & (Φ^{D}) ⊆ ϕ
& 𝔑[0,(Φ^{I})]
⇒ (0 x **n**) = 0)
,! 3 (∀E: C7.18) ¡

ω[0] & ω[0] & 𝔑[0,ϕ] & Φ $\upsilon_{\mathbf{n}}$ ϕ & **1** Φ & (Φ^{D}) ⊆ ϕ & 𝔑[0,(Φ^{I})]
⇒ (0 x **n**) = 0
,! 4 (()E: 3) ¡

ω[0] & 𝔑[0,ϕ] ,! 5 (&I: ω0,IV3.14)
¡

ω[0] & ω[0] & 𝔑[0,ϕ] ,! 6 (&I: ω0,5) ¡

(ω[**n**] ⇒ Φ $\upsilon_{\mathbf{n}}$ ϕ) ,! 7 (∀E: IV11.9) ¡

ω[**n**] ⇒ Φ $\upsilon_{\mathbf{n}}$ ϕ ,! 8 (()E: 7) ¡

Φ $\upsilon_{\mathbf{n}}$ ϕ ,! 9 (⇒E: 2,8) ¡

ω[0] & ω[0] & 𝔑[0,ϕ] & Φ $\upsilon_{\mathbf{n}}$ ϕ ,! 10 (&I: 6,9) ¡

ω[0] & ω[0] & 𝔑[0,ϕ] & Φ $\upsilon_{\mathbf{n}}$ ϕ & **1** Φ ,! 11 (&I: III9.18,10) ¡

ω[0] & ω[0] & 𝔑[0,ϕ] & Φ $\upsilon_{\mathbf{n}}$ ϕ & **1** Φ & (Φ^{D}) ⊆ ϕ
,! 12 (&I: III5.21,11) ¡

ω[0] & 𝔑[0,ϕ] & (Φ^{I}) ≡ ϕ ,! 13 (&I: III6.28,5) ¡

(ω[0] & 𝔑[0,ϕ] & (Φ^{I}) ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,(Φ^{I})])
,! 14 (∀E: IV4.6) ¡

ω[0] & 𝔑[0,ϕ] & (Φ^{I}) ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,(Φ^{I})] ,! 15 (()E: 14) ¡

𝔑[0,(Φ^{I})] ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

ω[0] & ω[0] & 𝔑[0,ϕ] & Φ $\upsilon_{\mathbf{n}}$ ϕ & **1** Φ & (Φ^{D}) ⊆ ϕ & 𝔑[0,(Φ^{I})]
,! 17 (&I: 12,16) ¡

(0 x **n**) = 0 ,! 18 (⇒E: 4,17) ¡

ω[**n**] ⇒ (0 x **n**) = 0 ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(ω[**n**] ⇒ (0 x **n**) = 0) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀n (ω[n] ⇒ (0 x n) = 0) ! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **4.** ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ (n x 0) = 0) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P 𝔑[**n**,P]) ,! 3 (∀E: IV7.8) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P 𝔑[**n**,P] ,! 4 (()E: 3) ¡

∃P 𝔑[**n**,P] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 6 (∃E: 5) ¡

(ω[**n**] & ω[0] & 𝔑[**n**,**P**] & Φ υ_{0} **P** & **1** Φ & (Φ^{D}) ⊆ **P**
& 𝔑[0,(Φ^{I})]
⇒ (**n** x 0) = 0)
,! 7 (∀E: C7.18) ¡

ω[**n**] & ω[0] & 𝔑[**n**,**P**] & Φ υ_{0} **P** & **1** Φ & (Φ^{D}) ⊆ **P** & 𝔑[0,(Φ^{I})]
⇒ (**n** x 0) = 0

,! 8 (()E: 7) ¡

ω[**n**] & ω[0] ,! 9 (&I: 2,ω0) ¡

ω[**n**] & ω[0] & 𝔑[**n**,**P**] ,! 10 (&I: 6,9) ¡

Φ υ_0 **P** , 11 (∀E: IV11.10) ¡

ω[**n**] & ω[0] & 𝔑[**n**,**P**] & Φ υ_0 **P** , 12 (&I: 10,11) ¡

ω[**n**] & ω[0] & 𝔑[**n**,**P**] & Φ υ_0 **P** & **1** Φ , 13 (&I: III9.18,12) ¡

ϕ ⊆ **P** ,! 14 (∀E: II5.9) ¡

(Φ^D) ⊆ ϕ & ϕ ⊆ **P** ,! 15 (&I: III5.21,14) ¡

((Φ^D) ⊆ ϕ & ϕ ⊆ **P** ⇒ (Φ^D) ⊆ **P**) ,! 16 (∀E: II1.5) ¡

(Φ^D) ⊆ ϕ & ϕ ⊆ **P** ⇒ (Φ^D) ⊆ **P** ,! 17 (()E: 16) ¡

(Φ^D) ⊆ **P** ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

ω[**n**] & ω[0] & 𝔑[**n**,**P**] & Φ υ_0 **P** & **1** Φ & (Φ^D) ⊆ **P** , 19 (&I: 13,18) ¡

((Φ^I) ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,(Φ^I)]) ,! 20 (∀E: IV3.2) ¡

(Φ^I) ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,(Φ^I)] ,! 21 (()E: 20) ¡

𝔑[0,(Φ^I)] ,! 22 (⇒E: III6.28,21) ¡

ω[**n**] & ω[0] & 𝔑[**n**,**P**] & Φ υ_0 **P** & **1** Φ & (Φ^D) ⊆ **P** & 𝔑[0,(Φ^I)] , 23 (&I: 19,22) ¡

(**n** x 0) = 0 ,! 24 (⇒E: 8,23) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** x 0) = 0 ,! 25 (⇒I: 2,24) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** x 0) = 0) ,! 26 (()I: 25) ¡

∀n (ω[n] ⇒ (n x 0) = 0) ! 27 (∀I: 1,26) ¡

▯

! **5.** ¡

⊢ ∀n∀m (¬ (n x m) = 0 & ω[m] ⇒ ¬ n = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

n = 0 ,! 5 (Prem) ¡

(ω[**m**] ⇒ (0 x **m**) = 0) ,! 6 (∀E: P3) ¡

ω[**m**] ⇒ (0 x **m**) = 0 ,! 7 (()E: 6) ¡

(0 x **m**) = 0 ,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

(**n** x **m**) = 0 ,! 9 (=E: 5,8) ¡

ℑ ,! 10 (ℑI: 3,9) ¡

n = 0 ⇒ ℑ ,! 11 (⇒I: 5,10) ¡

¬ **n** = 0 ,! 12 (¬I: 11) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**m**] ⇒ ¬ **n** = 0 ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**m**] ⇒ ¬ **n** = 0) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m (¬ (n x m) = 0 & ω[m] ⇒ ¬ n = 0) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **6.** ¡

⊢ ∀n∀m (¬ (n x m) = 0 & ω[n] ⇒ ¬ m = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**n**] ,! 4 (&E: 2) ¡

m = 0 ,! 5 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** x 0) = 0) ,! 6 (∀E: P4) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** x 0) = 0 ,! 7 (()E: 6) ¡

(**n** x 0) = 0 ,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

(**n** x **m**) = 0 ,! 9 (=E: 5,8) ¡

ℑ ,! 10 (ℑI: 3,9) ¡

m = 0 ⇒ ℑ ,! 11 (⇒I: 5,10) ¡

¬ **m** = 0 ,! 12 (¬I: 11) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] ⇒ ¬ **m** = 0 ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] ⇒ ¬ **m** = 0) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m (¬ (n x m) = 0 & ω[n] ⇒ ¬ m = 0) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **7.** ¡

⊦ ∀n∀m (¬ (n x m) = 0 & ω[n] & ω[m] ⇒ ¬ n = 0 & ¬ m = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 5 (&E: 2) ¡

(¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] ⇒ ¬ **m** = 0) ,! 6 (∀E: P6) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] ⇒ ¬ **m** = 0 ,! 7 (()E: 6) ¡

¬ **m** = 0 ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**m**] ,! 9 (&I: 4,5) ¡

(¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**m**] ⇒ ¬ **n** = 0) ,! 10 (∀E: P5) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**m**] ⇒ ¬ **n** = 0 ,! 11 (()E: 10) ¡

¬ **n** = 0 ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0 ,! 13 (&I: 8,12) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0
,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0)
,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀m (¬ (n x m) = 0 & ω[n] & ω[m] ⇒ ¬ n = 0 & ¬ m = 0)
! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **8.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k ((n x m) = k & ¬ k = 0 ⇒ ¬ n = 0) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = **k** & ¬ **k** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = **k** ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **k** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 ,! 5 (=E: 3,4) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 6 (𝕋E: C7.9,3) ¡

ω[**m**] ,! 7 (&E: 6) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**m**] ,! 8 (&I: 5,7) ¡

(¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**m**] ⇒ ¬ **n** = 0) ,! 9 (∀E: P5) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**m**] ⇒ ¬ **n** = 0 ,! 10 (()E: 9) ¡

¬ **n** = 0 ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(**n** x **m**) = **k** & ¬ **k** = 0 ⇒ ¬ **n** = 0 ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((**n** x **m**) = **k** & ¬ **k** = 0 ⇒ ¬ **n** = 0) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k ((n x m) = k & ¬ k = 0 ⇒ ¬ n = 0)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **9.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((n x m) = k & ¬ k = 0 ⇒ ¬ m = 0) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = **k** & ¬ **k** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = **k** ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **k** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 ,! 5 (=E: 3,4) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 6 (𝕋E: C7.9,3) ¡

ω[**n**] ,! 7 (&E: 6) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] ,! 8 (&I: 5,7) ¡

(¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] ⇒ ¬ **m** = 0) ,! 9 (∀E: P6) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] ⇒ ¬ **m** = 0 ,! 10 (()E: 9) ¡

¬ **m** = 0 ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(**n** x **m**) = **k** & ¬ **k** = 0 ⇒ ¬ **m** = 0 ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((**n** x **m**) = **k** & ¬ **k** = 0 ⇒ ¬ **m** = 0)   ,! 13 (()I: 12)   ¡

∀n∀m∀k ((n x m) = k & ¬ k = 0 ⇒ ¬ m = 0)
! 14 (∀I: 1,13)   ¡

□

! **10.**   ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((n x m) = k & ¬ k = 0 ⇒ ¬ n = 0 & ¬ m = 0)   ¡

n,**m**,**k**   ,! 1 (Prem)   ¡

(**n** x **m**) = **k** & ¬ **k** = 0   ,! 2 (Prem)   ¡

(**n** x **m**) = **k**   ,! 3 (&E: 2)   ¡

¬ **k** = 0   ,! 4 (&E: 2)   ¡

¬ (**n** x **m**) = 0   ,! 5 (=E: 3,4)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**]   ,! 6 (𝕋E: C7.9,3)   ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] & ω[**m**]   ,! 7 (&I: 5,6)   ¡

(¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0)
,! 8 (∀E: P7)   ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 & ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0
,! 9 (()E: 8)   ¡

¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0   ,! 10 (⇒E: 7,9)   ¡

(**n** x **m**) = **k** & ¬ **k** = 0 ⇒ ¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0
,! 11 (⇒I: 2,10)   ¡

((**n** x **m**) = **k** & ¬ **k** = 0 ⇒ ¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0)
,! 12 (()I: 11)   ¡

∀n∀m∀k ((n x m) = k & ¬ k = 0 ⇒ ¬ n = 0 & ¬ m = 0)
! 13 (∀I: 1,12)   ¡

□

! **11.**   ¡

⊢ (0 x 0) = 0   ¡

(ω[0] ⇒ (0 x 0) = 0)   ,! 1 (∀E: P3)   ¡

ω[0] ⇒ (0 x 0) = 0   ,! 2 (()E: 1)   ¡

(0 x 0) = 0   ! 3 (⇒E: ω0,2)   ¡

□

! **12.** ¡

⊢ (0 x 1) = 0 ¡

(ω[1] ⇒ (0 x 1) = 0) ,! 1 (∀E: P3) ¡

ω[1] ⇒ (0 x 1) = 0 ,! 2 (()E: 1) ¡

(0 x 1) = 0 ! 3 (⇒E: IV9.2,2) ¡

□

! **13.** ¡

⊢ (1 x 0) = 0 ¡

(ω[0] ⇒ (1 x 0) = 0) ,! 1 (∀E: P4) ¡

ω[0] ⇒ (1 x 0) = 0 ,! 2 (()E: 1) ¡

(1 x 0) = 0 ! 3 (⇒E: ω0,2) ¡

□

! **14.** 1 is Left Multiplicative Identity. (P47 asserts uniqueness.) ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ (1 x n) = n) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P ℕ[**n**,P]) ,! 3 (∀E: IV7.8) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P ℕ[**n**,P] ,! 4 (()E: 3) ¡

∃P ℕ[**n**,P] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ℕ[**n**,**B**] ,! 6 (∃E: 5) ¡

! We need a thing **x**--any thing--in order to talk about a predicate (**x** X **B**). Possible candidates would be 0 or **n**. Instead, we will introduce a new bold character **a** and use predicate (**a** X **B**), with the intention of rendering the proof more intelligible. ¡

∃x ω[x] ,! 7 (∃I: 2) ¡

ω[**a**] ,! 8 (∃E: 7) ¡

(ω[1] & ω[**n**] & ℕ[1,(**a**•)] & (**a** X **B**) $\upsilon_{\mathbf{n}}$ (**a**•) & **1** (**a** X **B**) & ((**a** X **B**)^{D}) ⊆ (**a**•) & ℕ[**n**,((**a** X **B**)^{I})] ⇒ (1 x **n**) = **n**)

,! 9 (∀E: C7.18) ¡

ω[1] & ω[**n**] & 𝔑[1,(**a**•)] & (**a** X **B**) υ**n** (**a**•) & **1** (**a** X **B**)
& ((**a** X **B**)^D) ⊆ (**a**•) & 𝔑[**n**,((**a** X **B**)^I)]
⇒ (1 x **n**) = **n**
,! 10 (()E: 9) ¡

ω[1] & ω[**n**] ,! 11 (&I: IV9.2,2) ¡

𝔑[1,(**a**•)] ,! 12 (∀E IV9.3) ¡

ω[1] & ω[**n**] & 𝔑[1,(**a**•)] ,! 13 (&I: 11,12) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**B**] ,! 14 (&I: 2,6) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**B**] ⇒ (**a** X **B**) υ**n** (**a**•)) ,! 15 (∀E: IV11.12) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**B**] ⇒ (**a** X **B**) υ**n** (**a**•) ,! 16 (()E: 15) ¡

(**a** X **B**) υ**n** (**a**•) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

ω[1] & ω[**n**] & 𝔑[1,(**a**•)] & (**a** X **B**) υ**n** (**a**•)
,! 18 (&I: 13,17) ¡

1 (**a** X **B**) ,! 19 (∀E: III16.28) ¡

ω[1] & ω[**n**] & 𝔑[1,(**a**•)] & (**a** X **B**) υ**n** (**a**•) & **1** (**a** X **B**)
,! 20 (&I: 18,19) ¡

((**a** X **B**)^D) ⊆ (**a**•) ,! 21 (∀E: III16.17) ¡

ω[1] & ω[**n**] & 𝔑[1,(**a**•)] & (**a** X **B**) υ**n** (**a**•) & **1** (**a** X **B**)
& ((**a** X **B**)^D) ⊆ (**a**•)
,! 22 (&I: 20,21) ¡

((**a** X **B**)^I) ≡ **B** ,! 23 (∀E: III16.21) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**B**] & ((**a** X **B**)^I) ≡ **B** ,! 24 (&I: 14,23) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**B**] & ((**a** X **B**)^I) ≡ **B** ⇒ 𝔑[**n**,((**a** X **B**)^I)])
,! 25 (∀E: IV4.6) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**B**] & ((**a** X **B**)^I) ≡ **B** ⇒ 𝔑[**n**,((**a** X **B**)^I)]
,! 26 (()E: 25) ¡

𝔑[**n**,((**a** X **B**)^I)] ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

ω[1] & ω[**n**] & 𝔑[1,(**a**•)] & (**a** X **B**) υ**n** (**a**•) & **1** (**a** X **B**)
& ((**a** X **B**)^D) ⊆ (**a**•) & 𝔑[**n**,((**a** X **B**)^I)]
,! 28 (&I: 22,27) ¡

(1 x **n**) = **n** ,! 29 (⇒E: 10,28) ¡

ω[**n**] ⇒ (1 x **n**) = **n** ,! 30 (⇒I: 2,29) ¡

(ω[**n**] ⇒ (1 x **n**) = **n**) ,! 31 (()I: 30) ¡

∀n (ω[n] ⇒ (1 x n) = n) ! 32 (∀I: 1,31) ¡

▯

! **15.** ¡

⊦ (1 x 1) = 1 ¡

(ω[1] ⇒ (1 x 1) = 1) ,! 1 (∀E: P14) ¡

ω[1] ⇒ (1 x 1) = 1 ,! 2 (()E: 1) ¡

(1 x 1) = 1 ! 3 (⇒E: IV9.2,2) ¡

▯

! **16. Right Distributive Law of Multiplication over Addition.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k]
⇒ ((n + m) x k) = ((n x k) + (m x k))) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 5 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 6 (&I: 3,4) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n** + **m**)]) ,! 7 (∀E: C1.8) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n** + **m**)] ,! 8 (()E: 7) ¡

ω[(**n** + **m**)] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[(**n** + **m**)] & ω[**k**] ,! 10 (&I: 5,9) ¡

(ω[(**n** + **m**)] & ω[**k**]
⇒ ∃P∃R (𝔑[(**n** + **m**),P] & R υ**k** P & **1** R & (R^D) ⊆ P
& 𝔑[((**n** + **m**) x **k**),(R^I)]))
,! 11 (∀E: C7.19; (**n** + **m**): C1.7,6)
¡

ω[(**n** + **m**)] & ω[**k**]
⇒ ∃P∃R (ℕ[(**n** + **m**),P] & R υ$_{\mathbf{k}}$ P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P
& ℕ[((**n** + **m**) x **k**),(R^{I})])
,! 12 (()E: 11) ¡

∃P∃R (ℕ[(**n** + **m**),P] & R υ$_{\mathbf{k}}$ P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P
& ℕ[((**n** + **m**) x **k**),(R^{I})])
,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

∃R (ℕ[(**n** + **m**),**P**] & R υ$_{\mathbf{k}}$ **P** & **1** R & (R^{D}) ⊆ **P**
& ℕ[((**n** + **m**) x **k**),(R^{I})])
,! 14 (∃E: 13) ¡

(ℕ[(**n** + **m**),**P**] & **R** υ$_{\mathbf{k}}$ **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P**
& ℕ[((**n** + **m**) x **k**),(**R**^{I})])
,! 15 (∃E: 14) ¡

ℕ[(**n** + **m**),**P**] & **R** υ$_{\mathbf{k}}$ **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P**
& ℕ[((**n** + **m**) x **k**),(**R**^{I})]
,! 16 (()E: 15) ¡

ℕ[(**n** + **m**),**P**] ,! 17 (&E: 16) ¡

R υ$_{\mathbf{k}}$ **P** ,! 18 (&E: 16) ¡

1 **R** ,! 19 (&E: 16) ¡

(**R**^{D}) ⊆ **P** ,! 20 (&E: 16) ¡

ℕ[((**n** + **m**) x **k**),(**R**^{I})] ,! 21 (&E: 16) ¡

(ℕ[(**n** + **m**),**P**]
⇒ ∃Q∃R (ℕ[**n**,Q] & ℕ[**m**,R] & (Q ∪ R) ≡ **P** & (Q ∩ R) ≡ ϕ))
,! 22 (∀E: C1.22) ¡

ℕ[(**n** + **m**),**P**]
⇒ ∃Q∃R (ℕ[**n**,Q] & ℕ[**m**,R] & (Q ∪ R) ≡ **P** & (Q ∩ R) ≡ ϕ)
,! 23 (()E: 22) ¡

∃Q∃R (ℕ[**n**,Q] & ℕ[**m**,R] & (Q ∪ R) ≡ **P** & (Q ∩ R) ≡ ϕ)
,! 24 (⇒E: 17,23) ¡

∃R (ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,R] & (**A** ∪ R) ≡ **P** & (**A** ∩ R) ≡ ϕ)
,! 25 (∃E: 24) ¡

(ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & (**A** ∪ **B**) ≡ **P** & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ)
,! 26 (∃E: 25) ¡

ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & (**A** ∪ **B**) ≡ **P** & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
,! 27 (()E: 26) ¡

ℿ[**n**,**A**] ,! 28 (&E: 27) ¡

ℿ[**m**,**B**] ,! 29 (&E: 27) ¡

(**A** ∪ **B**) ≡ **P** ,! 30 (&E: 27) ¡

(**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ,! 31 (&E: 27) ¡

(ω[**n**] & ℿ[**n**,**A**] & (**R** ⌈ **A**) υ**k** **A** & **1** (**R** ⌈ **A**) & ((**R** ⌈ **A**)^{D}) ⊆ **A**
⇒ ℿ[(**n** x **k**),((**R** ⌈ **A**)^{I})])
,! 32 (∀E: C7.16) ¡

ω[**n**] & ℿ[**n**,**A**] & (**R** ⌈ **A**) υ**k** **A** & **1** (**R** ⌈ **A**) & ((**R** ⌈ **A**)^{D}) ⊆ **A**
⇒ ℿ[(**n** x **k**),((**R** ⌈ **A**)^{I})]
,! 33 (()E: 32) ¡

ω[**n**] & ℿ[**n**,**A**] ,! 34 (&I: 3,28) ¡

A ⊆ (**A** ∪ **B**) ,! 35 (∀E: II2.12) ¡

(**A** ∪ **B**) ≡ **P** & **A** ⊆ (**A** ∪ **B**) ,! 36 (&I: 30,35) ¡

((**A** ∪ **B**) ≡ **P** & **A** ⊆ (**A** ∪ **B**) ⇒ **A** ⊆ **P**)
,! 37 (∀E: II1.32) ¡

(**A** ∪ **B**) ≡ **P** & **A** ⊆ (**A** ∪ **B**) ⇒ **A** ⊆ **P** ,! 38 (()E: 37) ¡

A ⊆ **P** ,! 39 (⇒E: 36,38) ¡

R υ**k** **P** & **A** ⊆ **P** ,! 40 (&I: 18,39) ¡

(**R** υ**k** **P** & **A** ⊆ **P** ⇒ (**R** ⌈ **A**) υ**k** **A**) ,! 41 (∀E: IV11.8) ¡

R υ**k** **P** & **A** ⊆ **P** ⇒ (**R** ⌈ **A**) υ**k** **A** ,! 42 (()E: 41) ¡

(**R** ⌈ **A**) υ**k** **A** ,! 43 (⇒E: 40,42) ¡

ω[**n**] & ℿ[**n**,**A**] & (**R** ⌈ **A**) υ**k** **A** ,! 44 (&I: 34,43) ¡

(**1** **R** ⇒ **1** (**R** ⌈ **A**)) ,! 45 (∀E: III9.10) ¡

1 **R** ⇒ **1** (**R** ⌈ **A**) ,! 46 (()E: 45) ¡

1 (**R** ⌈ **A**) ,! 47 (⇒E: 19,46) ¡

ω[**n**] & ℿ[**n**,**A**] & (**R** ⌈ **A**) υ**k** **A** & **1** (**R** ⌈ **A**)
,! 48 (&I: 44,47) ¡

((**R** ⌈ **A**)^{D}) ⊆ **A** ,! 49 (∀E: III7.29) ¡

ω[**n**] & ℿ[**n**,**A**] & (**R** ⌈ **A**) υ**k** **A** & **1** (**R** ⌈ **A**) & ((**R** ⌈ **A**)^{D}) ⊆ **A**

,! 50 (&I: 48,49) ¡

𝔑[(**n** x **k**),((**R** ⌈ **A**)^{I})] ,! 51 (⇒E: 33,50) ¡

(ω[**m**] & 𝔑[**m**,**B**] & (**R** ⌈ **B**) υ**k** **B** & **1** (**R** ⌈ **B**) & ((**R** ⌈ **B**)^{D}) ⊆ **B**
⇒ 𝔑[(**m** x **k**),((**R** ⌈ **B**)^{I})])
,! 52 (∀E: C7.16) ¡

ω[**m**] & 𝔑[**m**,**B**] & (**R** ⌈ **B**) υ**k** **B** & **1** (**R** ⌈ **B**) & ((**R** ⌈ **B**)^{D}) ⊆ **B**
⇒ 𝔑[(**m** x **k**),((**R** ⌈ **B**)^{I})]
,! 53 (()E: 52) ¡

ω[**m**] & 𝔑[**m**,**B**] ,! 54 (&I: 4,29) ¡

B ⊆ (**A** ∪ **B**) ,! 55 (∀E: II2.13) ¡

(**A** ∪ **B**) ≡ **P** & **B** ⊆ (**A** ∪ **B**) ,! 56 (&I: 30,55) ¡

((**A** ∪ **B**) ≡ **P** & **B** ⊆ (**A** ∪ **B**) ⇒ **B** ⊆ **P**)
,! 57 (∀E: II1.32) ¡

(**A** ∪ **B**) ≡ **P** & **B** ⊆ (**A** ∪ **B**) ⇒ **B** ⊆ **P** ,! 58 (()E: 57) ¡

B ⊆ **P** ,! 59 (⇒E: 56,58) ¡

R υ**k** **P** & **B** ⊆ **P** ,! 60 (&I: 18,59) ¡

(**R** υ**k** **P** & **B** ⊆ **P** ⇒ (**R** ⌈ **B**) υ**k** **B**) ,! 61 (∀E: IV11.8) ¡

R υ**k** **P** & **B** ⊆ **P** ⇒ (**R** ⌈ **B**) υ**k** **B** ,! 62 (()E: 61) ¡

(**R** ⌈ **B**) υ**k** **B** ,! 63 (⇒E: 60,62) ¡

ω[**m**] & 𝔑[**m**,**B**] & (**R** ⌈ **B**) υ**k** **B** ,! 64 (&I: 54,63) ¡

(**1** **R** ⇒ **1** (**R** ⌈ **B**)) ,! 65 (∀E: III9.10) ¡

1 **R** ⇒ **1** (**R** ⌈ **B**) ,! 66 (()E: 65) ¡

1 (**R** ⌈ **B**) ,! 67 (⇒E: 19,66) ¡

ω[**m**] & 𝔑[**m**,**B**] & (**R** ⌈ **B**) υ**k** **B** & **1** (**R** ⌈ **B**)
,! 68 (&I: 64,67) ¡

((**R** ⌈ **B**)^{D}) ⊆ **B** ,! 69 (∀E: III7.29) ¡

ω[**m**] & 𝔑[**m**,**B**] & (**R** ⌈ **B**) υ**k** **B** & **1** (**R** ⌈ **B**) & ((**R** ⌈ **B**)^{D}) ⊆ **B**
,! 70 (&I: 68,69) ¡

𝔑[(**m** x **k**),((**R** ⌈ **B**)^{I})] ,! 71 (⇒E: 53,70) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 72 (&I: 3,5) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 73 (&I: 4,5) ¡

ω[(**n** + **m**)] & ω[**k**] ,! 74 (&I: 5,9) ¡

(ω[(**n** x **k**)] & ω[(**m** x **k**)] & ω[((**n** + **m**) x **k**)]
& 𝔑[(**n** x **k**),((**R** ⌈ **A**)^{I})] & 𝔑[(**m** x **k**),((**R** ⌈ **B**)^{I})]
& (((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∩ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ φ
& 𝔑[((**n** + **m**) x **k**),(((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∪ ((**R** ⌈ **B**)^{I}))]
⇒ ((**n** + **m**) x **k**) = ((**n** x **k**) + (**m** x **k**)))
,! 75 (∀E: C1.17;
(**n** x **k**): C7.9,72;
(**m** x **k**): C7.9,73;
((**n** + **m**) x **k**): C7.9,74)
¡

ω[(**n** x **k**)] & ω[(**m** x **k**)] & ω[((**n** + **m**) x **k**)]
& 𝔑[(**n** x **k**),((**R** ⌈ **A**)^{I})] & 𝔑[(**m** x **k**),((**R** ⌈ **B**)^{I})]
& (((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∩ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ φ
& 𝔑[((**n** + **m**) x **k**),(((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∪ ((**R** ⌈ **B**)^{I}))]
⇒ ((**n** + **m**) x **k**) = ((**n** x **k**) + (**m** x **k**))
,! 76 (()E: 75) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ ω[(**n** x **k**)]) ,! 77 (∀E: C7.10) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ ω[(**n** x **k**)] ,! 78 (()E: 77) ¡

ω[(**n** x **k**)] ,! 79 (⇒E: 72,78) ¡

(ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ω[(**m** x **k**)]) ,! 80 (∀E: C7.10) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ω[(**m** x **k**)] ,! 81 (()E: 80) ¡

ω[(**m** x **k**)] ,! 82 (⇒E: 73,81) ¡

ω[(**n** x **k**)] & ω[(**m** x **k**)] ,! 83 (&I: 79,82) ¡

(ω[(**n** + **m**)] & ω[**k**] ⇒ ω[((**n** + **m**) x **k**)])
,! 84 (∀E: C7.10;
(**n** + **m**): C1.7,6) ¡

ω[(**n** + **m**)] & ω[**k**] ⇒ ω[((**n** + **m**) x **k**)] ,! 85 (()E: 84) ¡

ω[((**n** + **m**) x **k**)] ,! 86 (⇒E: 74,85) ¡

ω[(**n** x **k**)] & ω[(**m** x **k**)] & ω[((**n** + **m**) x **k**)]
,! 87 (&I: 83,86) ¡

ω[(**n** x **k**)] & ω[(**m** x **k**)] & ω[((**n** + **m**) x **k**)]
& 𝔑[(**n** x **k**),((**R** ⌈ **A**)^{I})]
,! 88 (&I: 51,87) ¡

ω[(**n** x **k**)] & ω[(**m** x **k**)] & ω[((**n** + **m**) x **k**)]
& 𝔑[(**n** x **k**),((**R** ⌈ **A**)^{I})] & 𝔑[(**m** x **k**),((**R** ⌈ **B**)^{I})]
,! 89 (&I: 71,88) ¡

1 **R** & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ,! 90 (&I: 19,31) ¡

(**1** **R** & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ⇒ (((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∩ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ ϕ)
,! 91 (∀E: III9.17) ¡

1 **R** & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ⇒ (((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∩ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ ϕ
,! 92 (()E: 91) ¡

(((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∩ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ ϕ ,! 93 (⇒E: 90,92) ¡

ω[(**n** x **k**)] & ω[(**m** x **k**)] & ω[((**n** + **m**) x **k**)]
& 𝔑[(**n** x **k**),((**R** ⌈ **A**)^{I})] & 𝔑[(**m** x **k**),((**R** ⌈ **B**)^{I})]
& (((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∩ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ ϕ
,! 94 (&I: 89,93) ¡

ω[((**n** + **m**) x **k**)] & 𝔑[((**n** + **m**) x **k**),(**R**^{I})]
,! 95 (&I: 16,86) ¡

(**A** ∪ **B**) ≡ **P** & (**R**^{D}) ⊆ **P** ,! 96 (&I: 20,30) ¡

((**A** ∪ **B**) ≡ **P** & (**R**^{D}) ⊆ **P** ⇒ (**R**^{D}) ⊆ (**A** ∪ **B**))
,! 97 (∀E: II1.31) ¡

(**A** ∪ **B**) ≡ **P** & (**R**^{D}) ⊆ **P** ⇒ (**R**^{D}) ⊆ (**A** ∪ **B**)
,! 98 (()E: 97) ¡

(**R**^{D}) ⊆ (**A** ∪ **B**) ,! 99 (⇒E: 96,98) ¡

((**R**^{D}) ⊆ (**A** ∪ **B**) ⇒ (((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∪ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ (**R**^{I}))
,! 100 (∀E: III7.41)
¡

(**R**^{D}) ⊆ (**A** ∪ **B**) ⇒ (((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∪ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ (**R**^{I})
,! 101 (()E: 100) ¡

(((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∪ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ (**R**^{I}) ,! 102 (⇒E: 99,101)
¡

ω[((**n** + **m**) x **k**)] & 𝔑[((**n** + **m**) x **k**),(**R**^{I})]
& (((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∪ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ (**R**^{I})
,! 103 (&I: 95,102) ¡

(ω[((**n** + **m**) x **k**)] & 𝔑[((**n** + **m**) x **k**),(**R**^{I})]
& (((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∪ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ (**R**^{I})
⇒ 𝔑[((**n** + **m**) x **k**),(((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∪ ((**R** ⌈ **B**)^{I}))])
,! 104 (∀E: IV4.6;
((**n** + **m**) x **k**): C7.9,74)
¡

ω[((**n** + **m**) x **k**)] & 𝔑[((**n** + **m**) x **k**),(**R**^{I})]
& (((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∪ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ (**R**^{I})
⇒ 𝔑[((**n** + **m**) x **k**),(((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∪ ((**R** ⌈ **B**)^{I}))]
,! 105 (()E: 104) ¡

𝔑[((**n** + **m**) x **k**),(((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∪ ((**R** ⌈ **B**)^{I}))]
,! 106 (⇒E: 103,105) ¡

ω[(**n** x **k**)] & ω[(**m** x **k**)] & ω[((**n** + **m**) x **k**)]
& 𝔑[(**n** x **k**),((**R** ⌈ **A**)^{I})] & 𝔑[(**m** x **k**),((**R** ⌈ **B**)^{I})]
& (((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∩ ((**R** ⌈ **B**)^{I})) ≡ ϕ
& 𝔑[((**n** + **m**) x **k**),(((**R** ⌈ **A**)^{I}) ∪ ((**R** ⌈ **B**)^{I}))]
,! 107 (&I: 94,106) ¡

((**n** + **m**) x **k**) = ((**n** x **k**) + (**m** x **k**)) ,! 108 (⇒E: 76,107) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n** + **m**) x **k**) = ((**n** x **k**) + (**m** x **k**))
,! 109 (⇒I: 2,108) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**]
⇒ ((**n** + **m**) x **k**) = ((**n** x **k**) + (**m** x **k**)))
,! 110 (()I: 109) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k]
⇒ ((n + m) x k) = ((n x k) + (m x k)))
! 111 (∀I: 1,110) ¡

□

! **17.** P17 is often cited. ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ((n + 1) x m) = ((n x m) + m)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[1] & ω[**m**] ,! 3 (&I: IV9.2,2) ¡

(ω[**n**] & ω[1] & ω[**m**]
⇒ ((**n** + 1) x **m**) = ((**n** x **m**) + (1 x **m**)))
,! 4 (∀E: P16) ¡

ω[**n**] & ω[1] & ω[**m**] ⇒ ((**n** + 1) x **m**) = ((**n** x **m**) + (1 x **m**))
,! 5 (()E: 4) ¡

((**n** + 1) x **m**) = ((**n** x **m**) + (1 x **m**)) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**m**] ,! 7 (&E: 2) ¡

(ω[**m**] ⇒ (1 x **m**) = **m**) ,! 8 (∀E: P14) ¡

ω[**m**] ⇒ (1 x **m**) = **m** ,! 9 (()E: 8) ¡

(1 x **m**) = **m** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

((**n** + 1) x **m**) = ((**n** x **m**) + **m**) ,! 11 (=E: 6,10) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ((**n** + 1) x **m**) = ((**n** x **m**) + **m**)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ((**n** + 1) x **m**) = ((**n** x **m**) + **m**))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ((n + 1) x m) = ((n x m) + m))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **18. 1 is Right Mulitplicative Identity.** (P46 asserts uniqueness.) ¡

⊦ ∀n (ω[n] ⇒ (n x 1) = n) ¡

! We proceed by induction, taking ϕ to be
(n x 1) = n
It has already been shown that
(0 x 1) = 0
It therefore remains to show
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & (n x 1) = n ⇒ (m x 1) = m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & (**n** x 1) = **n** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**n**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(**n** x 1) = **n** ,! 5 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ **m** = (**n** + 1)) ,! 6 (∀E: C2.48) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ **m** = (**n** + 1) ,! 7 (()E: 6) ¡

m = (**n** + 1) ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

ω[**n**] & ω[1] ,! 9 (&I: IV9.2,4) ¡

ω[**n**] & ω[1] & ω[1] ,! 10 (&I: IV9.2,9) ¡

(ω[**n**] & ω[1] & ω[1]
⇒ ((**n** + 1) x 1) = ((**n** x 1) + (1 x 1)))
,! 11 (∀E: P16) ¡

ω[**n**] & ω[1] & ω[1]

⇒ ((**n** + 1) x 1) = ((**n** x 1) + (1 x 1))
,! 12 (()E: 11) ¡

((**n** + 1) x 1) = ((**n** x 1) + (1 x 1)) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(**m** x 1) = ((**n** x 1) + (1 x 1)) ,! 14 (=E: 8,13) ¡

(**m** x 1) = (**n** + (1 x 1)) ,! 15 (=E: 5,14) ¡

(**m** x 1) = (**n** + 1) ,! 16 (=E: P15,15) ¡

(**m** x 1) = **m** ,! 17 (=E: 8,16) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & (**n** x 1) = **n** ⇒ (**m** x 1) = **m**
,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & (**n** x 1) = **n** ⇒ (**m** x 1) = **m**)
,! 19 (()I: 18) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & (n x 1) = n ⇒ (m x 1) = m)
,! 20 (∀I: 1,19) ¡

∀n (ω[n] ⇒ (n x 1) = n) ! 21 (Induct: P12,20)
¡

□

! **19.** ¡

⊢ (2 x 2) = 4 ¡

ω[2] & ω[2] ,! 1 (&I: IV9.11,
IV9.11) ¡

(2 x 2) = (2 x 2) ,! 2 (=I: C7.9,1) ¡

(2 x 2) = ((1 + 1) x 2) ,! 3 (=E: C2.69,2) ¡

ω[1] & ω[2] ,! 4 (&I: IV9.2,
IV9.11) ¡

(ω[1] & ω[2] ⇒ ((1 + 1) x 2) = ((1 x 2) + 2))
,! 5 (∀E: P17) ¡

ω[1] & ω[2] ⇒ ((1 + 1) x 2) = ((1 x 2) + 2)
,! 6 (()E: 5) ¡

((1 + 1) x 2) = ((1 x 2) + 2) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(2 x 2) = ((1 x 2) + 2) ,! 8 (=E: C2.69,7) ¡

(ω[2] ⇒ (1 x 2) = 2) ,! 9 (∀E: P14) ¡

ω[2] ⇒ (1 x 2) = 2 ,! 10 (()E: 9) ¡

(1 x 2) = 2 ,! 11 (⇒E: IV9.11,10) ¡

(2 x 2) = (2 + 2) ,! 12 (=E: 8,11) ¡

(2 x 2) = 4 ,! 13 (=E: C2.74,12) ¡

▯

! 20. Left Distributive Law of Multiplication over Addition. ¡

⊦ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k]
⇒ (n x (m + k)) = ((n x m) + (n x k))) ¡

! We prove first that

∀n (ω[n]
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ (n x (k + j)) = ((n x k) + (n x j)))).

by induction, taking ϕ to be
∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ (n x (k + j)) = ((n x k) + (n x j)))
It must be shown that
∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ (0 x (k + j)) = ((0 x k) + (0 x j)))
and
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ (n x (k + j)) = ((n x k) + (n x j)))
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ (m x (k + j)) = ((m x k) + (m x j)))) ¡

! To prove:
∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ (0 x (k + j)) = ((0 x k) + (0 x j))) ¡

k,**j** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**k**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**j**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ ω[(**k** + **j**)]) ,! 5 (∀E: C1.8) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ ω[(**k** + **j**)] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[(**k** + **j**)] ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

(ω[(**k** + **j**)] ⇒ (0 x (**k** + **j**)) = 0) ,! 8 (∀E: P3; (**k** + **j**): C1.7,2) ¡

ω[(**k** + **j**)] ⇒ (0 x (**k** + **j**)) = 0 ,! 9 (()E: 8) ¡

(0 x (**k** + **j**)) = 0 ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(ω[**k**] ⇒ (0 x **k**) = 0) ,! 11 (∀E: P3) ¡

ω[**k**] ⇒ (0 x **k**) = 0 ,! 12 (()E: 11) ¡

(0 x **k**) = 0 ,! 13 (⇒E: 3,12) ¡

(ω[**j**] ⇒ (0 x **j**) = 0) ,! 14 (∀E: P3) ¡

ω[**j**] ⇒ (0 x **j**) = 0 ,! 15 (()E: 14) ¡

(0 x **j**) = 0 ,! 16 (⇒E: 4,15) ¡

(0 x (**k** + **j**)) = (0 + 0) ,! 17 (=E: C2.65,10) ¡

(0 x (**k** + **j**)) = ((0 x **k**) + 0) ,! 18 (=E: 13,17) ¡

(0 x (**k** + **j**)) = ((0 x **k**) + (0 x **j**)) ,! 19 (=E: 16,18) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ (0 x (**k** + **j**)) = ((0 x **k**) + (0 x **j**))
,! 20 (⇒I: 2,19) ¡

(ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ (0 x (**k** + **j**)) = ((0 x **k**) + (0 x **j**)))
,! 21 (()I: 20) ¡

∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ (0 x (k + j)) = ((0 x k) + (0 x j)))
,! 22 (∀I: 1,21) ¡

! To prove:
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ (n x (k + j)) = ((n x k) + (n x j)))
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ (m x (k + j)) = ((m x k) + (m x j)))) ¡

n,**m** ,! 23 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ (**n** x (k + j)) = ((**n** x k) + (**n** x j)))
,! 24 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 25 (&E: 24) ¡

ω[**n**] ,! 26 (&E: 24) ¡

∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ (**n** x (k + j)) = ((**n** x k) + (**n** x j)))
,! 27 (&E: 24) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ **m** = (**n** + 1)) ,! 28 (∀E: C2.48) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ **m** = (**n** + 1) ,! 29 (()E: 28) ¡

m = (**n** + 1) ,! 30 (⇒E: 25,29) ¡

k,**j** ,! 31 (Prem) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ,! 32 (Prem) ¡

ω[**k**] ,! 33 (&E: 32) ¡

ω[**j**] ,! 34 (&E: 32) ¡

(ω[**n**] & ω[(**k** + **j**)]
⇒ ((**n** + 1) x (**k** + **j**)) = ((**n** x (**k** + **j**)) + (**k** + **j**)))
,! 35 (∀E: P17;
(**k** + **j**): C1.7,32) ¡

ω[**n**] & ω[(**k** + **j**)]
⇒ ((**n** + 1) x (**k** + **j**)) = ((**n** x (**k** + **j**)) + (**k** + **j**))
,! 36 (()E: 35) ¡

(ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ ω[(**k** + **j**)]) ,! 37 (∀E: C1.8) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ ω[(**k** + **j**)] ,! 38 (()E: 37) ¡

ω[(**k** + **j**)] ,! 39 (⇒E: 32,38) ¡

ω[**n**] & ω[(**k** + **j**)] ,! 40 (&I: 26,39) ¡

((**n** + 1) x (**k** + **j**)) = ((**n** x (**k** + **j**)) + (**k** + **j**))
,! 41 (⇒E: 36,40) ¡

(ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ (**n** x (**k** + **j**)) = ((**n** x **k**) + (**n** x **j**)))
,! 42 (∀E: 27) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ (**n** x (**k** + **j**)) = ((**n** x **k**) + (**n** x **j**))
,! 43 (()E: 42) ¡

(**n** x (**k** + **j**)) = ((**n** x **k**) + (**n** x **j**))
,! 44 (⇒E: 32,43) ¡

((**n** + 1) x (**k** + **j**)) = (((**n** x **k**) + (**n** x **j**)) + (**k** + **j**))
,! 45 (=E: 41,44) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 46 (&I: 26,33) ¡

ω[**n**] & ω[**j**] ,! 47 (&I: 26,34) ¡

(ω[(**n** x **k**)] & ω[(**n** x **j**)] & ω[**k**] & ω[**j**]
⇒ (((**n** x **k**) + (**n** x **j**)) + (**k** + **j**))
= (((**n** x **k**) + **k**) + ((**n** x **j**) + **j**)))
,! 48 (∀E: C2.29;
(**n** x **k**): C7.9,46;
(**n** x **j**): C7.9,47) ¡

ω[(**n** x **k**)] & ω[(**n** x **j**)] & ω[**k**] & ω[**j**]
⇒ (((**n** x **k**) + (**n** x **j**)) + (**k** + **j**))
= (((**n** x **k**) + **k**) + ((**n** x **j**) + **j**))
,! 49 (()E: 48) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ ω[(**n** x **k**)]) ,! 50 (∀E: C7.10) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ ω[(**n** x **k**)] ,! 51 (()E: 50) ¡

ω[(**n** x **k**)] ,! 52 (⇒E: 46,51) ¡

ω[(**n** x **k**)] & ω[**k**] & ω[**j**] ,! 53 (&I: 32,52) ¡

(ω[**n**] & ω[**j**] ⇒ ω[(**n** x **j**)]) ,! 54 (∀E: C7.10) ¡

ω[**n**] & ω[**j**] ⇒ ω[(**n** x **j**)] ,! 55 (()E: 54) ¡

ω[(**n** x **j**)] ,! 56 (⇒E: 47,55) ¡

ω[(**n** x **k**)] & ω[(**n** x **j**)] & ω[**k**] & ω[**j**]
,! 57 (&I: 53,56) ¡

(((**n** x **k**) + (**n** x **j**)) + (**k** + **j**))
= (((**n** x **k**) + **k**) + ((**n** x **j**) + **j**))
,! 58 (⇒E: 49,57) ¡

((**n** + 1) x (**k** + **j**)) = (((**n** x **k**) + **k**) + ((**n** x **j**) + **j**))
,! 59 (=E: 45,58) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ ((**n** + 1) x **k**) = ((**n** x **k**) + **k**))
,! 60 (∀E: P17) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ ((**n** + 1) x **k**) = ((**n** x **k**) + **k**)
,! 61 (()E: 60) ¡

((**n** + 1) x **k**) = ((**n** x **k**) + **k**) ,! 62 (⇒E: 46,61) ¡

((**n** + 1) x (**k** + **j**)) = (((**n** + 1) x **k**) + ((**n** x **j**) + **j**))
,! 63 (=E: 59,62) ¡

(ω[**n**] & ω[**j**] ⇒ ((**n** + 1) x **j**) = ((**n** x **j**) + **j**))
,! 64 (∀E: P17) ¡

ω[**n**] & ω[**j**] ⇒ ((**n** + 1) x **j**) = ((**n** x **j**) + **j**)
,! 65 (()E: 64) ¡

((**n** + 1) x **j**) = ((**n** x **j**) + **j**) ,! 66 (⇒E: 47,65) ¡

((**n** + 1) x (**k** + **j**)) = (((**n** + 1) x **k**) + ((**n** + 1) x **j**))
,! 67 (=E: 63,66) ¡

(**m** x (**k** + **j**)) = ((**m** x **k**) + (**m** x **j**))
,! 68 (=E: 30,67) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ (**m** x (**k** + **j**)) = ((**m** x **k**) + (**m** x **j**))

,! 69 (⇒I: 32,68) ¡

(ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ (**m** x (**k** + **j**)) = ((**m** x **k**) + (**m** x **j**)))
,! 70 (()I: 69) ¡

∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ (**m** x (k + j)) = ((**m** x k) + (**m** x j)))
,! 71 (∀I: 31,70) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ (**n** x (k + j)) = ((**n** x k) + (**n** x j)))
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ (**m** x (k + j)) = ((**m** x k) + (**m** x j)))
,! 72 (⇒I: 24,71) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ (**n** x (k + j)) = ((**n** x k) + (**n** x j)))
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ (**m** x (k + j)) = ((**m** x k) + (**m** x j))))
,! 73 (()I: 72) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ (n x (k + j)) = ((n x k) + (n x j)))
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ (m x (k + j)) = ((m x k) + (m x j))))
,! 74 (∀I: 23,73) ¡

∀n (ω[n]
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ (n x (k + j)) = ((n x k) + (n x j))))
,! 75 (Induct: 22,74)
¡

n,**m**,**k** ,! 76 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ,! 77 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 78 (&E: 77) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 79 (&E: 77) ¡

(ω[**n**]
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ (**n** x (k + j)) = ((**n** x k) + (**n** x j))))
,! 80 (∀E: 75) ¡

ω[**n**]
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ (**n** x (k + j)) = ((**n** x k) + (**n** x j)))
,! 81 (()E: 80) ¡

∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ (**n** x (k + j)) = ((**n** x k) + (**n** x j)))

,! 82 (⇒E: 78,81) ¡

(ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ (**n** x (**m** + **k**)) = ((**n** x **m**) + (**n** x **k**)))
,! 83 (∀E: 82) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ (**n** x (**m** + **k**)) = ((**n** x **m**) + (**n** x **k**))
,! 84 (()E: 83) ¡

(**n** x (**m** + **k**)) = ((**n** x **m**) + (**n** x **k**)) ,! 85 (⇒E: 79,84) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ (**n** x (**m** + **k**)) = ((**n** x **m**) + (**n** x **k**))
,! 86 (⇒I: 77,85) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ (**n** x (**m** + **k**)) = ((**n** x **m**) + (**n** x **k**)))
,! 87 (()I: 86) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k]
⇒ (n x (m + k)) = ((n x m) + (n x k)))
! 88 (∀I: 76,87) ¡

□

! **21.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ (n x (m + 1)) = ((n x m) + n)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[1] ,! 3 (&I: IV9.2,2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[1]
⇒ (**n** x (**m** + 1)) = ((**n** x **m**) + (**n** x 1)))

,! 4 (∀E: P20) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[1] ⇒ (**n** x (**m** + 1)) = ((**n** x **m**) + (**n** x 1))
,! 5 (()E: 4) ¡

(**n** x (**m** + 1)) = ((**n** x **m**) + (**n** x 1)) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**n**] ,! 7 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** x 1) = **n**) ,! 8 (∀E: P18) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** x 1) = **n** ,! 9 (()E: 8) ¡

(**n** x 1) = **n** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(**n** x (**m** + 1)) = ((**n** x **m**) + **n**) ,! 11 (=E: 6,10) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (**n** x (**m** + 1)) = ((**n** x **m**) + **n**)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (**n** x (**m** + 1)) = ((**n** x **m**) + **n**))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ (n x (m + 1)) = ((n x m) + n))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **22.** P22 sets forth the traditional rule on the product of two sums. ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀j (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ω[j]
⇒ ((n + m) x (k + j))
= (((n x k) + (n x j)) + ((m x k) + (m x j))))
¡

n,**m**,**k**,**j** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ω[**j**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**n**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 5 (&E: 2) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ,! 6 (&E: 2) ¡

(ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ ω[(**k** + **j**)]) ,! 7 (∀E: C1.8) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ ω[(**k** + **j**)] ,! 8 (()E: 7) ¡

ω[(**k** + **j**)] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[(**k** + **j**)] ,! 10 (&I: 3,9) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[(**k** + **j**)]
⇒ ((**n** + **m**) x (**k** + **j**)) = ((**n** x (**k** + **j**)) + (**m** x (**k** + **j**))))
,! 11 (∀E: P16;
(**k** + **j**): C1.7,6) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[(**k** + **j**)]
⇒ ((**n** + **m**) x (**k** + **j**)) = ((**n** x (**k** + **j**)) + (**m** x (**k** + **j**)))
,! 12 (()E: 11) ¡

((**n** + **m**) x (**k** + **j**)) = ((**n** x (**k** + **j**)) + (**m** x (**k** + **j**)))
,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ω[**j**] ,! 14 (&I: 4,6) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] & ω[**j**]
⇒ (**n** x (**k** + **j**)) = ((**n** x **k**) + (**n** x **j**)))
,! 15 (∀E: P20) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ (**n** x (**k** + **j**)) = ((**n** x **k**) + (**n** x **j**))
,! 16 (()E: 15) ¡

(**n** x (**k** + **j**)) = ((**n** x **k**) + (**n** x **j**)) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

((**n** + **m**) x (**k** + **j**)) = (((**n** x **k**) + (**n** x **j**)) + (**m** x (**k** + **j**)))
,! 18 (=E: 13,17) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] & ω[**j**] ,! 19 (&I: 5,6) ¡

(ω[**m**] & ω[**k**] & ω[**j**]
⇒ (**m** x (**k** + **j**)) = ((**m** x **k**) + (**m** x **j**)))
,! 20 (∀E: P20) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] & ω[**j**]
⇒ (**m** x (**k** + **j**)) = ((**m** x **k**) + (**m** x **j**))
,! 21 (()E: 20) ¡

(**m** x (**k** + **j**)) = ((**m** x **k**) + (**m** x **j**)) ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

((**n** + **m**) x (**k** + **j**))
= (((**n** x **k**) + (**n** x **j**)) + ((**m** x **k**) + (**m** x **j**)))
,! 23 (=E: 18,22) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ω[**j**]
⇒ ((**n** + **m**) x (**k** + **j**))
= (((**n** x **k**) + (**n** x **j**)) + ((**m** x **k**) + (**m** x **j**)))
,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ω[**j**]
⇒ ((**n** + **m**) x (**k** + **j**))
= (((**n** x **k**) + (**n** x **j**)) + ((**m** x **k**) + (**m** x **j**))))
,! 25 (()I: 24) ¡

∀n∀m∀k∀j (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ω[j]
⇒ ((n + m) x (k + j))
= (((n x k) + (n x j)) + ((m x k) + (m x j))))
! 26 (∀I: 1,25) ¡

! **23.** P23 groups the right-hand side differently than P22. ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀j (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ω[j]
⇒ ((n + m) x (k + j))
= ((n x k) + ((n x j) + ((m x k) + (m x j)))))
¡

n,**m**,**k**,**j** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ω[**j**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[j] ,! 5 (&E: 2) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ω[j]
⇒ ((n + m) x (k + j))
= (((n x k) + (n x j)) + ((m x k) + (m x j))))
,! 6 (∀E: P22) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ω[j]
⇒ ((n + m) x (k + j))
= (((n x k) + (n x j)) + ((m x k) + (m x j)))
,! 7 (()E: 6) ¡

((n + m) x (k + j))
= (((n x k) + (n x j)) + ((m x k) + (m x j)))
,! 8 (⇒E: 2,7) ¡

ω[(n + m)] & ω[(k + j)] ,! 9 (𝕋E: C7.9,8) ¡

ω[((n x k) + (n x j))] & ω[((m x k) + (m x j))]
,! 10 (𝕋E: C1.7,8) ¡

ω[((m x k) + (m x j))] ,! 11 (&E: 10) ¡

ω[(m x k)] & ω[(m x j)] ,! 12 (𝕋E: C1.7,11)¡

ω[n] & ω[k] ,! 13 (&I: 3,4) ¡

ω[n] & ω[j] ,! 14 (&I: 3,5) ¡

(((n + m) x (k + j))
= (((n x k) + (n x j)) + ((m x k) + (m x j)))
⇒ ((n + m) x (k + j))
= ((n x k) + ((n x j) + ((m x k) + (m x j)))))
,! 15 (∀E: C2.18;
((n + m) x (k + j)): C7.9,9;
(n x k): C7.9,13;
(n x j): C7.9,14;
((m x k) + (m x j)): C1.7,12)
¡

((n + m) x (k + j))
= (((n x k) + (n x j)) + ((m x k) + (m x j)))
⇒ ((n + m) x (k + j))
= ((n x k) + ((n x j) + ((m x k) + (m x j))))
,! 16 (()E: 15) ¡

((n + m) x (k + j))
= ((n x k) + ((n x j) + ((m x k) + (m x j))))
,! 17 (⇒E: 8,16) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ω[j]

⇒ ((n + m) x (k + j))
= ((n x k) + ((n x j) + ((m x k) + (m x j))))
,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ω[j]
⇒ ((n + m) x (k + j))
= ((n x k) + ((n x j) + ((m x k) + (m x j)))))
,! 19 (()I: 18) ¡

∀n∀m∀k∀j (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ω[j]
⇒ ((n + m) x (k + j))
= ((n x k) + ((n x j) + ((m x k) + (m x j)))))
! 20 (∀I: 1,19) ¡

□

! **24.** ¡

⊢ ∀n∀m∀i∀j (ω[n] & ω[m] & ω[i] & ω[j]
⇒ ∃k ((n + m) x (i + j)) = ((n x i) + k)) ¡

n,m,i,j ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[i] & ω[j] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[i] & ω[j]
⇒ ((n + m) x (i + j))
= ((n x i) + ((n x j) + ((m x i) + (m x j)))))
,! 3 (∀E: P23) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[i] & ω[j]
⇒ ((n + m) x (i + j))
= ((n x i) + ((n x j) + ((m x i) + (m x j))))
,! 4 (()E: 3) ¡

((n + m) x (i + j))
= ((n x i) + ((n x j) + ((m x i) + (m x j))))
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[(n x i)] & ω[((n x j) + ((m x i) + (m x j)))]
,! 6 (𝕋E: C1.7,5) ¡

ω[((n x j) + ((m x i) + (m x j)))] ,! 7 (&E: 6) ¡

ω[(n x j)] & ω[((m x i) + (m x j))] ,! 8 (𝕋E: C1.7,7) ¡

∃k ((n + m) x (i + j)) = ((n x i) + k)
,! 9 (∃I: 5;
((n x j) + ((m x i) + (m x j))): C1.7,8)
¡

ω[n] & ω[m] & ω[i] & ω[j]
⇒ ∃k ((n + m) x (i + j)) = ((n x i) + k)

,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**i**] & ω[**j**]
⇒ ∃k ((**n** + **m**) x (**i** + **j**)) = ((**n** x **i**) + k))
,! 11 (()I: 10) ¡

∀n∀m∀i∀j (ω[n] & ω[m] & ω[i] & ω[j]
⇒ ∃k ((n + m) x (i + j)) = ((n x i) + k))
! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! 25. The Commutative Law of Multiplication. ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ (n x m) = (m x n)) ¡

! First we prove that
∀n (ω[n] ⇒ ∀k (ω[k] ⇒ (n x k) = (k x n)))
by induction, taking ϕ to be
∀k (ω[k] ⇒ (n x k) = (k x n))
We must prove
∀k (ω[k] ⇒ (0 x k) = (k x 0))
and
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & ∀k (ω[k] ⇒ (n x k) = (k x n))
⇒ ∀k (ω[k] ⇒ (m x k) = (k x m))) ¡

! To prove:
∀k (ω[k] ⇒ (0 x k) = (k x 0)) ¡

k ,! 1 (Prem) ¡

ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**k**] ⇒ (0 x **k**) = 0) ,! 3 (∀E: P3) ¡

ω[**k**] ⇒ (0 x **k**) = 0 ,! 4 (()E: 3) ¡

(0 x **k**) = 0 ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[**k**] ⇒ (**k** x 0) = 0) ,! 6 (∀E: P4) ¡

ω[**k**] ⇒ (**k** x 0) = 0 ,! 7 (()E: 6) ¡

(**k** x 0) = 0 ,! 8 (⇒E: 2,7) ¡

(0 x **k**) = (**k** x 0) ,! 9 (=E: 5,8) ¡

ω[**k**] ⇒ (0 x **k**) = (**k** x 0) ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(ω[**k**] ⇒ (0 x **k**) = (**k** x 0)) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀k (ω[k] ⇒ (0 x k) = (k x 0)) ,! 12 (∀I: 1,11) ¡

! To prove:

```
∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m] & ∀k ( ω[k] ⇒ (n x k) = (k x n) )
       ⇒ ∀k ( ω[k] ⇒ (m x k) = (k x m) ) )                          ¡

n,m                                             ,! 13 (Prem)         ¡

  ω[n] & σ[n,m] & ∀k ( ω[k] ⇒ (n x k) = (k x n) )
                                                ,! 14 (Prem)         ¡

  ω[n] & σ[n,m]                                 ,! 15 (&E: 14)       ¡

  ω[n]                                          ,! 16 (&E: 14)       ¡

  ∀k ( ω[k] ⇒ (n x k) = (k x n) )               ,! 17 (&E: 14)       ¡

  ( ω[n] & σ[n,m] ⇒ m = (n + 1) )               ,! 18 (∀E: C2.48)    ¡

  ω[n] & σ[n,m] ⇒ m = (n + 1)                   ,! 19 (()E: 18)      ¡

  m = (n + 1)                                   ,! 20 (⇒E: 15,19)    ¡

    k                                           ,! 21 (Prem)         ¡

      ω[k]                                      ,! 22 (Prem)         ¡

      ω[n] & ω[k]                               ,! 23 (&I: 16,22)    ¡

      ( ω[n] & ω[k] ⇒ ((n + 1) x k) = ((n x k) + k) )
                                                ,! 24 (∀E: P17)      ¡

      ω[n] & ω[k] ⇒ ((n + 1) x k) = ((n x k) + k)
                                                ,! 25 (()E: 24)      ¡

      ((n + 1) x k) = ((n x k) + k)             ,! 26 (⇒E: 23,25)    ¡

! Applying the induction hypothesis...                               ¡

      ( ω[k] ⇒ (n x k) = (k x n) )              ,! 27 (∀E: 17)       ¡

      ω[k] ⇒ (n x k) = (k x n)                  ,! 28 (()E: 27)      ¡

      (n x k) = (k x n)                         ,! 29 (⇒E: 22,28)    ¡

      ((n + 1) x k) = ((k x n) + k)             ,! 30 (=E: 26,29)    ¡

      ω[k] & ω[n]                               ,! 31 (&I: 16,22)    ¡

      ( ω[k] & ω[n] ⇒ (k x (n + 1)) = ((k x n) + k) )
                                                ,! 32 (∀E: P21)      ¡

      ω[k] & ω[n] ⇒ (k x (n + 1)) = ((k x n) + k)
                                                ,! 33 (()E: 32)      ¡

      (k x (n + 1)) = ((k x n) + k)             ,! 34 (⇒E: 31,33)    ¡

      ((n + 1) x k) = (k x (n + 1))             ,! 35 (=E: 30,34)    ¡
```

(**m** x **k**) = (**k** x **m**) ,! 36 (=E: 20,35) ¡

ω[**k**] ⇒ (**m** x **k**) = (**k** x **m**) ,! 37 (⇒I: 22,36) ¡

(ω[**k**] ⇒ (**m** x **k**) = (**k** x **m**)) ,! 38 (()I: 37) ¡

∀k (ω[k] ⇒ (**m** x k) = (k x **m**)) ,! 39 (∀I: 21,38) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ∀k (ω[k] ⇒ (**n** x k) = (k x **n**))
⇒ ∀k (ω[k] ⇒ (**m** x k) = (k x **m**))
,! 40 (⇒I: 14,39) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ∀k (ω[k] ⇒ (**n** x k) = (k x **n**))
⇒ ∀k (ω[k] ⇒ (**m** x k) = (k x **m**)))
,! 41 (()I: 40) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & ∀k (ω[k] ⇒ (n x k) = (k x n))
⇒ ∀k (ω[k] ⇒ (m x k) = (k x m)))
,! 42 (∀I: 13,41) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ∀k (ω[k] ⇒ (n x k) = (k x n)))
,! 43 (Induct: 12,42)
¡

n,**m** ,! 44 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 45 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 46 (&E: 45) ¡

ω[**m**] ,! 47 (&E: 45) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∀k (ω[k] ⇒ (**n** x k) = (k x **n**)))
,! 48 (∀E: 43) ¡

ω[**n**] ⇒ ∀k (ω[k] ⇒ (**n** x k) = (k x **n**))
,! 49 (()E: 48) ¡

∀k (ω[k] ⇒ (**n** x k) = (k x **n**)) ,! 50 (⇒E: 46,49) ¡

(ω[**m**] ⇒ (**n** x **m**) = (**m** x **n**)) ,! 51 (∀E: 50) ¡

ω[**m**] ⇒ (**n** x **m**) = (**m** x **n**) ,! 52 (()E: 51) ¡

(**n** x **m**) = (**m** x **n**) ,! 53 (⇒E: 47,52) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (**n** x **m**) = (**m** x **n**) ,! 54 (⇒I: 45,53) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (**n** x **m**) = (**m** x **n**)) ,! 55 (()I: 54) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ (n x m) = (m x n)) ! 56 (∀I: 44,55) ¡

□

! P26 and P27 are corollaries of P25. ¡

! **26.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k ((n x m) = k ⇒ (m x n) = k) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = **k** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (𝕋E: C7.9,2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (**n** x **m**) = (**m** x **n**)) ,! 4 (∀E: P25) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (**n** x **m**) = (**m** x **n**) ,! 5 (()E: 4) ¡

(**n** x **m**) = (**m** x **n**) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(**m** x **n**) = **k** ,! 7 (=E: 2,6) ¡

(**n** x **m**) = **k** ⇒ (**m** x **n**) = **k** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((**n** x **m**) = **k** ⇒ (**m** x **n**) = **k**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k ((n x m) = k ⇒ (m x n) = k) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **27.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (k = (n x m) ⇒ k = (m x n)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

k = (**n** x **m**) ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (𝕋E: C7.9,2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (**n** x **m**) = (**m** x **n**)) ,! 4 (∀E: P25) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (**n** x **m**) = (**m** x **n**) ,! 5 (()E: 4) ¡

(**n** x **m**) = (**m** x **n**) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

k = (**m** x **n**) ,! 7 (=E: 2,6) ¡

k = (**n** x **m**) ⇒ **k** = (**m** x **n**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**k** = (**n** x **m**) ⇒ **k** = (**m** x **n**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k (k = (n x m) ⇒ k = (m x n)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **28. The Associative Law of Multiplication.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n x m) x k) = (n x (m x k))) ¡

! First we prove that

∀n (ω[n]
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ ((k x j) x n) = (k x (j x n)))

by induction, taking ϕ to be

∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x n) = (k x (j x n)))

It must be shown that

∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x 0) = (k x (j x 0)))

and

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ ((k x j) x n) = (k x (j x n)))
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ ((k x j) x m) = (k x (j x m)))) ¡

! To prove:

∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x 0) = (k x (j x 0))) ¡

k,**j** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**k**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**j**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ ω[(**k** x **j**)]) ,! 5 (∀E: C7.10) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ ω[(**k** x **j**)] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[(**k** x **j**)] ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

(ω[(**k** x **j**)] ⇒ ((**k** x **j**) x 0) = 0) ,! 8 (∀E: P4; (**k** x **j**): C7.9,2) ¡

ω[(**k** x **j**)] ⇒ ((**k** x **j**) x 0) = 0 ,! 9 (()E: 8) ¡

((**k** x **j**) x 0) = 0 ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(ω[**j**] ⇒ (**j** x 0) = 0) ,! 11 (∀E: P4) ¡

ω[**j**] ⇒ (**j** x 0) = 0 ,! 12 (()E: 11) ¡

(**j** x 0) = 0 ,! 13 (⇒E: 4,12) ¡

(ω[**k**] ⇒ (**k** x 0) = 0) ,! 14 (∀E: P4) ¡

ω[**k**] ⇒ (**k** x 0) = 0 ,! 15 (()E: 14) ¡

(**k** x 0) = 0 ,! 16 (⇒E: 3,15) ¡

(**k** x (**j** x 0)) = 0 ,! 17 (=E: 13,16) ¡

((**k** x **j**) x 0) = (**k** x (**j** x 0)) ,! 18 (=E: 10,17) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ ((**k** x **j**) x 0) = (**k** x (**j** x 0))
,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ ((**k** x **j**) x 0) = (**k** x (**j** x 0)))
,! 20 (()I: 19) ¡

∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x 0) = (k x (j x 0)))
,! 21 (∀I: 1,20) ¡

! To prove:
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x n) = (k x (j x n)))
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j]
⇒ ((k x j) x m) = (k x (j x m)))) ¡

n,**m** ,! 22 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x **n**) = (k x (j x **n**)))
,! 23 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 24 (&E: 23) ¡

ω[**n**] ,! 25 (&E: 23) ¡

∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x **n**) = (k x (j x **n**)))
,! 26 (&E: 23) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ **m** = (**n** + 1)) ,! 27 (∀E: C2.48) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ **m** = (**n** + 1) ,! 28 (()E: 27) ¡

m = (**n** + 1) ,! 29 (⇒E: 24,28) ¡

k,**j** ,! 30 (Prem) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ,! 31 (Prem) ¡

ω[**k**] ,! 32 (&E: 31) ¡

ω[**j**] ,! 33 (&E: 31) ¡

(ω[(**k** x **j**)] & ω[**n**]
⇒ ((**k** x **j**) x (**n** + 1)) = (((**k** x **j**) x **n**) + (**k** x **j**)))
,! 34 (∀E: P21;
(**k** x **j**): C7.9,31) ¡

ω[(**k** x **j**)] & ω[**n**]
⇒ ((**k** x **j**) x (**n** + 1)) = (((**k** x **j**) x **n**) + (**k** x **j**))

,! 35 (()E: 34) ¡

(ω[k] & ω[j] ⇒ ω[(k x j)]) ,! 36 (∀E: C7.10) ¡

ω[k] & ω[j] ⇒ ω[(k x j)] ,! 37 (()E: 36) ¡

ω[(k x j)] ,! 38 (⇒E: 31,37) ¡

ω[(k x j)] & ω[n] ,! 39 (&I: 25,38) ¡

((k x j) x (n + 1)) = (((k x j) x n) + (k x j))
,! 40 (⇒E: 35,39) ¡

! Applying the induction hypothesis... ¡

(ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x n) = (k x (j x n)))
,! 41 (∀E: 26) ¡

ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x n) = (k x (j x n))
,! 42 (()E: 41) ¡

((k x j) x n) = (k x (j x n)) ,! 43 (⇒E: 31,42) ¡

((k x j) x (n + 1)) = ((k x (j x n)) + (k x j))
,! 44 (=E: 40,43) ¡

ω[j] & ω[n] ,! 45 (&I: 25,33) ¡

(ω[k] & ω[(j x n)] & ω[j]
⇒ (k x ((j x n) + j)) = ((k x (j x n)) + (k x j)))
,! 46 (∀E: P20;
(j x n): C7.9,45) ¡

ω[k] & ω[(j x n)] & ω[j]
⇒ (k x ((j x n) + j)) = ((k x (j x n)) + (k x j))
,! 47 (()E: 46) ¡

(ω[j] & ω[n] ⇒ ω[(j x n)]) ,! 48 (∀E: C7.10) ¡

ω[j] & ω[n] ⇒ ω[(j x n)] ,! 49 (()E: 48) ¡

ω[(j x n)] ,! 50 (⇒E: 45,49) ¡

ω[k] & ω[(j x n)] & ω[j] ,! 51 (&I: 31,50) ¡

(k x ((j x n) + j)) = ((k x (j x n)) + (k x j))
,! 52 (⇒E: 47,51) ¡

((k x j) x (n + 1)) = (k x ((j x n) + j))
,! 53 (=E: 44,52) ¡

(ω[j] & ω[n] ⇒ (j x (n + 1)) = ((j x n) + j))
,! 54 (∀E: P21) ¡

ω[**j**] & ω[**n**] ⇒ (**j** x (**n** + 1)) = ((**j** x **n**) + **j**)
,! 55 (()E: 54) ¡

(**j** x (**n** + 1)) = ((**j** x **n**) + **j**) ,! 56 (⇒E: 45,55) ¡

((**k** x **j**) x (**n** + 1)) = (**k** x (**j** x (**n** + 1)))
,! 57 (=E: 53,56) ¡

((**k** x **j**) x **m**) = (**k** x (**j** x **m**)) ,! 58 (=E: 29,57) ¡

ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ ((**k** x **j**) x **m**) = (**k** x (**j** x **m**))
,! 59 (⇒I: 31,58) ¡

(ω[**k**] & ω[**j**] ⇒ ((**k** x **j**) x **m**) = (**k** x (**j** x **m**)))
,! 60 (()I: 59) ¡

∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x **m**) = (k x (j x **m**)))
,! 61 (∀I: 30,60) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x **n**) = (k x (j x **n**)))
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x **m**) = (k x (j x **m**)))
,! 62 (⇒I: 23,61) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x **n**) = (k x (j x **n**)))
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x **m**) = (k x (j x **m**))))
,! 63 (()I: 62) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x n) = (k x (j x n)))
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x m) = (k x (j x m))))
,! 64 (∀I: 22,63) ¡

∀n (ω[n]
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x n) = (k x (j x n))))
,! 65 (Induct: 21,64)
¡

n,**m**,**k** ,! 66 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ,! 67 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 68 (&E: 67) ¡

ω[**k**] ,! 69 (&E: 67) ¡

(ω[**k**]
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x **k**) = (k x (j x **k**))))
,! 70 (∀E: 65) ¡

ω[**k**]
⇒ ∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x **k**) = (k x (j x **k**)))

,! 71 (()E: 70) ¡

∀k∀j (ω[k] & ω[j] ⇒ ((k x j) x **k**) = (k x (j x **k**)))
,! 72 (⇒E: 69,71) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ((**n** x **m**) x **k**) = (**n** x (**m** x **k**)))
,! 73 (∀E: 72) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ((**n** x **m**) x **k**) = (**n** x (**m** x **k**))
,! 74 (()E: 73) ¡

((**n** x **m**) x **k**) = (**n** x (**m** x **k**)) ,! 75 (⇒E: 68,74) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n** x **m**) x **k**) = (**n** x (**m** x **k**))
,! 76 (⇒I: 67,75) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n** x **m**) x **k**) = (**n** x (**m** x **k**)))
,! 77 (()I: 76) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n x m) x k) = (n x (m x k)))
! 78 (∀I: 66,77) ¡

□

! P29 through P32 are corollaries of P28. ¡

! **29.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀j (((n x m) x k) = j ⇒ (n x (m x k)) = j) ¡

n,m,**k**,**j** ,! 1 (Prem) ¡

((**n** x **m**) x **k**) = **j** ,! 2 (Prem) ¡

ω[(**n** x **m**)] & ω[**k**] ,! 3 (𝕋E: C7.9,2) ¡

ω[(**n** x **m**)] ,! 4 (&E: 3) ¡

ω[**k**] ,! 5 (&E: 3) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 6 (𝕋E: C7.9,4) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ,! 7 (&I: 5,6) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n** x **m**) x **k**) = (**n** x (**m** x **k**)))
,! 8 (∀E: P28) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n** x **m**) x **k**) = (**n** x (**m** x **k**))
,! 9 (()E: 8) ¡

((**n** x **m**) x **k**) = (**n** x (**m** x **k**)) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(**n** x (**m** x **k**)) = **j** ,! 11 (=E: 2,10) ¡

((**n** x **m**) x **k**) = **j** ⇒ (**n** x (**m** x **k**)) = **j** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(((**n** x **m**) x **k**) = **j** ⇒ (**n** x (**m** x **k**)) = **j**)
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k∀j (((n x m) x k) = j ⇒ (n x (m x k)) = j)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **30.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀j (j = ((n x m) x k) ⇒ j = (n x (m x k))) ¡

n,**m**,**k**,**j** ,! 1 (Prem) ¡

j = ((**n** x **m**) x **k**) ,! 2 (Prem) ¡

j = **j** ,! 3 (=I) ¡

((**n** x **m**) x **k**) = **j** ,! 4 (=E: 2,3) ¡

(((**n** x **m**) x **k**) = **j** ⇒ (**n** x (**m** x **k**)) = **j**)
,! 5 (∀E: P29) ¡

((**n** x **m**) x **k**) = **j** ⇒ (**n** x (**m** x **k**)) = **j**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**n** x (**m** x **k**)) = **j** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

j = (**n** x (**m** x **k**)) ,! 8 (=E: 3,7) ¡

j = ((**n** x **m**) x **k**) ⇒ **j** = (**n** x (**m** x **k**)) ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**j** = ((**n** x **m**) x **k**) ⇒ **j** = (**n** x (**m** x **k**)) = **j**)
,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m∀k∀j (j = ((n x m) x k) ⇒ j = (n x (m x k)))
! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **31.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀j ((n x (m x k)) = j ⇒ ((n x m) x k) = j) ¡

n,**m**,**k**,**j** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x (**m** x **k**)) = **j** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[(**m** x **k**)] ,! 3 (𝕋E: C7.9,2) ¡

ω[**n**] ,! 4 (&E: 3) ¡

ω[(**m** x **k**)] ,! 5 (&E: 3) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 6 (𝕋E: C7.9,5) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ,! 7 (&I: 4,6) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n x m) x k) = (n x (m x k)))
,! 8 (∀E: P28) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n x m) x k) = (n x (m x k))
,! 9 (()E: 8) ¡

((n x m) x k) = (n x (m x k)) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

((n x m) x k) = j ,! 11 (=E: 2,10) ¡

(n x (m x k)) = j ⇒ ((n x m) x k) = j ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((n x (m x k)) = j ⇒ ((n x m) x k) = j)
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k∀j ((n x (m x k)) = j ⇒ ((n x m) x k) = j)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **32.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀j (j = (n x (m x k)) ⇒ j = ((n x m) x k)) ¡

n,m,k,j ,! 1 (Prem) ¡

j = (n x (m x k)) ,! 2 (Prem) ¡

j = j ,! 3 (=I) ¡

(n x (m x k)) = j ,! 4 (=E: 2,3) ¡

((n x (m x k)) = j ⇒ ((n x m) x k) = j)
,! 5 (∀E: P31) ¡

(n x (m x k)) = j ⇒ ((n x m) x k) = j
,! 6 (()E: 5) ¡

((n x m) x k) = j ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

j = ((n x m) x k) ,! 8 (=E: 3,7) ¡

j = (n x (m x k)) ⇒ j = ((n x m) x k) ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(j = (n x (m x k)) ⇒ j = ((n x m) x k))
,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m∀k∀j (j = (n x (m x k)) ⇒ j = ((n x m) x k))
! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! P33 and P34 show that it is possible to switch the order of a factor in a product. ¡

! **33.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n x m) x k) = ((n x k) x m)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 5 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n** x **m**) x **k**) = (**n** x (**m** x **k**)))
,! 6 (∀E: P28) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n** x **m**) x **k**) = (**n** x (**m** x **k**))
,! 7 (()E: 6) ¡

((**n** x **m**) x **k**) = (**n** x (**m** x **k**)) ,! 8 (⇒E: 2,7) ¡

ω[**k**] & ω[**m**] ,! 9 (&I: 4,5) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ω[**m**] ,! 10 (&I: 3,9) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] & ω[**m**] ⇒ ((**n** x **k**) x **m**) = (**n** x (**k** x **m**)))
,! 11 (∀E: P28) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ω[**m**] ⇒ ((**n** x **k**) x **m**) = (**n** x (**k** x **m**))
,! 12 (()E: 11) ¡

((**n** x **k**) x **m**) = (**n** x (**k** x **m**)) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(ω[**k**] & ω[**m**] ⇒ (**k** x **m**) = (**m** x **k**)) ,! 14 (∀E: P25) ¡

ω[**k**] & ω[**m**] ⇒ (**k** x **m**) = (**m** x **k**) ,! 15 (()E: 14) ¡

(**k** x **m**) = (**m** x **k**) ,! 16 (⇒E: 9,15) ¡

((**n** x **k**) x **m**) = (**n** x (**m** x **k**)) ,! 17 (=E: 13,16) ¡

((**n** x **m**) x **k**) = ((**n** x **k**) x **m**) ,! 18 (=E: 8,17) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n** x **m**) x **k**) = ((**n** x **k**) x **m**)
,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n** x **m**) x **k**) = ((**n** x **k**) x **m**))
,! 20 (()I: 19) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n x m) x k) = ((n x k) x m))
! 21 (∀I: 1,20) ¡

! **34.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (k x (n x m)) = (n x (k x m))) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 3 (&E) ¡

ω[k] ,! 4 (&E) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n x m) x k) = ((n x k) x m)) ,! 5 (∀E: P33) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n x m) x k) = ((n x k) x m) ,! 6 (()E: 5) ¡

((n x m) x k) = ((n x k) x m) ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

ω[n] & ω[k] & ω[m] ,! 8 (&I: 3,4) ¡

(ω[n] & ω[k] & ω[m] ⇒ ((n x k) x m) = (n x (k x m))) ,! 9 (∀E: P28) ¡

ω[n] & ω[k] & ω[m] ⇒ ((n x k) x m) = (n x (k x m)) ,! 10 (()E: 6) ¡

((n x k) x m) = (n x (k x m)) ,! 11 (⇒E: 5,7) ¡

((n x m) x k) = (n x (k x m)) ,! 12 (=E: 7,11) ¡

ω[n] & ω[(k x m)] ,! 13 (𝕋E: C7.9,12) ¡

(((n x m) x k) = (n x (k x m))
⇒ (k x (n x m)) = (n x (k x m)))
,! 14 (∀E: P26;
(n x m): C7.9,3;
(n x (k x m)): C7.9,13) ¡

((n x m) x k) = (n x (k x m))
⇒ (k x (n x m)) = (n x (k x m))
,! 15 (()E: 14) ¡

(k x (n x m)) = (n x (k x m)) ,! 16 (⇒E: 12,15) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (k x (n x m)) = (n x (k x m))
,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (k x (n x m)) = (n x (k x m)))

,! 18 (()I: 17) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (k x (n x m)) = (n x (k x m)))
! 19 (∀I: 1,18) ¡

□

! 35. The Right Distributive Law of Multiplication over Subtraction. ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k]
⇒ ((m - n) x k) = ((m x k) - (n x k))) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**]) ,! 5 (∀E: C3.5) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[**n**] ,! 8 (&E: 7) ¡

ω[**m**] ,! 9 (&E: 7) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 10 (&I: 4,9) ¡

(**m** x **k**) = (**m** x **k**) ,! 11 (=I;
(**m** x **k**): C7.9,10) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m** - **n**) + **n**) = **m**) ,! 12 (∀E: C6.3) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m** - **n**) + **n**) = **m** ,! 13 (()E: 12) ¡

((**m** - **n**) + **n**) = **m** ,! 14 (⇒E: 3,13) ¡

(((**m** - **n**) + **n**) x **k**) = (**m** x **k**) ,! 15 (=E: 11,14) ¡

(ω[(**m** - **n**)] & ω[**n**] & ω[**k**]
⇒ (((**m** - **n**) + **n**) x **k**) = (((**m** - **n**) x **k**) + (**n** x **k**)))
,! 16 (∀E: P16;
(**m** - **n**): C5.7,3) ¡

ω[(**m** - **n**)] & ω[**n**] & ω[**k**]
⇒ (((**m** - **n**) + **n**) x **k**) = (((**m** - **n**) x **k**) + (**n** x **k**))
,! 17 (()E: 16) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 18 (&I: 4,8) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[(**m** - **n**)]) ,! 19 (∀E: C5.8) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[(**m** - **n**)] ,! 20 (()E: 19) ¡

ω[(**m** - **n**)] ,! 21 (⇒E: 3,20) ¡

ω[(**m** - **n**)] & ω[**n**] & ω[**k**] ,! 22 (&I: 18,21) ¡

(((**m** - **n**) + **n**) x **k**) = (((**m** - **n**) x **k**) + (**n** x **k**))
,! 23 (⇒E: 17,22) ¡

(((**m** - **n**) x **k**) + (**n** x **k**)) = (**m** x **k**) ,! 24 (=E: 15,23) ¡

ω[(**m** - **n**)] & ω[**k**] ,! 25 (&I: 4,21) ¡

((((**m** - **n**) x **k**) + (**n** x **k**)) = (**m** x **k**)
⇒ ((**m** x **k**) - (**n** x **k**)) = ((**m** - **n**) x **k**))
,! 26 (∀E: C6.8;
((**m** - **n**) x **k**): C7.9,25;
(**n** x **k**): C7.9,18;
(**m** x **k**): C7.9,10) ¡

(((**m** - **n**) x **k**) + (**n** x **k**)) = (**m** x **k**)
⇒ ((**m** x **k**) - (**n** x **k**)) = ((**m** - **n**) x **k**)
,! 27 (()E: 26) ¡

((**m** x **k**) - (**n** x **k**)) = ((**m** - **n**) x **k**) ,! 28 (⇒E: 24,27) ¡

((**m** - **n**) x **k**) = ((**m** - **n**) x **k**) ,! 29 (=E: 28,28) ¡

((**m** - **n**) x **k**) = ((**m** x **k**) - (**n** x **k**)) ,! 30 (=E: 28,29) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**m** - **n**) x **k**) = ((**m** x **k**) - (**n** x **k**))
,! 31 (⇒I: 2,30) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**m** - **n**) x **k**) = ((**m** x **k**) - (**n** x **k**)))
,! 32 (()I: 31) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m - n) x k) = ((m x k) - (n x k)))
! 33 (∀I: 1,32) ¡

▯

! **36. The Left Distributive Law of Multiplication over Subtraction.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k]
⇒ (k x (m - n)) = ((k x m) - (k x n))) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[k] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m - n) x k) = ((m x k) - (n x k)))
,! 5 (∀E: P35) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m - n) x k) = ((m x k) - (n x k))
,! 6 (()E: 5) ¡

((m - n) x k) = ((m x k) - (n x k)) ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

(≤[n,m] ⇒ ω[(m - n)]) ,! 8 (∀E: C5.8) ¡

≤[n,m] ⇒ ω[(m - n)] ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[(m - n)] ,! 10 (⇒E: 3,9) ¡

ω[(m - n)] & ω[k] ,! 11 (&I: 4,10) ¡

(ω[(m - n)] & ω[k] ⇒ ((m - n) x k) = (k x (m - n)))
,! 12 (∀E: P25;
(m - n): C5.7,3) ¡

ω[(m - n)] & ω[k] ⇒ ((m - n) x k) = (k x (m - n))
,! 13 (()E: 12) ¡

((m - n) x k) = (k x (m - n)) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

(k x (m - n)) = ((m x k) - (n x k)) ,! 15 (=E: 7,14) ¡

(≤[n,m] ⇒ ω[n] & ω[m]) ,! 16 (∀E: C3.5) ¡

≤[n,m] ⇒ ω[n] & ω[m] ,! 17 (()E: 16) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 18 (⇒E: 3,17) ¡

ω[n] ,! 19 (&E: 18) ¡

ω[m] ,! 20 (&E: 18) ¡

ω[m] & ω[k] ,! 21 (&I: 4,20) ¡

(ω[m] & ω[k] ⇒ (m x k) = (k x m)) ,! 22 (∀E: P25) ¡

ω[m] & ω[k] ⇒ (m x k) = (k x m) ,! 23 (()E: 22) ¡

(m x k) = (k x m) ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

(k x (m - n)) = ((k x m) - (n x k)) ,! 25 (=E: 15,24) ¡

ω[n] & ω[k] ,! 26 (&I: 4,19) ¡

(ω[n] & ω[k] ⇒ (n x k) = (k x n)) ,! 27 (∀E: P25) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n** x **k**) = (**k** x **n**) ,! 28 (()E: 27) ¡

(**n** x **k**) = (**k** x **n**) ,! 29 (⇒E: 26,28) ¡

(**k** x (**m** - **n**)) = ((**k** x **m**) - (**k** x **n**)) ,! 30 (=E: 25,29) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ (**k** x (**m** - **n**)) = ((**k** x **m**) - (**k** x **n**))
,! 31 (⇒I: 2,30) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ (**k** x (**m** - **n**)) = ((**k** x **m**) - (**k** x **n**)))
,! 32 (()I: 31) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ (k x (m - n)) = ((k x m) - (k x n)))
! 33 (∀I: 1,32) ¡

▯

! **37.** P37 appears here, rather than with the other propositions on 0 (P3 through 13), in order to group it with P38, whose proof appeals to commutativity (P25). ¡

⊢ ∀n∀m ((n x m) = 0 & ¬ n = 0 ⇒ m = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = 0 & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = 0 ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 5 (𝕋E: C7.9,3) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃P∃R (ℕ[**n**,P] & R υ**m** P & **1** R & (R^D) ⊆ P
& ℕ[(**n** x **m**),(R^I)]))
,! 6 (∀E: C7.19) ¡

ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃P∃R (ℕ[**n**,P] & R υ**m** P & **1** R & (R^D) ⊆ P
& ℕ[(**n** x **m**),(R^I)])
,! 7 (()E: 6) ¡

∃P∃R (ℕ[**n**,P] & R υ**m** P & **1** R & (R^D) ⊆ P & ℕ[(**n** x **m**),(R^I)])
,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

∃R (ℕ[**n**,**P**] & R υ**m** **P** & **1** R & (R^D) ⊆ **P** & ℕ[(**n** x **m**),(R^I)])
,! 9 (∃E: 8) ¡

(ℕ[**n**,**P**] & **R** υ**m** **P** & **1** **R** & (**R**^D) ⊆ **P** & ℕ[(**n** x **m**),(**R**^I)])
,! 10 (∃E: 9) ¡

ℕ[**n**,**P**] & **R** υ**m** **P** & **1** **R** & (**R**^D) ⊆ **P** & ℕ[(**n** x **m**),(**R**^I)]

,! 11 (()E: 10) ¡

ℕ[**n**,**P**] ,! 12 (&E: 11) ¡

R $\upsilon_{\mathbf{m}}$ **P** ,! 13 (&E: 12) ¡

ℕ[(**n** x **m**),($\mathbf{R}^{I}$)] ,! 14 (&E: 11) ¡

(**R** ≣ Φ & ¬ **P** ≡ ϕ & **R** $\upsilon_{\mathbf{m}}$ **P** ⇒ **m** = 0)
,! 15 (∀E: IV11.11) ¡

R ≣ Φ & ¬ **P** ≡ ϕ & **R** $\upsilon_{\mathbf{m}}$ **P** ⇒ **m** = 0 ,! 16 (()E: 15) ¡

ℕ[0,($\mathbf{R}^{I}$)] ,! 17 (=E: 3,14) ¡

(ℕ[0,($\mathbf{R}^{I}$)] ⇒ ($\mathbf{R}^{I}$) ≡ ϕ) ,! 18 (∀E: IV3.1) ¡

ℕ[0,($\mathbf{R}^{I}$)] ⇒ ($\mathbf{R}^{I}$) ≡ ϕ ,! 19 (()E: 18) ¡

($\mathbf{R}^{I}$) ≡ ϕ ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

(($\mathbf{R}^{I}$) ≡ ϕ ⇒ **R** ≣ Φ) ,! 21 (∀E: III6.30) ¡

($\mathbf{R}^{I}$) ≡ ϕ ⇒ **R** ≣ Φ ,! 22 (()E: 21) ¡

R ≣ Φ ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

ℕ[**n**,**P**] & ¬ **n** = 0 ,! 24 (&I: 4,12) ¡

(ℕ[**n**,**P**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃x **P**[x]) ,! 25 (∀E: IV3.17) ¡

ℕ[**n**,**P**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃x **P**[x] ,! 26 (()E: 25) ¡

∃x **P**[x] ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

(∃x **P**[x] ⇒ ¬ **P** ≡ ϕ) ,! 28 (∀E: II5.7) ¡

∃x **P**[x] ⇒ ¬ **P** ≡ ϕ ,! 29 (()E: 28) ¡

¬ **P** ≡ ϕ ,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

R ≣ Φ & ¬ **P** ≡ ϕ ,! 31 (&I: 23,30) ¡

R ≣ Φ & ¬ **P** ≡ ϕ & **R** $\upsilon_{\mathbf{m}}$ **P** ,! 32 (&I: 13,31) ¡

m = 0 ,! 33 (⇒E: 16,32) ¡

(**n** x **m**) = 0 & ¬ **n** = 0 ⇒ **m** = 0 ,! 34 (⇒I: 2,33) ¡

((**n** x **m**) = 0 & ¬ **n** = 0 ⇒ **m** = 0) ,! 35 (()I: 34) ¡

∀n∀m ((n x m) = 0 & ¬ n = 0 ⇒ m = 0) ! 36 (∀I: 1,35) ¡

□

! **38.** ¡

⊦ ∀n∀m ((n x m) = 0 & ¬ m = 0 ⇒ n = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = 0 & ¬ **m** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = 0 ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **m** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

((**n** x **m**) = 0 ⇒ (**m** x **n**) = 0) ,! 5 (∀E: P26) ¡

(**n** x **m**) = 0 ⇒ (**m** x **n**) = 0 ,! 6 (()E: 5) ¡

(**m** x **n**) = 0 ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**m** x **n**) = 0 & ¬ **m** = 0 ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**m** x **n**) = 0 & ¬ **m** = 0 ⇒ **n** = 0) ,! 9 (∀E: P37) ¡

(**m** x **n**) = 0 & ¬ **m** = 0 ⇒ **n** = 0 ,! 10 (()E: 9) ¡

n = 0 ,! 11 (⇒E: 2,10) ¡

(**n** x **m**) = 0 & ¬ **m** = 0 ⇒ **n** = 0 ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((**n** x **m**) = 0 & ¬ **m** = 0 ⇒ **n** = 0) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m ((n x m) = 0 & ¬ m = 0 ⇒ n = 0) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **39.** ¡

⊦ ∀n∀m ((n x m) = 0 ⇒ n = 0 ∨ m = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**n** = 0 ∨ ¬ **n** = 0) ,! 3 (∀E: I3.4) ¡

n = 0 ∨ ¬ **n** = 0 ,! 4 (()E: 3) ¡

n = 0 ,! 5 (Prem) ¡

n = 0 ∨ **m** = 0 ,! 6 (∨I: 5) ¡

n = 0 ⇒ **n** = 0 ∨ **m** = 0 ,! 7 (⇒I: 5,6) ¡

¬ **n** = 0 ,! 8 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = 0 & ¬ **n** = 0 ,! 9 (&I: 2,8) ¡

((**n** x **m**) = 0 & ¬ **n** = 0 ⇒ **m** = 0) ,! 10 (∀E: P37) ¡

(**n** x **m**) = 0 & ¬ **n** = 0 ⇒ **m** = 0 ,! 11 (()E: 10) ¡

m = 0 ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

n = 0 ∨ **m** = 0 ,! 13 (∨I: 12) ¡

¬ **n** = 0 ⇒ **n** = 0 ∨ **m** = 0 ,! 14 (⇒I: 8,13) ¡

n = 0 ∨ **m** = 0 ,! 15 (∨E: 4,7,14) ¡

(**n** x **m**) = 0 ⇒ **n** = 0 ∨ **m** = 0 ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

((**n** x **m**) = 0 ⇒ **n** = 0 ∨ **m** = 0) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m ((n x m) = 0 ⇒ n = 0 ∨ m = 0) ! 18 (∀I: 1,17) ¡

□

! **40.** ¡

⊢ ∀n∀m (¬ n = 0 & ¬ m = 0 ⇒ ¬ (n x m) = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0 ⇒ ¬ (**n** = 0 ∨ **m** = 0))
,! 3 (∀E: I3.14) ¡

¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0 ⇒ ¬ (**n** = 0 ∨ **m** = 0)
,! 4 (()E: 3) ¡

¬ (**n** = 0 ∨ **m** = 0) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**n** x **m**) = 0 ,! 6 (Prem) ¡

((**n** x **m**) = 0 ⇒ **n** = 0 ∨ **m** = 0) ,! 7 (∀E: P39) ¡

(**n** x **m**) = 0 ⇒ **n** = 0 ∨ **m** = 0 ,! 8 (()E: 7) ¡

n = 0 ∨ **m** = 0 ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(**n** = 0 ∨ **m** = 0) ,! 10 (()I: 9) ¡

𝔉 ,! 11 (𝔉I: 5,10) ¡

(**n** x **m**) = 0 ⇒ 𝔉 ,! 12 (⇒I: 6,11) ¡

¬ (**n** x **m**) = 0 ,! 13 (¬I: 12) ¡

¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0 ⇒ ¬ (**n** x **m**) = 0 ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0 ⇒ ¬ (**n** x **m**) = 0) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀m (¬ n = 0 & ¬ m = 0 ⇒ ¬ (n x m) = 0)
! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **41.** P41 is a lemma for P42, where "≤[m,n]" will be eliminated as part of the antecedent. ¡

⊦ ∀n∀m∀k ((n x k) = (m x k) & ¬ k = 0 & ≤[m,n] ⇒ n = m) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 & ≤[**m**,**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **k** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

≤[**m**,**n**] ,! 5 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 6 (𝕋E: C7.9,3) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 7 (𝕋E: C7.9,3) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ ω[(**n** x **k**)]) ,! 8 (∀E: C7.10) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ ω[(**n** x **k**)] ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[(**n** x **k**)] ,! 10 (⇒E: 6,9) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ω[(**n** x **k**)] ,! 11 (&I: 3,10) ¡

((**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ω[(**n** x **k**)]
⇒ ((**n** x **k**) - (**m** x **k**)) = 0)
,! 12 (∀E: C6.27;
(**n** x **k**): C7.9,6;
(**m** x **k**): C7.9,7) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ω[(**n** x **k**)] ⇒ ((**n** x **k**) - (**m** x **k**)) = 0
,! 13 (()E: 12) ¡

((**n** x **k**) - (**m** x **k**)) = 0 ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

ω[**k**] ,! 15 (&E: 6) ¡

≤[**m**,**n**] & ω[**k**] ,! 16 (&I: 5,15) ¡

(≤[**m**,**n**] & ω[**k**]
⇒ ((**n** - **m**) x **k**) = ((**n** x **k**) - (**m** x **k**)))
,! 17 (∀E: P35) ¡

≤[**m**,**n**] & ω[**k**]

⇒ ((**n** - **m**) x **k**) = ((**n** x **k**) - (**m** x **k**))
,! 18 (()E: 17) ¡

((**n** - **m**) x **k**) = ((**n** x **k**) - (**m** x **k**)) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

((**n** - **m**) x **k**) = 0 ,! 20 (=E: 14,19) ¡

((**n** - **m**) x **k**) = 0 & ¬ **k** = 0 ,! 21 (&I: 4,20) ¡

(((**n** - **m**) x **k**) = 0 & ¬ **k** = 0 ⇒ (**n** - **m**) = 0)
,! 22 (∀E: P38;
(**n** - **m**): C5.7,5) ¡

((**n** - **m**) x **k**) = 0 & ¬ **k** = 0 ⇒ (**n** - **m**) = 0
,! 23 (()E: 22) ¡

(**n** - **m**) = 0 ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

((**n** - **m**) = 0 ⇒ **n** = **m**) ,! 25 (∀E: C6.32) ¡

(**n** - **m**) = 0 ⇒ **n** = **m** ,! 26 (()E: 25) ¡

n = **m** ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 & ≤[**m**,**n**] ⇒ **n** = **m**
,! 28 (⇒I: 2,27) ¡

((**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 & ≤[**m**,**n**] ⇒ **n** = **m**)
,! 29 (()I: 28) ¡

∀n∀m∀k ((n x k) = (m x k) & ¬ k = 0 & ≤[m,n] ⇒ n = m)
! 30 (∀I: 1,29) ¡

□

! P42 through P45 group the **Cancellation Laws of Multiplication.** ¡

! **42.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((n x k) = (m x k) & ¬ k = 0 ⇒ n = m) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) ,! 3 (&E) ¡

¬ **k** = 0 ,! 4 (&E) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 5 (𝕋E: C7.9,3) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 6 (𝕋E: C7.9,3) ¡

ω[**n**] ,! 7 (&E: 5) ¡

ω[m] ,! 8 (&E: 6) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 9 (&I: 7,8) ¡

(ω[n] & ω[m] ⇒ ≤[n,m] ∨ ≤[m,n]) ,! 10 (∀E: C3.64) ¡

ω[n] & ω[m] ⇒ ≤[n,m] ∨ ≤[m,n] ,! 11 (()E: 10) ¡

≤[n,m] ∨ ≤[m,n] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

≤[n,m] ,! 13 (Prem) ¡

(m x k) = (m x k) ,! 14 (=E: 3,3) ¡

(m x k) = (n x k) ,! 15 (=E: 3,14) ¡

(m x k) = (n x k) & ¬ k = 0 ,! 16 (&I: 4,15) ¡

(m x k) = (n x k) & ¬ k = 0 & ≤[n,m]
,! 17 (&I: 13,16) ¡

((m x k) = (n x k) & ¬ k = 0 & ≤[n,m] ⇒ m = n)
,! 18 (∀E: P41) ¡

(m x k) = (n x k) & ¬ k = 0 & ≤[n,m] ⇒ m = n
,! 19 (()E: 18) ¡

m = n ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

m = m ,! 21 (=I) ¡

n = m ,! 22 (=E: 20,21) ¡

≤[n,m] ⇒ n = m ,! 23 (⇒I: 13,22) ¡

≤[m,n] ,! 24 (Prem) ¡

(n x k) = (m x k) & ¬ k = 0 & ≤[m,n]
,! 25 (&I: 2,24) ¡

((n x k) = (m x k) & ¬ k = 0 & ≤[m,n] ⇒ n = m)
,! 26 (∀E: P41) ¡

(n x k) = (m x k) & ¬ k = 0 & ≤[m,n] ⇒ n = m
,! 27 (()E: 26) ¡

n = m ,! 28 (⇒E: 25,27) ¡

≤[m,n] ⇒ n = m ,! 29 (⇒I: 24,28) ¡

n = m ,! 30 (∨E: 12,23,29)
¡

(n x k) = (m x k) & ¬ k = 0 ⇒ n = m ,! 31 (⇒I: 2,30) ¡

((n x k) = (m x k) & ¬ k = 0 ⇒ n = m)

,! 32 (()I: 31) ¡

∀n∀m∀k ((n x k) = (m x k) & ¬ k = 0 ⇒ n = m)
! 33 (∀I: 1,32) ¡

▯

! **43.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((k x n) = (m x k) & ¬ k = 0 ⇒ n = m) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**k** x **n**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**k** x **n**) = (**m** x **k**) ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **k** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 5 (𝕋E: C7.9,3) ¡

((**k** x **n**) = (**m** x **k**) ⇒ (**n** x **k**) = (**m** x **k**))
,! 6 (∀E: P26;
(**m** x **k**): C7.9,5) ¡

(**k** x **n**) = (**m** x **k**) ⇒ (**n** x **k**) = (**m** x **k**)
,! 7 (()E: 6) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ,! 9 (Prem) ¡

((**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m**)
,! 10 (∀E: P42) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m** ,! 11 (()E: 10) ¡

n = **m** ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(**k** x **n**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m** ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

((**k** x **n**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m**)
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k ((k x n) = (m x k) & ¬ k = 0 ⇒ n = m)
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **44.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((n x k) = (k x m) & ¬ k = 0 ⇒ n = m) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **k**) = (**k** x **m**) & ¬ **k** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**n** x **k**) = (**k** x **m**) ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **k** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 5 (𝕋E: C7.9,3) ¡

((**n** x **k**) = (**k** x **m**) ⇒ (**n** x **k**) = (**m** x **k**))
,! 6 (∀E: P27;
(**n** x **k**): C7.9,5) ¡

(**n** x **k**) = (**k** x **m**) ⇒ (**n** x **k**) = (**m** x **k**)
,! 7 (()E: 6) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ,! 9 (&I: 4,8) ¡

((**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m**)
,! 10 (∀E: P42) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m** ,! 11 (()E: 10) ¡

n = **m** ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(**n** x **k**) = (**k** x **m**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m** ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

((**n** x **k**) = (**k** x **m**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m**)
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k ((n x k) = (k x m) & ¬ k = 0 ⇒ n = m)
! 15 (∀I: 1,14) ¡

□

! **45.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((k x n) = (k x m) & ¬ k = 0 ⇒ n = m) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**k** x **n**) = (**k** x **m**) & ¬ **k** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**k** x **n**) = (**k** x **m**) ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **k** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**k**] & ω[**m**] ,! 5 (𝕋E: C7.9,3) ¡

((**k** x **n**) = (**k** x **m**) ⇒ (**n** x **k**) = (**k** x **m**))
,! 6 (∀E: P26;
(**k** x **m**): C7.9,5) ¡

(**k** x **n**) = (**k** x **m**) ⇒ (**n** x **k**) = (**k** x **m**)
,! 7 (()E: 6) ¡

(**n** x **k**) = (**k** x **m**) ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

(**n** x **k**) = (**k** x **m**) & ¬ **k** = 0 ,! 9 (&I: 4,8) ¡

((**n** x **k**) = (**k** x **m**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m**)
,! 10 (∀E: P44) ¡

(**n** x **k**) = (**k** x **m**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m** ,! 11 (()E: 10) ¡

n = **m** ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(**k** x **n**) = (**k** x **m**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m** ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

((**k** x **n**) = (**k** x **m**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m**)
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k ((k x n) = (k x m) & ¬ k = 0 ⇒ n = m)
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **46.** Uniqueness of 1 as right identity. ¡

⊢ ∀n∀m ((n x m) = n & ¬ n = 0 ⇒ m = 1) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = **n** & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = **n** ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 5 (𝕋E: C7.9,3) ¡

ω[**n**] ,! 6 (&E: 5) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** x 1) = **n**) ,! 7 (∀E: P18) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** x 1) = **n** ,! 8 (()E: 7) ¡

(**n** x 1) = **n** ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(**n** x **m**) = (**n** x 1) ,! 10 (=E: 3,9) ¡

(**n** x **m**) = (**n** x 1) & ¬ **n** = 0 ,! 11 (&I: 4,10) ¡

((**n** x **m**) = (**n** x 1) & ¬ **n** = 0 ⇒ **m** = 1)
,! 12 (∀E: P45) ¡

(**n** x **m**) = (**n** x 1) & ¬ **n** = 0 ⇒ **m** = 1 ,! 13 (()E: 12) ¡

m = 1 ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

(**n** x **m**) = **n** & ¬ **n** = 0 ⇒ **m** = 1 ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

((**n** x **m**) = **n** & ¬ **n** = 0 ⇒ **m** = 1) ,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m ((n x m) = n & ¬ n = 0 ⇒ m = 1) ! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **47.** Uniqueness of 1 as left identity. ¡

⊢ ∀n∀m ((m x n) = n & ¬ n = 0 ⇒ m = 1) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**m** x **n**) = **n** & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**m** x **n**) = **n** ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

((**m** x **n**) = **n** ⇒ (**n** x **m**) = **n**) ,! 5 (∀E: P26) ¡

(**m** x **n**) = **n** ⇒ (**n** x **m**) = **n** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**n** x **m**) = **n** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**n** x **m**) = **n** & ¬ **n** = 0 ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**n** x **m**) = **n** & ¬ **n** = 0 ⇒ **m** = 1) ,! 9 (∀E: P46) ¡

(**n** x **m**) = **n** & ¬ **n** = 0 ⇒ **m** = 1 ,! 10 (()E: 9) ¡

m = 1 ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(**m** x **n**) = **n** & ¬ **n** = 0 ⇒ **m** = 1 ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((**m** x **n**) = **n** & ¬ **n** = 0 ⇒ **m** = 1) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m ((m x n) = n & ¬ n = 0 ⇒ m = 1) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! P48 through P62 are propositions concerning multiplication and normal or strict inequality. ¡

! **48.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀j (≤[n,m] & ≤[k,j] ⇒ ≤[(n x k),(m x j)]) ¡

n,**m**,**k**,**j** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**k**,**j**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[**k**,**j**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (**n** + k) = **m**) ,! 5 (∀E: C3.15) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (**n** + k) = **m** ,! 6 (()E: 5) ¡

∃k (**n** + k) = **m** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**n** + **u**) = **m** ,! 8 (∃I: 7) ¡

(≤[**k**,**j**] ⇒ ∃k (**k** + k) = **j**) ,! 9 (∀E: C3.15) ¡

≤[**k**,**j**] ⇒ ∃k (**k** + k) = **j** ,! 10 (()E: 9) ¡

∃k (**k** + k) = **j** ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

(**k** + **v**) = **j** ,! 12 (∃I: 11) ¡

ω[**n**] & ω[**u**] ,! 13 (𝕋E: C1.7,8) ¡

ω[**k**] & ω[**v**] ,! 14 (𝕋E: C1.7,12) ¡

ω[**n**] & ω[**u**] & ω[**k**] & ω[**v**] ,! 15 (&I: 13,14) ¡

(ω[**n**] & ω[**u**] & ω[**k**] & ω[**v**]
⇒ ∃k ((**n** + **u**) x (**k** + **v**)) = ((**n** x **k**) + k))
,! 16 (∀E: P24) ¡

ω[**n**] & ω[**u**] & ω[**k**] & ω[**v**]
⇒ ∃k ((**n** + **u**) x (**k** + **v**)) = ((**n** x **k**) + k)
,! 17 (()E: 16) ¡

∃k ((**n** + **u**) x (**k** + **v**)) = ((**n** x **k**) + k)
,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

∃k (**m** x (**k** + **v**)) = ((**n** x **k**) + k) ,! 19 (=E: 8,18) ¡

∃k (**m** x **j**) = ((**n** x **k**) + k) ,! 20 (=E: 12,19) ¡

(**m** x **j**) = ((**n** x **k**) + **a**) ,! 21 (∃E: 20) ¡

(**m** x **j**) = (**m** x **j**) ,! 22 (=E: 21,21) ¡

((**n** x **k**) + **a**) = (**m** x **j**) ,! 23 (=E: 21,22) ¡

∃k ((**n** x **k**) + k) = (**m** x **j**) ,! 24 (∃I: 23) ¡

ω[**m**] & ω[**j**] ,! 25 (𝕋E: C7.9,23) ¡

ω[**n**] ,! 26 (&E: 15) ¡

ω[**k**] ,! 27 (&E: 15) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 28 (&I: 26,27) ¡

(∃k ((**n** x **k**) + k) = (**m** x **j**) ⇒ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **j**)])
,! 29 (∀E: C3.17;

(**n** x **k**): C7.9,28;
(**m** x **j**): C7.9,25) ¡

∃k ((**n** x **k**) + k) = (**m** x **j**) ⇒ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **j**)]
,! 30 (()E: 29) ¡

≤[(**n** x **k**),(**m** x **j**)] ,! 31 (⇒E: 24,30) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**k**,**j**] ⇒ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **j**)] ,! 32 (⇒I: 2,31) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**k**,**j**] ⇒ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **j**)])
,! 33 (()I: 32) ¡

∀n∀m∀k∀j (≤[n,m] & ≤[k,j] ⇒ ≤[(n x k),(m x j)])
! 34 (∀I: 1,33) ¡

▯

! **49.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ≤[(n x k),(m x k)]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**k**] ⇒ ≤[**k**,**k**]) ,! 5 (∀E C3.23) ¡

ω[**k**] ⇒ ≤[**k**,**k**] ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[**k**,**k**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**k**,**k**] ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**k**,**k**] ⇒ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)])
,! 9 (∀E: P48) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**k**,**k**] ⇒ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ≤[(n x k),(m x k)])
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **50.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ≤[(k x n),(k x m)]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)])
,! 3 (∀E: P49) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 6 (𝕋E: C7.9,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n** x **k**) = (**k** x **n**)) ,! 7 (∀E: P25) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n** x **k**) = (**k** x **n**) ,! 8 (()E: 7) ¡

(**n** x **k**) = (**k** x **n**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

≤[(**k** x **n**),(**m** x **k**)] ,! 10 (=E: 5,9) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 11 (𝕋E: C7.9,10) ¡

(ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ (**m** x **k**) = (**k** x **m**)) ,! 12 (∀E: P25) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ (**m** x **k**) = (**k** x **m**) ,! 13 (()E: 12) ¡

(**m** x **k**) = (**k** x **m**) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

≤[(**k** x **n**),(**k** x **m**)] ,! 15 (=E: 10,14) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ≤[(**k** x **n**),(**k** x **m**)] ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ≤[(**k** x **n**),(**k** x **m**)]) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ≤[(k x n),(k x m)])
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **51.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (<[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ <[(n x k),(m x k)]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

<[**n**,**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

<[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ **k** = 0 ,! 5 (&E: 2) ¡

(<[**n**,**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**] & ¬ **n** = **m**) ,! 6 (∀E: C4.3) ¡

<[**n**,**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**] & ¬ **n** = **m** ,! 7 (()E: 6) ¡

≤[**n**,**m**] & ¬ **n** = **m** ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 9 (&E: 8) ¡

¬ **n** = **m** ,! 10 (&E: 8) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ,! 11 (&I: 4,9) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)])
,! 12 (∀E: P49) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) ,! 15 (Prem) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ,! 16 (&I: 5,15) ¡

((**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m**)
,! 17 (∀E: P42) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) & ¬ **k** = 0 ⇒ **n** = **m**
,! 18 (()E: 17) ¡

n = **m** ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

𝔉 ,! 20 (𝔉I: 10,19) ¡

(**n** x **k**) = (**m** x **k**) ⇒ 𝔉 ,! 21 (⇒I: 15,20) ¡

¬ (**n** x **k**) = (**m** x **k**) ,! 22 (¬I: 21) ¡

≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] & ¬ (**n** x **k**) = (**m** x **k**)
,! 23 (&I: 14,22) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 24 (𝕋E: C7.9,14) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 25 (𝕋E: C7.9,14) ¡

(≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] & ¬ (**n** x **k**) = (**m** x **k**)
⇒ <[(**n** x **k**),(**m** x **k**)])
,! 26 (∀E: C4.4;
(**n** x **k**): C7.9,24;
(**m** x **k**): C7.9;25) ¡

≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] & ¬ (**n** x **k**) = (**m** x **k**)
⇒ <[(**n** x **k**),(**m** x **k**)]
,! 27 (()E: 26) ¡

<[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 28 (⇒E: 23,27) ¡

<[**n**,**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ <[(**n** x **k**),(**m** x **k**)]
,! 29 (⇒I: 2,28) ¡

(<[**n**,**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ <[(**n** x **k**),(**m** x **k**)])
,! 30 (()I: 29) ¡

∀n∀m∀k (<[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ <[(n x k),(m x k)])
! 31 (∀I: 1,30) ¡

□

! **52.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (<[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ <[(k x n),(k x m)]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

<[**n**,**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(<[**n**,**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ <[(**n** x **k**),(**m** x **k**)])
,! 3 (∀E: P51) ¡

<[**n**,**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ <[(**n** x **k**),(**m** x **k**)]
,! 4 (()E: 3) ¡

<[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 6 (𝕋E: C7.9,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n** x **k**) = (**k** x **n**)) ,! 7 (∀E: P25) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n** x **k**) = (**k** x **n**) ,! 8 (()E: 7) ¡

(**n** x **k**) = (**k** x **n**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

<[(**k** x **n**),(**m** x **k**)] ,! 10 (=E: 5,9) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 11 (𝕋E: C7.9,10) ¡

(ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ (**m** x **k**) = (**k** x **m**)) ,! 12 (∀E: P25) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ (**m** x **k**) = (**k** x **m**) ,! 13 (()E: 12) ¡

(**m** x **k**) = (**k** x **m**) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

<[(**k** x **n**),(**k** x **m**)] ,! 15 (=E: 10,14) ¡

<[**n**,**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ <[(**k** x **n**),(**k** x **m**)]
,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(<[**n**,**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ <[(**k** x **n**),(**k** x **m**)])
,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m∀k (<[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ <[(k x n),(k x m)])
! 18 (∀I: 1,17) ¡

□

! **53.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ m = 0 ⇒ ≤[n,(n x m)]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ≤[1,**m**]) ,! 5 (∀E: C3.38) ¡

ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ≤[1,**m**] ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[1,**m**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

≤[1,**m**] & ω[**n**] ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(≤[1,**m**] & ω[**n**] ⇒ ≤[(**n** x 1),(**n** x **m**)])
,! 9 (∀E: P50) ¡

≤[1,**m**] & ω[**n**] ⇒ ≤[(**n** x 1),(**n** x **m**)] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[(**n** x 1),(**n** x **m**)] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** x 1) = **n**) ,! 12 (∀E: C3.18) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** x 1) = **n** ,! 13 (()E: 12) ¡

(**n** x 1) = **n** ,! 14 (⇒E: 3,13) ¡

≤[**n**,(**n** x **m**)] ,! 15 (=E: 11,14) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ≤[**n**,(**n** x **m**)] ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ≤[**n**,(**n** x **m**)])
,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ m = 0 ⇒ ≤[n,(n x m)])
! 18 (∀I: 1,17) ¡

□

! **54.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ m = 0 ⇒ ≤[n,(m x n)]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ≤[**n**,(**n** x **m**)]) ,! 3 (∀E: P53) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ≤[**n**,(**n** x **m**)] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[**n**,(**n** x **m**)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 6 (𝕋E: C7.9,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (**n** x **m**) = (**m** x **n**)) ,! 7 (∀E: P25) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (**n** x **m**) = (**m** x **n**) ,! 8 (()E: 7) ¡

(**n** x **m**) = (**m** x **n**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

≤[**n**,(**m** x **n**)] ,! 10 (=E: 5,9) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ≤[**n**,(**m** x **n**)] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ≤[**n**,(**m** x **n**)]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ m = 0 ⇒ ≤[n,(m x n)]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **55.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,(m x k)]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**]) ,! 5 (∀E: C3.7) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[**m**] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(ω[**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ ≤[**m**,(**m** x **k**)]) ,! 9 (∀E: P53) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ ≤[**m**,(**m** x **k**)] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[m,(m x k)] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

≤[n,m] & ≤[m,(m x k)] ,! 12 (&I: 3,11) ¡

ω[m] & ω[k] ,! 13 (&E: 8) ¡

(≤[n,m] & ≤[m,(m x k)] ⇒ ≤[n,(m x k)])
,! 14 (∀E: C3.20;
(m x k): C7.9,13) ¡

≤[n,m] & ≤[m,(m x k)] ⇒ ≤[n,(m x k)]
,! 15 (()E: 14) ¡

≤[n,(m x k)] ,! 16 (⇒E: 12,15) ¡

≤[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,(m x k)] ,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

(≤[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,(m x k)])
,! 18 (()I: 17) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,(m x k)])
! 19 (∀I: 1,18) ¡

□

! **56.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,(k x m)]) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(≤[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,(m x k)])
,! 3 (∀E: P55) ¡

≤[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,(m x k)]
,! 4 (()E: 3) ¡

≤[n,(m x k)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[m] & ω[k] ,! 6 (ℿE: C7.9,5) ¡

(ω[m] & ω[k] ⇒ (m x k) = (k x m)) ,! 7 (∀E: P25) ¡

ω[m] & ω[k] ⇒ (m x k) = (k x m) ,! 8 (()E: 7) ¡

(m x k) = (k x m) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

≤[n,(k x m)] ,! 10 (=E: 5,9) ¡

≤[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,(k x m)] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(≤[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,(k x m)])
,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,(k x m)])
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **57.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (<[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ <[n,(k x m)]) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

<[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(<[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ <[(k x n),(k x m)])
,! 3 (∀E: P52) ¡

<[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ <[(k x n),(k x m)]
,! 4 (()E: 3) ¡

<[(k x n),(k x m)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[k] & ω[n] ,! 6 (𝕋E: C7.9,5) ¡

ω[n] ,! 7 (&E: 6) ¡

ω[k] & ¬ k = 0 ,! 8 (&E: 2) ¡

ω[n] & ω[k] & ¬ k = 0 ,! 9 (&I: 7,8) ¡

(ω[n] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,(k x n)])
,! 10 (∀E: P54) ¡

ω[n] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,(k x n)] ,! 11 (()E: 10) ¡

≤[n,(k x n)] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

≤[n,(k x n)] & <[(k x n),(k x m)] ,! 13 (&I: 5,12) ¡

ω[k] & ω[m] ,! 14 (𝕋E: C7.9,5) ¡

(≤[n,(k x n)] & <[(k x n),(k x m)] ⇒ <[n,(k x m)])
,! 15 (∀E: C4.17;
(k x n): C7.9,6;
(k x m): C7.9,6) ¡

≤[n,(k x n)] & <[(k x n),(k x m)] ⇒ <[n,(k x m)]
,! 16 (()E: 15) ¡

<[n,(k x m)] ,! 17 (⇒E: 13,16) ¡

<[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ <[n,(k x m)] ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(<[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ <[n,(k x m)])

,! 19 (()I: 18) ¡

∀n∀m∀k (<[n,m] & ω[k] & ¬ k = 0 ⇒ <[n,(k x m)])
! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **58.** ¡

⊢ ∀n∀m∀a∀b (ω[n] & ω[m] & ω[a] & ω[b] & ¬ n = 0 & ¬ m = 0
⇒ ∃k (≤[a,(kxn)] & ≤[b,(kxm)])) ¡

! k will be exhibited as (a + b). ¡

n,**m**,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**a**] & ω[**b**] & ¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**a**] ,! 5 (&E: 2) ¡

ω[**b**] ,! 6 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ,! 7 (&E: 2) ¡

¬ **m** = 0 ,! 8 (&E: 2) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ,! 9 (&I: 5,6) ¡

(ω[**a**] & ω[**b**] ⇒ ≤[**a**,(**a** + **b**)]) ,! 10 (∀E: C3.33) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ⇒ ≤[**a**,(**a** + **b**)] ,! 11 (()E: 10) ¡

≤[**a**,(**a** + **b**)] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

≤[**a**,(**a** + **b**)] & ω[**n**] ,! 13 (&I: 3,12) ¡

≤[**a**,(**a** + **b**)] & ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ,! 14 (&I: 7,13) ¡

(≤[**a**,(**a** + **b**)] & ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ≤[**a**,((**a** + **b**) x **n**)])
,! 15 (∀E: P55;
(**a** + **b**): C1.7,9) ¡

≤[**a**,(**a** + **b**)] & ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ≤[**a**,((**a** + **b**) x **n**)]
,! 16 (()E: 15) ¡

≤[**a**,((**a** + **b**) x **n**)] ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

ω[**b**] & ω[**a**] ,! 18 (&I: 5,6) ¡

(ω[**b**] & ω[**a**] ⇒ ≤[**b**,(**a** + **b**)]) ,! 19 (∀E: C3.34) ¡

ω[**b**] & ω[**a**] ⇒ ≤[**b**,(**a** + **b**)] ,! 20 (()E: 19) ¡

≤[**b**,(**a** + **b**)] ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

≤[**b**,(**a** + **b**)] & ω[**m**] ,! 22 (&I: 4,21) ¡

≤[**b**,(**a** + **b**)] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ,! 23 (&I: 8,22) ¡

(≤[**b**,(**a** + **b**)] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ≤[**b**,((**a** + **b**) x **m**)])
,! 24 (∀E: P55;
(**a** + **b**): C1.7,9) ¡

≤[**b**,(**a** + **b**)] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ≤[**b**,((**a** + **b**) x **m**)]
,! 25 (()E: 24) ¡

≤[**b**,((**a** + **b**) x **m**)] ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

≤[**a**,((**a** + **b**) x **n**)] & ≤[**b**,((**a** + **b**) x **m**)]
,! 27 (&I: 17,26) ¡

(≤[**a**,((**a** + **b**) x **n**)] & ≤[**b**,((**a** + **b**) x **m**)])
,! 28 (()I: 27) ¡

∃k (≤[**a**,(k x **n**)] & ≤[**b**,(k x **m**)]) ,! 29 (∃I: 28;
(**a** + **b**): C1.7,9) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**a**] & ω[**b**] & ¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0
⇒ ∃k (≤[**a**,(k x **n**)] & ≤[**b**,(k x **m**)])
,! 30 (⇒I: 2,29) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**a**] & ω[**b**] & ¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0
⇒ ∃k (≤[**a**,(k x **n**)] & ≤[**b**,(k x **m**)]))
,! 31 (()I: 30) ¡

∀n∀m∀a∀b (ω[n] & ω[m] & ω[a] & ω[b] & ¬ n = 0 & ¬ m = 0
⇒ ∃k (≤[a,(kxn)] & ≤[b,(kxm)]))
! 32 (∀I: 1,31) ¡

□

! **59.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[(n x k),(m x k)] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,m]) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] & ¬ **k** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **k** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**m**] & ω[**n**] & ¬ <[**m**,**n**] ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 5 (∀E: C4.45) ¡

ω[**m**] & ω[**n**] & ¬ <[**m**,**n**] ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 6 (()E: 5) ¡

! To show: ω[**m**] & ω[**n**] ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 7 (𝕋E: C7.9,3) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 8 (𝕋E: C7.9,3) ¡

ω[**n**] ,! 9 (&E: 7) ¡

ω[**k**] ,! 10 (&E: 7) ¡

ω[**m**] ,! 11 (&E: 8) ¡

ω[**m**] & ω[**n**] ,! 12 (&I: 9,11) ¡

! To show: ¬ <[**m**,**n**]. Proceed by contradiction. ¡

<[**m**,**n**] ,! 13 (Prem) ¡

<[**m**,**n**] & ω[**k**] ,! 14 (&I: 10,13) ¡

<[**m**,**n**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ,! 15 (&I: 4,14) ¡

(<[**m**,**n**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ <[(**m** x **k**),(**n** x **k**)])
,! 16 (∀E: P51) ¡

<[**m**,**n**] & ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ <[(**m** x **k**),(**n** x **k**)]
,! 17 (()E: 16) ¡

<[(**m** x **k**),(**n** x **k**)] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

(<[(**m** x **k**),(**n** x **k**)] ⇒ ¬ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)])
,! 19 (∀E: C4.20;
(**m** x **k**): C7.9,8;
(**n** x **k**): C7.9,7) ¡

<[(**m** x **k**),(**n** x **k**)] ⇒ ¬ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)]
,! 20 (()E: 19) ¡

¬ ≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 21 (⇒I: 18,20) ¡

𝔉 ,! 22 (𝔉I: 3,21) ¡

<[**m**,**n**] ⇒ 𝔉 ,! 23 (⇒I: 13,22) ¡

¬ <[**m**,**n**] ,! 24 (¬I: 23) ¡

ω[**m**] & ω[**n**] & ¬ <[**m**,**n**] ,! 25 (&I: 12,24) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 26 (⇒E: 6,25) ¡

≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] & ¬ **k** = 0 ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 27 (⇒I: 2,26) ¡

(≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] & ¬ **k** = 0 ⇒ ≤[**n**,**m**])
,! 28 (()I: 27) ¡

∀n∀m∀k (≤[(n x k),(m x k)] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,m])
! 29 (∀I: 1,28) ¡

▯

! **60.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[(k x n),(k x m)] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,m]) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**k** x **n**),(**k** x **m**)] & ¬ **k** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

≤[(**k** x **n**),(**k** x **m**)] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **k** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ,! 5 (𝕋E: C7.9,3) ¡

(ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ (**k** x **n**) = (**n** x **k**)) ,! 6 (∀E: P25) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ (**k** x **n**) = (**n** x **k**) ,! 7 (()E: 6) ¡

(**k** x **n**) = (**n** x **k**) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

≤[(**n** x **k**),(**k** x **m**)] ,! 9 (=E: 3,8) ¡

ω[**k**] & ω[**m**] ,! 10 (𝕋E: C7.9,9) ¡

(ω[**k**] & ω[**m**] ⇒ (**k** x **m**) = (**m** x **k**)) ,! 11 (∀E: P25) ¡

ω[**k**] & ω[**m**] ⇒ (**k** x **m**) = (**m** x **k**) ,! 12 (()E: 11) ¡

(**k** x **m**) = (**m** x **k**) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 14 (=E: 9,13) ¡

≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] & ¬ **k** = 0 ,! 15 (&I: 4,14) ¡

(≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] & ¬ **k** = 0 ⇒ ≤[**n**,**m**])
,! 16 (∀E: P59) ¡

≤[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] & ¬ **k** = 0 ⇒ ≤[**n**,**m**]
,! 17 (()E: 16) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

≤[(**k** x **n**),(**k** x **m**)] & ¬ **k** = 0 ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(≤[(**k** x **n**),(**k** x **m**)] & ¬ **k** = 0 ⇒ ≤[**n**,**m**])
,! 20 (()I: 19) ¡

∀n∀m∀k (≤[(k x n),(k x m)] & ¬ k = 0 ⇒ ≤[n,m])
! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **61.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (<[(n x k),(m x k)] ⇒ <[n,m]) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

<[(n x k),(m x k)] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[m] & ω[n] & ¬ ≤[m,n] ⇒ <[n,m]) ,! 3 (∀E: C4.46) ¡

ω[m] & ω[n] & ¬ ≤[m,n] ⇒ <[n,m] ,! 4 (()E: 3) ¡

! To show: ω[m] & ω[n] ¡

ω[n] & ω[k] ,! 5 (𝕋E: C7.9,2) ¡

ω[m] & ω[k] ,! 6 (𝕋E: C7.9,2) ¡

ω[n] ,! 7 (&E: 5) ¡

ω[k] ,! 8 (&E: 5) ¡

ω[m] ,! 9 (&E: 6) ¡

ω[m] & ω[n] ,! 10 (&I: 7,9) ¡

! To show: ¬ ≤[m,n]. Proceed by contradiction. ¡

≤[m,n] ,! 11 (Prem) ¡

≤[m,n] & ω[k] ,! 12 (&I: 8,11) ¡

(≤[m,n] & ω[k] ⇒ ≤[(m x k),(n x k)])
,! 13 (∀E: P49) ¡

≤[m,n] & ω[k] ⇒ ≤[(m x k),(n x k)] ,! 14 (()E: 13) ¡

≤[(m x k),(n x k)] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

(≤[(m x k),(n x k)] ⇒ ¬ <[(n x k),(m x k)])
,! 16 (∀E: C4.22;
(m x k): C7.9,6;
(n x k): C7.9,5) ¡

≤[(m x k),(n x k)] ⇒ ¬ <[(n x k),(m x k)]
,! 17 (()E: 16) ¡

¬ <[(n x k),(m x k)] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

𝔉 ,! 19 (𝔉I: 2,18) ¡

≤[m,n] ⇒ 𝔉 ,! 20 (⇒I: 11,19) ¡

¬ ≤[**m**,**n**] ,! 21 (¬I: 20) ¡

ω[**m**] & ω[**n**] & ¬ ≤[**m**,**n**] ,! 22 (&I: 10,21) ¡

<[**n**,**m**] ,! 23 (⇒E: 4,22) ¡

<[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ⇒ <[**n**,**m**] ,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

(<[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ⇒ <[**n**,**m**]) ,! 25 (()I: 24) ¡

∀n∀m∀k (<[(n x k),(m x k)] ⇒ <[n,m]) ! 26 (∀I: 1,25) ¡

▯

! **62.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (<[(k x n),(k x m)] ⇒ <[n,m]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

<[(**k** x **n**),(**k** x **m**)] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ,! 3 (𝕋E: C7.9,2) ¡

(ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ (**k** x **n**) = (**n** x **k**)) ,! 4 (∀E: P25) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ (**k** x **n**) = (**n** x **k**) ,! 5 (()E: 4) ¡

(**k** x **n**) = (**n** x **k**) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

<[(**n** x **k**),(**k** x **m**)] ,! 7 (=E: 2,6) ¡

ω[**k**] & ω[**m**] ,! 8 (𝕋E: C7.9,2) ¡

(ω[**k**] & ω[**m**] ⇒ (**k** x **m**) = (**m** x **k**)) ,! 9 (∀E: P25) ¡

ω[**k**] & ω[**m**] ⇒ (**k** x **m**) = (**m** x **k**) ,! 10 (()E: 9) ¡

(**k** x **m**) = (**m** x **k**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

<[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ,! 12 (=E: 7,11) ¡

(<[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ⇒ <[**n**,**m**]) ,! 13 (∀E: P61) ¡

<[(**n** x **k**),(**m** x **k**)] ⇒ <[**n**,**m**] ,! 14 (()E: 13) ¡

<[**n**,**m**] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

<[(**k** x **n**),(**k** x **m**)] ⇒ <[**n**,**m**] ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(<[(**k** x **n**),(**k** x **m**)] ⇒ <[**n**,**m**]) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m∀k (<[(k x n),(k x m)] ⇒ <[n,m]) ! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! P63 through P65 are put here, because they rely on P53. ¡

! **63.** ¡

⊢ ∀n∀m ((n x m) = 1 ⇒ n = 1) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = 1 ,! 2 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = 1 & ¬ 1 = 0 ,! 3 (&I: IV9.6,2) ¡

((**n** x **m**) = 1 & ¬ 1 = 0 ⇒ ¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0)
,! 4 (∀E: P9) ¡

(**n** x **m**) = 1 & ¬ 1 = 0 ⇒ ¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0
,! 5 (()E: 4) ¡

¬ **n** = 0 & ¬ **m** = 0 ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

¬ **n** = 0 ,! 7 (&E: 6) ¡

¬ **m** = 0 ,! 8 (&E: 6) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 9 (𝕋E: C7.9,2) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ,! 10 (&I: 8,9) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ≤[**n**,(**n** x **m**)])
,! 11 (∀E: P53) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ≤[**n**,(**n** x **m**)]
,! 12 (()E: 11) ¡

≤[**n**,(**n** x **m**)] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

≤[**n**,1] ,! 14 (=E: 2,13) ¡

(≤[**n**,1] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1) ,! 15 (∀E: C3.58) ¡

≤[**n**,1] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ,! 16 (()E: 15) ¡

n = 0 ∨ **n** = 1 ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

(**n** = 0 ∨ **n** = 1) ,! 18 (()I: 17) ¡

(**n** = 0 ∨ **n** = 1) & ¬ **n** = 0 ,! 19 (&I: 7,18) ¡

((**n** = 0 ∨ **n** = 1) & ¬ **n** = 0 ⇒ **n** = 1)
,! 21 (∀E: I3.5) ¡

(**n** = 0 ∨ **n** = 1) & ¬ **n** = 0 ⇒ **n** = 1 ,! 22 (()E: 21) ¡

n = 1 ,! 23 (⇒E: 19,22) ¡

(**n** x **m**) = 1 ⇒ **n** = 1 ,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

((**n** x **m**) = 1 ⇒ **n** = 1) ,! 25 (()I: 24) ¡

∀n∀m ((n x m) = 1 ⇒ n = 1) ! 26 (∀I: 1,25) ¡

□

! **64.** ¡

⊦ ∀n∀m ((n x m) = 1 ⇒ m = 1) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = 1 ,! 2 (Prem) ¡

((**n** x **m**) = 1 ⇒ (**m** x **n**) = 1) ,! 3 (∀E: P26) ¡

(**n** x **m**) = 1 ⇒ (**m** x **n**) = 1 ,! 4 (()E: 3) ¡

(**m** x **n**) = 1 ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**m** x **n**) = 1 ⇒ **m** = 1) ,! 6 (∀E: P63) ¡

(**m** x **n**) = 1 ⇒ **m** = 1 ,! 7 (()E: 6) ¡

m = 1 ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**n** x **m**) = 1 ⇒ **m** = 1 ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((**n** x **m**) = 1 ⇒ **m** = 1) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m ((n x m) = 1 ⇒ m = 1) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **65.** ¡

⊦ ∀n∀m ((n x m) = 1 ⇒ n = 1 & m = 1) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = 1 ,! 2 (Prem) ¡

((**n** x **m**) = 1 ⇒ **n** = 1) ,! 3 (∀E: P63) ¡

(**n** x **m**) = 1 ⇒ **n** = 1 ,! 4 (()E: 3) ¡

n = 1 ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**n** x **m**) = 1 ⇒ **m** = 1) ,! 6 (∀E: P64) ¡

(**n** x **m**) = 1 ⇒ **m** = 1 ,! 7 (()E: 6) ¡

m = 1 ,! 8 (⇒E: 2,7) ¡

n = 1 & **m** = 1 ,! 9 (&I: 5,8) ¡

(**n** x **m**) = 1 ⇒ **n** = 1 & **m** = 1 ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

((**n** x **m**) = 1 ⇒ **n** = 1 & **m** = 1) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n∀m ((n x m) = 1 ⇒ n = 1 & m = 1) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **66. The Division Algorithm** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ m = 0
⇒ ∃q∃r (n = ((q x m) + r) & <[r,m])) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ,! 5 (&E: 2) ¡

∀x ({r : ∃q **n** = ((q x **m**) + r)}[x] ⇔ ∃q **n** = ((q x **m**) + x))
,! 6 (Pred) ¡

! Lines 7 and 8 permit the replacement of
{r : ∃q **n** = ((q x **m**) + r)}
with
P,
which will save space and render the proof clearer. ¡

∃P∀x (P[x] ⇔ ∃q **n** = ((q x **m**) + x)) ,! 7 (∃I: 6) ¡

∀x (**P**[x] ⇔ ∃q **n** = ((q x **m**) + x)) ,! 8 (∃E: 7) ¡

(∃x (ω[x] & **P**[x])
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (<[y,x] ⇒ ¬ **P**[y])))
,! 9 (∀E: C4.49) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x]) ⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (<[y,x] ⇒ ¬ **P**[y]))
,! 10 (()E: 9) ¡

! To prove: ∃x (ω[x] & **P**[x]). We prove: ω[**n**] & **P**[**n**]. ¡

(ω[**n**] ⇒ (0 + **n**) = **n**) ,! 11 (∀E: C2.33) ¡

ω[**n**] ⇒ (0 + **n**) = **n** ,! 12 (()E: 11) ¡

(0 + **n**) = **n** ,! 13 (⇒E: 3,12) ¡

n = **n** ,! 14 (=I) ¡

n = (0 + **n**) ,! 15 (=E: 13,14) ¡

(ω[**m**] ⇒ (0 x **m**) = 0) ,! 16 (∀E: P3) ¡

ω[**m**] ⇒ (0 x **m**) = 0 ,! 17 (()E: 16) ¡

(0 x **m**) = 0 ,! 18 (⇒E: 4,17) ¡

n = ((0 x **m**) + **n**) ,! 19 (=E: 15,18) ¡

∃q **n** = ((q x **m**) + **n**) ,! 20 (∃I: 19) ¡

(**P**[**n**] ⇔ ∃q **n** = ((q x **m**) + **n**)) ,! 21 (∀E: 8) ¡

P[**n**] ⇔ ∃q **n** = ((q x **m**) + **n**) ,! 22 (()E: 21) ¡

∃q **n** = ((q x **m**) + **n**) ⇒ **P**[**n**] ,! 23 (⇔E: 22) ¡

P[**n**] ,! 24 (⇒E: 20,23) ¡

ω[**n**] & **P**[**n**] ,! 25 (&I: 3,24) ¡

(ω[**n**] & **P**[**n**]) ,! 26 (()I: 25) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x]) ,! 27 (∃I: 26) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (<[y,x] ⇒ ¬ **P**[y]))
,! 28 (⇒E: 10,27) ¡

(ω[**r**] & **P**[**r**] & ∀y (<[y,**r**] ⇒ ¬ **P**[y])) ,! 29 (∃E: 28) ¡

ω[**r**] & **P**[**r**] & ∀y (<[y,**r**] ⇒ ¬ **P**[y]) ,! 30 (()E: 29) ¡

ω[**r**] ,! 31 (&E: 30) ¡

P[**r**] ,! 32 (&E: 30) ¡

∀y (<[y,**r**] ⇒ ¬ **P**[y]) ,! 33 (&E: 30) ¡

(**P**[**r**] ⇔ ∃q **n** = ((q x **m**) + **r**)) ,! 34 (∀E: 8) ¡

P[**r**] ⇔ ∃q **n** = ((q x **m**) + **r**) ,! 35 (()E: 34) ¡

P[**r**] ⇒ ∃q **n** = ((q x **m**) + **r**) ,! 36 (⇔E: 35) ¡

∃q **n** = ((q x **m**) + **r**) ,! 37 (⇒E: 32,36) ¡

n = ((**q** x **m**) + **r**) ,! 38 (∃E: 37) ¡

! We claim that: <[**r**,**m**]. For, suppose otherwise... ¡

≤[**m**,**r**] ,! 39 (Prem) ¡

(≤[**m**,**r**] ⇒ ∃k (**m** + k) = **r**) ,! 40 (∀E: C3.15) ¡

≤[m,r] ⇒ ∃k (m + k) = r ,! 41 (()E: 40) ¡

∃k (m + k) = r ,! 42 (⇒E: 39,41) ¡

(m + k) = r ,! 43 (∃E: 42) ¡

n = ((q x m) + (m + k)) ,! 44 (=E: 38,43) ¡

ω[(q x m)] & ω[r] ,! 45 (𝕋E: C1.7,38) ¡

ω[(q x m)] ,! 46 (&E: 45) ¡

ω[q] & ω[m] ,! 47 (𝕋E: C7.9,46) ¡

(n = ((q x m) + (m + k)) ⇒ n = (((q x m) + m) + k))
,! 48 (∀E: C2.17;
(q x m): C7.9,47) ¡

n = ((q x m) + (m + k)) ⇒ n = (((q x m) + m) + k)
,! 49 (()E: 48) ¡

n = (((q x m) + m) + k) ,! 50 (⇒E: 44,49) ¡

(ω[q] & ω[m] ⇒ ((q + 1) x m) = ((q x m) + m))
,! 51 (∀E: P17) ¡

ω[q] & ω[m] ⇒ ((q + 1) x m) = ((q x m) + m)
,! 52 (()E: 51) ¡

((q + 1) x m) = ((q x m) + m) ,! 53 (⇒E: 47,52) ¡

n = (((q + 1) x m) + k) ,! 54 (=E: 50,53) ¡

∃q n = ((q x m) + k) ,! 55 (∃I: 54) ¡

(P[k] ⇔ ∃q n = ((q x m) + k)) ,! 56 (∀E: 8) ¡

P[k] ⇔ ∃q n = ((q x m) + k) ,! 57 (()E: 56) ¡

∃q n = ((q x m) + k) ⇒ P[k] ,! 58 (⇔E: 57) ¡

P[k] ,! 59 (⇒E: 55,58) ¡

ω[m] & ω[k] ,! 60 (𝕋E: C1.7,43) ¡

ω[k] ,! 61 (&E: 60) ¡

ω[k] & ω[m] & ¬ m = 0 ,! 62 (&I: 5,61) ¡

(ω[k] & ω[m] & ¬ m = 0 ⇒ <[k,(m + k)])
,! 63 (∀E: C4.25) ¡

ω[k] & ω[m] & ¬ m = 0 ⇒ <[k,(m + k)]
,! 64 (()E: 63) ¡

<[**k**,(**m** + **k**)] ,! 65 (⇒E: 62,64) ¡

<[**k**,**r**] ,! 66 (=E: 43,65) ¡

(<[**k**,**r**] ⇒ ¬ **P**[**k**]) ,! 67 (∀E: 33) ¡

<[**k**,**r**] ⇒ ¬ **P**[**k**] ,! 68 (()E: 67) ¡

¬ **P**[**k**] ,! 69 (⇒E: 66,68) ¡

ℑ ,! 70 (ℑI: 59,69) ¡

≤[**m**,**r**] ⇒ ℑ ,! 71 (⇒I: 39,70) ¡

¬ ≤[**m**,**r**] ,! 72 (¬I: 71) ¡

ω[**m**] & ¬ ≤[**m**,**r**] ,! 73 (&I: 4,72) ¡

ω[**r**] ,! 74 (&E: 45) ¡

ω[**m**] & ω[**r**] & ¬ ≤[**m**,**r**] ,! 75 (&I: 73,74) ¡

(ω[**m**] & ω[**r**] & ¬ ≤[**m**,**r**] ⇒ <[**r**,**m**]) ,! 76 (∀E: C4.46) ¡

ω[**m**] & ω[**r**] & ¬ ≤[**m**,**r**] ⇒ <[**r**,**m**] ,! 77 (()E: 76) ¡

<[**r**,**m**] ,! 78 (⇒E: 75,77) ¡

n = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**] ,! 79 (&I: 38,78) ¡

(**n** = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**]) ,! 80 (()I: 79) ¡

∃r (**n** = ((**q** x **m**) + r) & <[r,**m**]) ,! 81 (∃I: 80) ¡

∃q∃r (**n** = ((q x **m**) + r) & <[r,**m**]) ,! 82 (∃I: 81) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ∃q∃r (**n** = ((q x **m**) + r) & <[r,**m**])
,! 83 (⇒I: 2,82) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **m** = 0
⇒ ∃q∃r (**n** = ((q x **m**) + r) & <[r,**m**]))
,! 84 (()I: 83) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ m = 0
⇒ ∃q∃r (n = ((q x m) + r) & <[r,m]))
! 85 (∀I: 1,84) ¡

□

! **67.** Lemma for P68. ¡

⊢ ∀n∀m∀q∀r∀x∀y (n = ((q x m) + r) & <[r,m]
& n = ((y x m) + x) & <[x,m]

⇒ ω[q] & ω[y] & ¬ <[q,y]) ¡

n,m,**q**,**r**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

n = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**] & **n** = ((**y** x **m**) + **x**) & <[**x**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

n = ((**q** x **m**) + **r**) ,! 3 (&E: 2) ¡

<[**r**,**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

n = ((**y** x **m**) + **x**) ,! 5 (&E: 2) ¡

<[**x**,**m**] ,! 6 (&E: 2) ¡

ω[(**q** x **m**)] & ω[**r**] ,! 7 (𝕋E: C1.7,3) ¡

ω[(**q** x **m**)] ,! 8 (&E: 7) ¡

ω[**q**] & ω[**m**] ,! 9 (𝕋E: C7.9,8) ¡

ω[**q**] ,! 10 (&E: 9) ¡

ω[**m**] ,! 11 (&E: 9) ¡

ω[(**y** x **m**)] & ω[**x**] ,! 12 (𝕋E: C1.7,5) ¡

ω[(**y** x **m**)] ,! 13 (&E: 12) ¡

ω[**y**] & ω[**m**] ,! 14 (𝕋E: C7.9,13) ¡

ω[**y**] ,! 15 (&E: 14) ¡

ω[**q**] & ω[**y**] ,! 16 (&I: 10,15) ¡

<[**q**,**y**] ,! 17 (Prem) ¡

(<[**q**,**y**] ⇒ ≤[(**q** + 1),**y**]) ,! 18 (∀E: P36) ¡

<[**q**,**y**] ⇒ ≤[(**q** + 1),**y**] ,! 19 (()E: 18) ¡

≤[(**q** + 1),**y**] ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

≤[(**q** + 1),**y**] & ω[**m**] ,! 21 (&I: 11,20) ¡

ω[**q**] & ω[1] ,! 22 (&I: IV9.2,10) ¡

(≤[(**q** + 1),**y**] & ω[**m**] ⇒ ≤[((**q** + 1) x **m**),(**y** x **m**)]) ,! 23 (∀E: P49; (**q** + 1): C1.7,22) ¡

≤[(**q** + 1),**y**] & ω[**m**] ⇒ ≤[((**q** + 1) x **m**),(**y** x **m**)] ,! 24 (()E: 23) ¡

≤[((**q** + 1) x **m**),(**y** x **m**)] ,! 25 (⇒E: 21,24) ¡

(ω[**q**] & ω[**m**] ⇒ ((**q** + 1) x **m**) = ((**q** x **m**) + **m**))
,! 26 (∀E: P17) ¡

ω[**q**] & ω[**m**] ⇒ ((**q** + 1) x **m**) = ((**q** x **m**) + **m**)
,! 27 (()E: 26) ¡

((**q** + 1) x **m**) = ((**q** x **m**) + **m**) ,! 28 (⇒E: 9,27) ¡

≤[((**q** x **m**) + **m**),(**y** x **m**)] ,! 29 (=E: 25,28) ¡

<[**r**,**m**] & ω[(**q** x **m**)] ,! 30 (&I: 4,8) ¡

(<[**r**,**m**] & ω[(**q** x **m**)] ⇒ <[((**q** x **m**) + **r**),((**q** x **m**) + **m**)])
,! 31 (∀E: C4.41;
(**q** x **m**): C7.9,9)) ¡

<[**r**,**m**] & ω[(**q** x **m**)] ⇒ <[((**q** x **m**) + **r**),((**q** x **m**) + **m**)]
,! 32 (()E: 31) ¡

<[((**q** x **m**) + **r**),((**q** x **m**) + **m**)] ,! 33 (⇒E: 30,32) ¡

<[**n**,((**q** x **m**) + **m**)] ,! 34 (=E: 3,33) ¡

<[**n**,((**q** x **m**) + **m**)] & ≤[((**q** x **m**) + **m**),(**y** x **m**)]
,! 35 (&I: 29,34) ¡

ω[(**q** x **m**)] & ω[**m**] ,! 36 (&I: 8,11) ¡

(<[**n**,((**q** x **m**) + **m**)] & ≤[((**q** x **m**) + **m**),(**y** x **m**)]
⇒ <[**n**,(**y** x **m**)])
,! 37 (∀E: C4.16;
((**q** x **m**) + **m**): C1.7,36;
(**y** x **m**): C7.9,14) ¡

<[**n**,((**q** x **m**) + **m**)] & ≤[((**q** x **m**) + **m**),(**y** x **m**)]
⇒ <[**n**,(**y** x **m**)]
,! 38 (()E: 37) ¡

<[**n**,(**y** x **m**)] ,! 39 (⇒E: 35,38) ¡

(ω[(**y** x **m**)] & ω[**x**] ⇒ ≤[(**y** x **m**),((**y** x **m**) + **x**)])
,! 40 (∀E: C3.33;
(**y** x **m**): C7.9,14) ¡

ω[(**y** x **m**)] & ω[**x**] ⇒ ≤[(**y** x **m**),((**y** x **m**) + **x**)]
,! 41 (()E: 40) ¡

≤[(**y** x **m**),((**y** x **m**) + **x**)] ,! 42 (⇒E: 12,41) ¡

≤[(**y** x **m**),**n**] ,! 43 (=E: 5,42) ¡

<[**n**,(**y** x **m**)] & ≤[(**y** x **m**),**n**] ,! 44 (&I: 39,43) ¡

(<[**n**,(**y** x **m**)] & ≤[(**y** x **m**),**n**] ⇒ <[**n**,**n**])
,! 45 (∀E: C4.16; (**y** x **m**): C7.9,14) ¡

<[**n**,(**y** x **m**)] & ≤[(**y** x **m**),**n**] ⇒ <[**n**,**n**]
,! 46 (()E: 45) ¡

<[**n**,**n**] ,! 47 (⇒E: 44,46) ¡

¬ <[**n**,**n**] ,! 48 (∀E: C4.12) ¡

𝔉 ,! 49 (𝔉I: 47,48) ¡

<[**q**,**y**] ⇒ 𝔉 ,! 50 (⇒I: 17,49) ¡

¬ <[**q**,**y**] ,! 51 (¬I: 50) ¡

ω[**q**] & ω[**y**] & ¬ <[**q**,**y**] ,! 52 (&I: 16,51) ¡

n = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**] & **n** = ((**y** x **m**) + **x**) & <[**x**,**m**]
⇒ ω[**q**] & ω[**y**] & ¬ <[**q**,**y**] ,! 53 (⇒I: 2,52) ¡

(**n** = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**] & **n** = ((**y** x **m**) + **x**) & <[**x**,**m**]
⇒ ω[**q**] & ω[**y**] & ¬ <[**q**,**y**]) ,! 54 (()I: 53) ¡

∀n∀m∀q∀r∀x∀y (n = ((q x m) + r) & <[r,m]
& n = ((y x m) + x) & <[x,m]
⇒ ω[q] & ω[y] & ¬ <[q,y])
,! 55 (∀I: 1,54) ¡

□

! **68.** Uniqueness of the Division Algorithm. ¡

⊢ ∀n∀m∀q∀r∀x∀y (n = ((q x m) + r) & <[r,m]
& n = ((y x m) + x) & <[x,m]
⇒ y = q & x = r) ¡

n,**m**,**q**,**r**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

n = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**] & **n** = ((**y** x **m**) + **x**) & <[**x**,**m**]
,! 2 (Prem) ¡

(**n** = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**] & **n** = ((**y** x **m**) + **x**) & <[**x**,**m**]
⇒ ω[**q**] & ω[**y**] & ¬ <[**q**,**y**])
,! 3 (∀E: P67) ¡

n = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**] & **n** = ((**y** x **m**) + **x**) & <[**x**,**m**]
⇒ ω[**q**] & ω[**y**] & ¬ <[**q**,**y**]
,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**q**] & ω[**y**] & ¬ <[**q**,**y**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

n = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**] ,! 6 (&E: 2) ¡

n = ((**y** x **m**) + **x**) & <[**x**,**m**] ,! 7 (&E: 2) ¡

n = ((**y** x **m**) + **x**) & <[**x**,**m**] & **n** = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**]
,! 8 (&I: 6,7) ¡

(**n** = ((**y** x **m**) + **x**) & <[**x**,**m**] & **n** = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**]
⇒ ω[**y**] & ω[**q**] & ¬ <[**y**,**q**])
,! 9 (∀E: P67) ¡

n = ((**y** x **m**) + **x**) & <[**x**,**m**] & **n** = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**]
⇒ ω[**y**] & ω[**q**] & ¬ <[**y**,**q**]
,! 10 (()E: 9) ¡

ω[**y**] & ω[**q**] & ¬ <[**y**,**q**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

¬ <[**q**,**y**] ,! 12 (&E: 5) ¡

ω[**y**] & ω[**q**] & ¬ <[**y**,**q**] & ¬ <[**q**,**y**] ,! 13 (&I: 11,12) ¡

(ω[**y**] & ω[**q**] & ¬ <[**y**,**q**] & ¬ <[**q**,**y**] ⇒ **y** = **q**)
,! 14 (∀E: C4.48) ¡

ω[**y**] & ω[**q**] & ¬ <[**y**,**q**] & ¬ <[**q**,**y**] ⇒ **y** = **q**
,! 15 (()E: 14) ¡

y = **q** ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

n = ((**q** x **m**) + **r**) ,! 17 (&E: 6) ¡

n = ((**y** x **m**) + **r**) ,! 18 (=E: 16,17) ¡

n = ((**y** x **m**) + **x**) ,! 19 (&E: 7) ¡

((**y** x **m**) + **r**) = ((**y** x **m**) + **x**) ,! 20 (=E: 18,19) ¡

ω[(**y** x **m**)] & ω[**r**] ,! 21 (𝕋E: C1.7,20) ¡

ω[(**y** x **m**)] ,! 22 (&E: 21) ¡

ω[**y**] & ω[**m**] ,! 23 (𝕋E: C7.9,22) ¡

(((**y** x **m**) + **r**) = ((**y** x **m**) + **x**) ⇒ **r** = **x**)
,! 24 (∀E: C2.63;
(**y** x **m**): C7.9,23) ¡

((**y** x **m**) + **r**) = ((**y** x **m**) + **x**) ⇒ **r** = **x**
,! 25 (()E: 24) ¡

r = **x** ,! 26 (⇒E: 20,25) ¡

y = **q** & **r** = **x** ,! 27 (&I: 16,26) ¡

n = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**] & **n** = ((**y** x **m**) + **x**) & <[**x**,**m**]
⇒ **y** = **q** & **r** = **x**

,! 28 (⇒I: 2,27) ¡

(**n** = ((**q** x **m**) + **r**) & <[**r**,**m**] & **n** = ((**y** x **m**) + **x**) & <[**x**,**m**]
⇒ **y** = **q** & **r** = **x**)
,! 29 (()I: 28) ¡

∀n∀m∀q∀r∀x∀y (n = ((q x m) + r) & <[r,m]
& n = ((y x m) + x) & <[x,m]
⇒ y = q & x = r)
! 30 (∀I: 1,29) ¡

▯

! **69.** ¡

⊦ ∀n∀x∀y (∃c∃d n = ((cxx) - (dxy)) & ¬ y = 0
⇒ ∃c∃d n = ((cxy) - (dxx))) ¡

n,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

∃c∃d **n** = ((cx**x**) - (dx**y**)) & ¬ **y** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

∃c∃d **n** = ((cx**x**) - (dx**y**)) ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **y** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

∃d **n** = ((**a**x**x**) - (dx**y**)) ,! 5 (∃E: 3) ¡

n = ((**a**x**x**) - (**b**x**y**)) ,! 6 (∃E: 5) ¡

≤[(**b**x**y**),(**a**x**x**)] ,! 7 (𝕋E: C5.7,6) ¡

ω[**b**] & ω[**y**] ,! 8 (𝕋E: C7.9,7) ¡

ω[**a**] & ω[**x**] ,! 9 (𝕋E: C7.9,7) ¡

ω[**b**] ,! 10 (&E: 8) ¡

ω[**y**] ,! 11 (&E: 8) ¡

ω[**a**] ,! 12 (&E: 9) ¡

ω[**x**] ,! 13 (&E: 9) ¡

(**x** = 0 ∨ ¬ **x** = 0) ,! 14 (∀E: I3.4) ¡

x = 0 ∨ ¬ **x** = 0 ,! 15 (()E: 14) ¡

x = 0 ,! 16 (Prem) ¡

(ω[**a**] ⇒ (**a**x0) = 0) ,! 17 (∀E: P4) ¡

ω[**a**] ⇒ (**a**x0) = 0 ,! 18 (()E: 17) ¡

(**a**x0) = 0 ,! 19 (⇒E: 12,18) ¡

(**a**x**x**) = 0 ,! 20 (=E: 16,19) ¡

n = (0 - (**b**x**y**)) ,! 21 (=E: 6,20) ¡

(**n** = (0 - (**b**x**y**)) ⇒ **n** = 0) ,! 22 (∀E: C6.28; (**b**x**y**): C7.9,8) ¡

n = (0 - (**b**x**y**)) ⇒ **n** = 0 ,! 23 (()E: 22) ¡

n = 0 ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

(ω[**y**] ⇒ (0x**y**) = 0) ,! 25 (∀E: P3) ¡

ω[**y**] ⇒ (0x**y**) = 0 ,! 26 (()E: 25) ¡

(0x**y**) = 0 ,! 27 (⇒E: 11,26) ¡

n = (0 - 0) ,! 28 (=E: C6.18,24) ¡

n = ((0x**y**) - 0) ,! 29 (=E: 27,28) ¡

n = ((0x**y**) - (**a**x**x**)) ,! 30 (=E: 20,29) ¡

∃d **n** = ((0x**y**) - (dx**x**)) ,! 31 (∃I: 30) ¡

∃c∃d **n** = ((cx**y**) - (dx**x**)) ,! 32 (∃I: 31) ¡

x = 0 ⇒ ∃c∃d **n** = ((cx**y**) - (dx**x**)) ,! 33 (⇒I: 16,32) ¡

¬ **x** = 0 ,! 34 (Prem) ¡

ω[**x**] & ω[**y**] ,! 35 (&I: 11,13) ¡

ω[**x**] & ω[**y**] & ω[**b**] ,! 36 (&I: 10,35) ¡

ω[**x**] & ω[**y**] & ω[**b**] & ω[**a**] ,! 37 (&I: 12,36) ¡

ω[**x**] & ω[**y**] & ω[**b**] & ω[**a**] & ¬ **x** = 0
,! 38 (&I: 34,37) ¡

ω[**x**] & ω[**y**] & ω[**b**] & ω[**a**] & ¬ **x** = 0 & ¬ **y** = 0
,! 39 (&I: 4,38) ¡

(ω[**x**] & ω[**y**] & ω[**b**] & ω[**a**] & ¬ **x** = 0 & ¬ **y** = 0
⇒ ∃k (≤[**b**,(kx**x**)] & ≤[**a**,(kx**y**)]))
,! 40 (∀E: P58) ¡

ω[**x**] & ω[**y**] & ω[**b**] & ω[**a**] & ¬ **x** = 0 & ¬ **y** = 0
⇒ ∃k (≤[**b**,(kx**x**)] & ≤[**a**,(kx**y**)])
,! 41 (()E: P40) ¡

∃k (≤[**b**,(kx**x**)] & ≤[**a**,(kx**y**)]) ,! 42 (⇒E: 39,41) ¡

```
( ≤[b,(kxx)] & ≤[a,(kxy)] )            ,! 43 (∃E: 42)        ¡

≤[b,(kxx)] & ≤[a,(kxy)]                ,! 44 (()E: 43)       ¡

≤[b,(kxx)]                             ,! 45 (&E: 44)        ¡

≤[a,(kxy)]                             ,! 46 (&E: 44)        ¡

≤[a,(kxy)] & ω[x]                      ,! 47 (&I: 13,46)     ¡

ω[k] & ω[y]                            ,! 48 (𝕋E: C7.9,46)   ¡

( ≤[a,(kxy)] & ω[x] ⇒ ≤[(a x x),((kxy) x x)] )
                                       ,! 49 (∀E: P49;
                                       (kxy): C7.9,48)       ¡

≤[a,(kxy)] & ω[x] ⇒ ≤[(a x x),((kxy) x x)]
                                       ,! 50 (()E: 49)       ¡

≤[(axx),((kxy)xx)]                     ,! 51 (⇒E: 47,50)     ¡

≤[(bxy),(axx)] & ≤[(axx),((kxy)xx)]    ,! 52 (&I: 7,51)      ¡

ω[(kxy)] & ω[x]                        ,! 53 (𝕋E: C7.9,51)   ¡

( ≤[(bxy),(axx)] & ≤[(axx),((kxy)xx)]
  ⇒ ((((kxy)xx)-(bxy)) - (((kxy)xx)-(axx)))
     = ((axx)-(bxy)) )
                                       ,! 54 (∀E: C6.60;
                                       (bxy): C7.9,8;
                                       (axx): C7.9,9;
                                       ((kxy)xx): C7.9,53)   ¡

≤[(bxy),(axx)] & ≤[(axx),((kxy)xx)]
⇒ ((((kxy)xx)-(bxy)) - (((kxy)xx)-(axx)))
   = ((axx)-(bxy))
                                       ,! 55 (()E: 54)       ¡

((((kxy)xx)-(bxy)) - (((kxy)xx)-(axx))) = ((axx)-(bxy))
                                       ,! 56 (⇒E: 52,55)     ¡

n = ((((kxy)xx)-(bxy)) - (((kxy)xx)-(axx)))
                                       ,! 57 (=E: 6,56)      ¡

ω[k] & ω[y] & ω[x]                     ,! 58 (&I: 13,48)     ¡

( ω[k] & ω[y] & ω[x] ⇒ ((kxy)xx) = ((kxx)xy) )
                                       ,! 59 (∀E: P33)       ¡

ω[k] & ω[y] & ω[x] ⇒ ((kxy)xx) = ((kxx)xy)
                                       ,! 60 (()E: 59)       ¡

((kxy)xx) = ((kxx)xy)                  ,! 61 (⇒E: 58,60)     ¡
```

n = ((((**k**x**x**)x**y**)-(**b**x**y**)) - (((**k**x**y**)x**x**)-(**a**x**x**)))
,! 62 (=E: 57,61) ¡

≤[**b**,(**k**x**x**)] & ω[**y**] ,! 63 (&I: 45,11) ¡

ω[**k**] & ω[**x**] ,! 64 (𝕋E: C7.9,45) ¡

(≤[**b**,(**k**x**x**)] & ω[**y**]
⇒ (((**k**x**x**) - **b**) x **y**) = (((**k**x**x**)x**y**)-(**b**x**y**)))
,! 65 (∀E: P35;
(**k**x**x**): C7.9,64) ¡

≤[**b**,(**k**x**x**)] & ω[**y**]
⇒ (((**k**x**x**) - **b**) x **y**) = (((**k**x**x**)x**y**)-(**b**x**y**))
,! 66 (()E: 65) ¡

(((**k**x**x**) - **b**) x **y**) = (((**k**x**x**)x**y**)-(**b**x**y**))
,! 67 (⇒E: 63,66) ¡

n = (((**k**x**x**) - **b**) x **y**) - (((**k**x**y**)x**x**)-(**a**x**x**)))
,! 68 (=E: 62,67) ¡

(≤[**a**,(**k**x**y**)] & ω[**x**]
⇒ (((**k**x**y**) - **a**) x **x**) = (((**k**x**y**)x**x**)-(**a**x**x**)))
,! 69 (∀E: P35;
(**k**x**y**): C7.9,48) ¡

≤[**a**,(**k**x**y**)] & ω[**x**]
⇒ (((**k**x**y**) - **a**) x **x**) = (((**k**x**y**)x**x**)-(**a**x**x**))
,! 70 (()E: 69) ¡

(((**k**x**y**) - **a**) x **x**) = (((**k**x**y**)x**x**)-(**a**x**x**))
,! 71 (⇒E: 47,70) ¡

n = (((**k**x**x**) - **b**) x **y**) - (((**k**x**y**) - **a**) x **x**))
,! 72 (=E: 68,71) ¡

∃d **n** = (((**k**x**x**) - **b**) x **y**) - (dx**x**)) ,! 73 (∃I: 72;
((**k**x**y**) - **a**): C5.7,46)
¡

∃c∃d **n** = ((cx**y**) - (dx**x**)) ,! 74 (∃I: 73;
((**k**x**x**) - **b**): C5.7,45)
¡

¬ **x** = 0 ⇒ ∃c∃d **n** = ((cx**y**) - (dx**x**)) ,! 75 (⇒I: 34,74) ¡

∃c∃d **n** = ((cx**y**) - (dx**x**)) ,! 76 (∨E: 15,33,75)
¡

∃c∃d **n** = ((cx**x**) - (dx**y**)) & ¬ **y** = 0 ⇒ ∃c∃d **n** = ((cx**y**) - (dx**x**))
,! 77 (⇒I: 2,76) ¡

(∃c∃d **n** = ((cx**x**) - (dx**y**)) & ¬ **y** = 0

⇒ ∃c∃d **n** = ((cx**y**) - (dx**x**)))
,! 78 (()I: 77) ¡

∀n∀x∀y (∃c∃d n = ((cxx) - (dxy)) & ¬ y = 0
⇒ ∃c∃d n = ((cxy) - (dxx)))
! 79 (∀I: 1,78) ¡

▯

! **70.** ¡

⊦ ∀n∀m∀t∀q∀r (n = ((qxt) + r) & ∃c∃d t = ((cxm)-(dxn))
⇒ ∃c∃d r = ((cxn)-(dxm))) ¡

n,**m**,**t**,**q**,**r** ,! 1 (Prem) ¡

n = ((**q**x**t**) + **r**) & ∃c∃d **t** = ((cx**m**)-(dx**n**))
,! 2 (Prem) ¡

n = ((**q**x**t**) + **r**) ,! 3 (&E: 2) ¡

∃c∃d **t** = ((cx**m**)-(dx**n**)) ,! 4 (&E: 2) ¡

∃d **t** = ((**c**x**m**)-(dx**n**)) ,! 5 (∃E: 4) ¡

t = ((**c**x**m**)-(**d**x**n**)) ,! 6 (∃E: 5) ¡

n = ((**q** x ((**c**x**m**)-(**d**x**n**))) + **r**) ,! 7 (=E: 3,6) ¡

ω[(**q** x ((**c**x**m**)-(**d**x**n**)))] & ω[**r**] ,! 8 (𝕋E: C1.7,7) ¡

ω[(**q** x ((**c**x**m**)-(**d**x**n**)))] ,! 9 (&E: 8) ¡

ω[**r**] ,! 10 (&E: 8) ¡

ω[**q**] & ω[((**c**x**m**)-(**d**x**n**))] ,! 11 (𝕋E: C7.9,9) ¡

ω[**q**] ,! 12 (&E: 11) ¡

ω[((**c**x**m**)-(**d**x**n**))] ,! 13 (&E: 11) ¡

≤[(**d**x**n**),(**c**x**m**)] ,! 14 (𝕋E: C5.7,13) ¡

≤[(**d**x**n**),(**c**x**m**)] & ω[**q**] ,! 15 (&I: 12,14) ¡

ω[**d**] & ω[**n**] ,! 16 (𝕋E: C7.9,14) ¡

ω[**c**] & ω[**m**] ,! 17 (𝕋E: C7.9,14) ¡

(≤[(**d**x**n**),(**c**x**m**)] & ω[**q**]
⇒ (**q** x ((**c**x**m**) - (**d**x**n**))) = ((**q** x (**c**x**m**)) - (**q** x (**d**x**n**))))
,! 18 (∀E: P36;
(**d**x**n**): C7.9,16;
(**c**x**m**): C7.9,17) ¡

```
≤[(dxn),(cxm)] & ω[q]
⇒ (q x ((cxm) - (dxn))) = ((q x (cxm)) - (q x (dxn)))
                                          ,! 19 (()E: 18)     ¡

(q x ((cxm) - (dxn))) = ((q x (cxm)) - (q x (dxn)))
                                          ,! 20 (⇒E: 15,19)   ¡

n = (((q x (cxm)) - (q x (dxn))) + r)
                                          ,! 21 (=E: 7,20)    ¡

≤[(q x (dxn)),(q x (cxm))]                ,! 22 (𝕋E: C5.7,20) ¡

≤[(q x (dxn)),(q x (cxm))] & ω[r]         ,! 23 (&I: 10,22)   ¡

ω[q] & ω[(dxn)]                           ,! 24 (𝕋E: C7.9,22) ¡

ω[q] & ω[(cxm)]                           ,! 25 (𝕋E: C7.9,22) ¡

( ≤[(q x (dxn)),(q x (cxm))] & ω[r]
  ⇒ (((q x (cxm)) + r) - (q x (dxn)))
    = (((q x (cxm)) - (q x (dxn))) + r) )
                                          ,! 26 (∀E: C6.38;
                                          (q x (dxn)): C7.9,24;
                                          (q x (cxm)): C7.9,25)
                                                              ¡

≤[(q x (dxn)),(q x (cxm))] & ω[r]
⇒ (((q x (cxm)) + r) - (q x (dxn)))
   = (((q x (cxm)) - (q x (dxn))) + r)
                                          ,! 27 (()E: 26)     ¡

(((q x (cxm)) + r) - (q x (dxn)))
= (((q x (cxm)) - (q x (dxn))) + r)
                                          ,! 28 (⇒E: 23,27)   ¡

(((q x (cxm)) + r) - (q x (dxn))) = n
                                          ,! 29 (=E: 21,28)   ¡

≤[(q x (dxn)),((q x (cxm)) + r)]          ,! 30 (𝕋E: C5.7,29) ¡

ω[(q x (cxm))] & ω[r]                     ,! 31 (𝕋E: C7.9,30) ¡

( (((q x (cxm)) + r) - (q x (dxn))) = n
  ⇒ ((q x (dxn)) + n) = ((q x (cxm)) + r) )
                                          ,! 32 (∀E: C6.5;
                                      ((q x (cxm)) + r): C1.7,31;
                                      (q x (dxn)): C7.9,24)   ¡

(((q x (cxm)) + r) - (q x (dxn))) = n
⇒ ((q x (dxn)) + n) = ((q x (cxm)) + r)
                                          ,! 33 (()E: 32)     ¡
```

((**q** x (**d**x**n**)) + **n**) = ((**q** x (**c**x**m**)) + **r**)
,! 34 (⇒E: 29,33) ¡

ω[(**q** x (**d**x**n**))] & ω[**n**] ,! 35 (𝕋E: C1.7,34) ¡

(((**q** x (**d**x**n**)) + **n**) = ((**q** x (**c**x**m**)) + **r**)
⇒ **r** = (((**q** x (**d**x**n**)) + **n**) - (**q** x (**c**x**m**))))
,! 36 (∀E: C6.13;
((**q** x (**d**x**n**)) + **n**): C1.7,35;
(**q** x (**c**x**m**)): C7.9,25) ¡

((**q** x (**d**x**n**)) + **n**) = ((**q** x (**c**x**m**)) + **r**)
⇒ **r** = (((**q** x (**d**x**n**)) + **n**) - (**q** x (**c**x**m**)))
,! 37 (()E: 36) ¡

r = (((**q** x (**d**x**n**)) + **n**) - (**q** x (**c**x**m**)))
,! 38 (⇒E: 34,37) ¡

ω[**q**] & ω[**d**] & ω[**n**] ,! 39 (&I: 12,16) ¡

(ω[**q**] & ω[**d**] & ω[**n**] ⇒ ((**q**x**d**) x **n**) = (**q** x (**d**x**n**)))
,! 40 (∀E: P28) ¡

ω[**q**] & ω[**d**] & ω[**n**] ⇒ ((**q**x**d**) x **n**) = (**q** x (**d**x**n**))
,! 41 (()E: 40) ¡

((**q**x**d**) x **n**) = (**q** x (**d**x**n**)) ,! 42 (⇒E: 39,41) ¡

r = ((((**q**x**d**) x **n**) + **n**) - (**q** x (**c**x**m**)))
,! 43 (=E: 38,42) ¡

ω[**q**] & ω[**c**] & ω[**m**] ,! 44 (&I: 12,17) ¡

(ω[**q**] & ω[**c**] & ω[**m**] ⇒ ((**q**x**c**) x **m**) = (**q** x (**c**x**m**)))
,! 45 (∀E: P28) ¡

ω[**q**] & ω[**c**] & ω[**m**] ⇒ ((**q**x**c**) x **m**) = (**q** x (**c**x**m**))
,! 46 (()E: 44) ¡

((**q**x**c**) x **m**) = (**q** x (**c**x**m**)) ,! 47 (⇒E: 44,46) ¡

r = ((((**q**x**d**) x **n**) + **n**) - ((**q**x**c**) x **m**))
,! 48 (=E: 43,37) ¡

ω[(**q**x**d**)] & ω[**n**] ,! 49 (𝕋E: C7.9,42) ¡

ω[**q**] & ω[**d**] ,! 50 (&E: 39) ¡

(ω[(**q**x**d**)] & ω[**n**] ⇒ (((**q**x**d**) + 1) x **n**) = (((**q**x**d**) x **n**) + **n**))
,! 51 (∀E: P17;
(**q**x**d**): C7.9,50) ¡

ω[(**q**x**d**)] & ω[**n**] ⇒ (((**q**x**d**) + 1) x **n**) = (((**q**x**d**) x **n**) + **n**)
,! 52 (()E: 51) ¡

(((**q**x**d**) + 1) x **n**) = (((**q**x**d**) x **n**) + **n**)
,! 53 (⇒E: 49,52) ¡

r = ((((**q**x**d**) + 1) x **n**) - ((**q**x**c**) x **m**))
,! 54 (=E: 48,53) ¡

ω[(**q**x**c**)] & ω[**m**] ,! 55 (𝕋E: C7.9,47) ¡

ω[(**q**x**c**)] ,! 56 (&E: 55) ¡

ω[**q**] & ω[**c**] ,! 57 (𝕋E: C7.9,56) ¡

∃d **r** = ((((**q**x**d**) + 1) x **n**) - (d x **m**)) ,! 58 (∃I: 54; (**q**x**c**): C7.9,57) ¡

ω[(**q**x**d**)] ,! 59 (&E: 49) ¡

ω[(**q**x**d**)] & ω[1] ,! 60 (&I: IV9.2,59) ¡

∃c∃d **r** = ((c x **n**) - (d x **m**)) ,! 61 (∃I: 54; ((**q**x**d**) + 1): C1.7,56) ¡

n = ((**q**x**t**) + **r**) & ∃c∃d **t** = ((cx**m**)-(dx**n**))
⇒ ∃c∃d **r** = ((c x **n**) - (d x **m**))
,! 62 (⇒I: 2,61) ¡

(**n** = ((**q**x**t**) + **r**) & ∃c∃d **t** = ((cx**m**)-(dx**n**))
⇒ ∃c∃d **r** = ((c x **n**) - (d x **m**)))
,! 63 (()I: 62) ¡

∀n∀m∀t∀q∀r (n = ((qxt) + r) & ∃c∃d t = ((cxm)-(dxn))
⇒ ∃c∃d r = ((cxn)-(dxm)))
! 64 (∀I: 1,63) ¡

▯