!CHAPTER 7

MULTIPLICATION¡

! This chapter provides the basis for the laws of multiplication proved in the next. P9, which defines the multiplication term, is of special importance. Propositions from IV11 play a key role throughout the chapter. ¡

! **1.** P1 contains the only appeal to the Mult axiom. Subsequent propositions rely on P1. ¡

⊦ ∀n∀m∀k∀P∀R (ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R
⇒ (⊗[n,m,k] ⇔ ℿ[k,((R ⌈ P)^I)])) ¡

n,m,**k**,**P**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ℿ[**n**,**P**] & **R** υm **P** & 1 **R** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ℿ[**n**,**P**] ,! 5 (&E: 2) ¡

R υm **P** ,! 6 (&E: 2) ¡

1 **R** ,! 7 (&E: 2) ¡

ω[**m**] & ∀x (**P**[x] ⇒ ℿ[**m**,((**R** ⌈ (x•))^I)])
,! 8 (SE: IV11.1,6) ¡

ω[**m**] ,! 9 (&E: 8) ¡

∀x (**P**[x] ⇒ ℿ[**m**,((**R** ⌈ (x•))^I)]) ,! 10 (&E: 8) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ,! 11 (&E: 3,9) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ℿ[**n**,**P**] ,! 12 (&I: 5,11) ¡

x ,! 13 (Prem) ¡

(**P**[**x**] ⇒ ℿ[**m**,((**R** ⌈ (**x**•))^I)]) ,! 14 (∀E: 10) ¡

P[**x**] ⇒ ℿ[**m**,((**R** ⌈ (**x**•))^I)] ,! 15 (()E: 14) ¡

P[**x**] ,! 16 (Prem) ¡

ℿ[**m**,((**R** ⌈ (**x**•))^I)] ,! 17 (⇒E: 15,16) ¡

ω[**m**] & ℿ[**m**,((**R** ⌈ (**x**•))^I)] ,! 18 (&I: 9,17) ¡

(ω[**m**] & ℿ[**m**,((**R** ⌈ (**x**•))^I)] ⇒ ℿ[**m**,{y : **R**[**x**,y]}])
,! 19 (∀E: IV4.13) ¡

ω[**m**] & ℿ[**m**,((**R** ⌈ (**x**•))^I)] ⇒ ℿ[**m**,{y : **R**[**x**,y]}]

,! 20 (()E: 19) ¡

𝔑[**m**,{y : **R**[**x**,y]}] ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

P[**x**] ⇒ 𝔑[**m**,{y : **R**[**x**,y]}] ,! 22 (⇒I: 16,21) ¡

(**P**[**x**] ⇒ 𝔑[**m**,{y : **R**[**x**,y]}]) ,! 23 (()I: 22) ¡

∀x (**P**[x] ⇒ 𝔑[**m**,{y : **R**[x,y]}]) ,! 24 (∀I: 13,23) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & 𝔑[**n**,**P**] & ∀x (**P**[x] ⇒ 𝔑[**m**,{y : **R**[x,y]}])
,! 25 (&I: 12,24) ¡

∀x∀y∀z (**R**[x,y] & **R**[z,y] ⇒ x = z) ,! 26 (𝕾E: III9.1,7)
¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & 𝔑[**n**,**P**] & ∀x (**P**[x] ⇒ 𝔑[**m**,{y : **R**[x,y]}])
& ∀x∀y∀z (**R**[x,y] & **R**[z,y] ⇒ x = z)
,! 27 (&I: 25,26) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & 𝔑[**n**,**P**]
& ∀x (**P**[x] ⇒ 𝔑[**m**,{y : **R**[x,y]}])
& ∀x∀y∀z (**R**[x,y] & **R**[z,y] ⇒ x = z)
⇒ (⊗[**n**,**m**,**k**] ⇔ 𝔑[**k**,{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])}]))
,! 28 (∀E: Mult) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & 𝔑[**n**,**P**] & ∀x (**P**[x] ⇒ 𝔑[**m**,{y : **R**[x,y]}])
& ∀x∀y∀z(**R**[x,y] & **R**[z,y] ⇒ x = z)
⇒ (⊗[**n**,**m**,**k**] ⇔ 𝔑[**k**,{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])}])
,! 29 (()E: 28) ¡

(⊗[**n**,**m**,**k**] ⇔ 𝔑[**k**,{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])}])
,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

⊗[**n**,**m**,**k**] ⇔ 𝔑[**k**,{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])}]
,! 31 (⇒E: 30) ¡

{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])} ≡ ((**R** ⌈ **P**)^{I}) ,! 32 (∀E: III7.47) ¡

⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 33 (Prem) ¡

⊗[**n**,**m**,**k**] ⇒ 𝔑[**k**,{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])}]
,! 34 (⇔E: 31) ¡

𝔑[**k**,{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])}] ,! 35 (⇒E: 33,34) ¡

ω[**k**] & 𝔑[**k**,{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])}]
,! 36 (&I: 4,35) ¡

ω[**k**] & 𝔑[**k**,{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])}]
& {y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])} ≡ ((**R** ⌈ **P**)^{I})
,! 37 (&I: 32,36) ¡

(ω[**k**] & 𝔑[**k**,{y : ∃z(**R**[z,y] & **P**[z])}]
& {y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])} ≡ ((**R** ⌈ **P**)^I)
⇒ 𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)])
,! 38 (∀E: CIV4.5) ¡

ω[**k**] & 𝔑[**k**,{y : ∃z(**R**[z,y] & **P**[z])}]
& {y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])} ≡ ((**R** ⌈ **P**)^I)
⇒ 𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)]
,! 39 (()E: 38) ¡

𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)] ,! 40 (⇒E: 37,39) ¡

⊗[**n**,**m**,**k**] ⇒ 𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)] ,! 41 (⇒I: 33,40) ¡

𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)] ,! 42 (Prem) ¡

ω[**k**] & 𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)] ,! 43 (&I: 4,42) ¡

ω[**k**] & 𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)]
& {y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])} ≡ ((**R** ⌈ **P**)^I)
,! 44 (&I: 32,43) ¡

(ω[**k**] & 𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)]
& {y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])} ≡ ((**R** ⌈ **P**)^I)
⇒ 𝔑[**k**,{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])}])
,! 45 (∀E: IV4.6) ¡

ω[**k**] & 𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)]
& {y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])} ≡ ((**R** ⌈ **P**)^I)
⇒ 𝔑[**k**,{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])}]
,! 46 (()E: 45) ¡

𝔑[**k**,{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])}] ,! 47 (⇒E: 44,46) ¡

𝔑[**k**,{y : ∃z (**R**[z,y] & **P**[z])}] ⇒ ⊗[**n**,**m**,**k**]
,! 48 (⇔E: 31) ¡

⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 49 (⇒E: 47,48) ¡

𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)] ⇒ ⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 50 (⇒I: 42,49) ¡

⊗[**n**,**m**,**k**] ⇔ 𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)] ,! 51 (⇔I: 41,50) ¡

(⊗[**n**,**m**,**k**] ⇔ 𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)])
,! 52 (()I: 51) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R**
⇒ (⊗[**n**,**m**,**k**] ⇔ 𝔑[**k**,((**R** ⌈ **P**)^I)])
,! 53 (⇒I: 2,52) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R**

⇒ (⊗[n,m,k] ⇔ ℿ[k,((R ⌈ P)^{I})]))
,! 54 (()I: 53) ¡

∀n∀m∀k∀P∀R (ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & **1** R
⇒ (⊗[n,m,k] ⇔ ℿ[k,((R ⌈ P)^{I})]))
! 55 (∀I: 1,54)

▯

! P2 and P3 are different halves of P1. ¡

! **2.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀P∀R (ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & **1** R & ⊗[n,m,k]
⇒ ℿ[k,((R ⌈ P)^{I})]) ¡

n,m,k,P,R ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & ⊗[n,m,k]
,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R ,! 3 (&E: 2) ¡

⊗[n,m,k] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R
⇒ (⊗[n,m,k] ⇔ ℿ[k,((R ⌈ P)^{I})]))
,! 5 (∀E: P1) ¡

ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R
⇒ (⊗[n,m,k] ⇔ ℿ[k,((R ⌈ P)^{I})])
,! 6 (()E: 5) ¡

(⊗[n,m,k] ⇔ ℿ[k,((R ⌈ P)^{I})]) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

⊗[n,m,k] ⇔ ℿ[k,((R ⌈ P)^{I})] ,! 8 (()E: 7) ¡

⊗[n,m,k] ⇒ ℿ[k,((R ⌈ P)^{I})] ,! 9 (⇔E: 8) ¡

ℿ[k,((R ⌈ P)^{I})] ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & ⊗[n,m,k]
⇒ ℿ[k,((R ⌈ P)^{I})]
,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & ⊗[n,m,k]
⇒ ℿ[k,((R ⌈ P)^{I})])
,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀k∀P∀R (ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & **1** R & ⊗[n,m,k]
⇒ ℿ[k,((R ⌈ P)^{I})])
! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **3.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k∀P∀R (ω[n] & ω[k] & Ռ[n,P] & R υ$_m$ P & **1** R
& Ռ[k,((R ⌈ P)^{I})]
⇒ ⊗[n,m,k]) ¡

n,m,**k**,**P**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & Ռ[**n**,**P**] & **R** υ$_m$ **P** & **1** **R** & Ռ[**k**,((**R** ⌈ **P**)^{I})]
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & Ռ[**n**,**P**] & **R** υ$_m$ **P** & **1** **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

Ռ[**k**,((**R** ⌈ **P**)^{I})] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] & Ռ[**n**,**P**] & **R** υ$_m$ **P** & **1** **R**
⇒ (⊗[**n**,**m**,**k**] ⇔ Ռ[**k**,((**R** ⌈ **P**)^{I})]))
,! 5 (∀E: P1) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & Ռ[**n**,**P**] & **R** υ$_m$ **P** & **1** **R**
⇒ (⊗[**n**,**m**,**k**] ⇔ Ռ[**k**,((**R** ⌈ **P**)^{I})])
,! 6 (()E: 5) ¡

(⊗[**n**,**m**,**k**] ⇔ Ռ[**k**,((**R** ⌈ **P**)^{I})]) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

⊗[**n**,**m**,**k**] ⇔ Ռ[**k**,((**R** ⌈ **P**)^{I})] ,! 8 (()E: 7) ¡

Ռ[**k**,((**R** ⌈ **P**)^{I})] ⇒ ⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 9 (⇔E: 8) ¡

⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & Ռ[**n**,**P**] & **R** υ$_m$ **P** & **1** **R** & Ռ[**k**,((**R** ⌈ **P**)^{I})]
⇒ ⊗[**n**,**m**,**k**]
,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] & Ռ[**n**,**P**] & **R** υ$_m$ **P** & **1** **R** & Ռ[**k**,((**R** ⌈ **P**)^{I})]
⇒ ⊗[**n**,**m**,**k**])
,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀k∀P∀R (ω[n] & ω[k] & Ռ[n,P] & R υ$_m$ P & **1** R
& Ռ[k,((R ⌈ P)^{I})]
⇒ ⊗[n,m,k])
! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! P4 and P5 restate P2 and P3. ¡

! **4.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀P∀R (ω[n] & ω[k] & 𝔑[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P
& ⊗[n,m,k]
⇒ 𝔑[k,(R^I)]) ¡

n,m,k,P,R ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[k] & 𝔑[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P & ⊗[n,m,k]
,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ω[k] & 𝔑[n,P] & R υm P & 1 R ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[k] ,! 4 (&E: 2) ¡

(R^D) ⊆ P ,! 5 (&E: 2) ¡

⊗[n,m,k] ,! 6 (&E: 2) ¡

ω[n] & ω[k] & 𝔑[n,P] & R υm P & 1 R & ⊗[n,m,k]
,! 7 (&I: 2,6) ¡

(ω[n] & ω[k] & 𝔑[n,P] & R υm P & 1 R & ⊗[n,m,k]
⇒ 𝔑[k,((R ⌈ P)^I)])
,! 8 (∀E: P2) ¡

ω[n] & ω[k] & 𝔑[n,P] & R υm P & 1 R & ⊗[n,m,k]
⇒ 𝔑[k,((R ⌈ P)^I)]
,! 9 (()E: 8) ¡

𝔑[k,((R ⌈ P)^I)] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

ω[k] & 𝔑[k,((R ⌈ P)^I)] ,! 11 (&I: 4,10) ¡

((R^D) ⊆ P ⇒ (R ⌈ P) ≡ R) ,! 12 (∀E: III7.24) ¡

(R^D) ⊆ P ⇒ (R ⌈ P) ≡ R ,! 13 (()E: 12) ¡

(R ⌈ P) ≡ R ,! 14 (⇒E: 5,13) ¡

ω[k] & 𝔑[k,((R ⌈ P)^I)] & (R ⌈ P) ≡ R ,! 15 (&I: 11,14) ¡

(ω[k] & 𝔑[k,((R ⌈ P)^I)] & (R ⌈ P) ≡ R ⇒ 𝔑[k,(R^I)])
,! 16 (∀E: IV4.10) ¡

ω[k] & 𝔑[k,((R ⌈ P)^I)] & (R ⌈ P) ≡ R ⇒ 𝔑[k,(R^I)]
,! 17 (()E: 16) ¡

𝔑[k,(R^I)] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

ω[n] & ω[k] & 𝔑[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P & ⊗[n,m,k]
⇒ 𝔑[k,(R^I)]
,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(ω[n] & ω[k] & ɱ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^{D}) ⊆ P & ⊗[n,m,k]
⇒ ɱ[k,(R^{I})])
,! 20 (()I: 19) ¡

∀n∀m∀k∀P∀R (ω[n] & ω[k] & ɱ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^{D}) ⊆ P
& ⊗[n,m,k]
⇒ ɱ[k,(R^{I})])
! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **5.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀P∀R (ω[n] & ω[k] & ɱ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^{D}) ⊆ P
& ɱ[k,(R^{I})]
⇒ ⊗[n,m,k]) ¡

n,m,k,P,R ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[k] & ɱ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^{D}) ⊆ P
& ɱ[k,(R^{I})]
,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ω[k] & ɱ[n,P] & R υm P & 1 R ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[k] ,! 4 (&E: 2) ¡

(R^{D}) ⊆ P ,! 5 (&E: 2) ¡

ɱ[k,(R^{I})] ,! 6 (&E: 2) ¡

ω[k] & ɱ[k,(R^{I})] ,! 7 (&I: 4,6) ¡

((R^{D}) ⊆ P ⇒ (R ⌈ P) ≣ R) ,! 8 (∀E: III7.24) ¡

(R^{D}) ⊆ P ⇒ (R ⌈ P) ≣ R ,! 9 (()E: 8) ¡

(R ⌈ P) ≣ R ,! 10 (⇒E: 5,9) ¡

ω[k] & ɱ[k,(R^{I})] & (R ⌈ P) ≣ R ,! 11 (&I: 7,10) ¡

(ω[k] & ɱ[k,(R^{I})] & (R ⌈ P) ≣ R ⇒ ɱ[k,((R ⌈ P)^{I})])
,! 12 (∀E: CIV4.11) ¡

ω[k] & ɱ[k,(R^{I})] & (R ⌈ P) ≣ R ⇒ ɱ[k,((R ⌈ P)^{I})]
,! 13 (()E: 12) ¡

ɱ[k,((R ⌈ P)^{I})] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

ω[n] & ω[k] & ɱ[n,P] & R υm P & 1 R & ɱ[k,((R ⌈ P)^{I})]
,! 15 (&I: 3,14) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] & ℕ[**n**,**P**] & **R** υ$_{m}$ **P** & **1** **R** & ℕ[**k**,((**R** ⌈ **P**)^{I})]
⇒ ⊗[**n**,m,**k**])

,! 16 (∀E: P3) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ℕ[**n**,**P**] & **R** υ$_{m}$ **P** & **1** **R** & ℕ[**k**,((**R** ⌈ **P**)^{I})]
⇒ ⊗[**n**,m,**k**]

,! 17 (()E: 16) ¡

⊗[**n**,m,**k**] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ℕ[**n**,**P**] & **R** υ$_{m}$ **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P** & ℕ[**k**,(**R**^{I})]
⇒ ⊗[**n**,m,**k**]

,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] & ℕ[**n**,**P**] & **R** υ$_{m}$ **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P** & ℕ[**k**,(**R**^{I})]
⇒ ⊗[**n**,m,**k**])

,! 20 (()I: 19) ¡

∀n∀m∀k∀P∀R (ω[n] & ω[k] & ℕ[n,P] & R υ$_{m}$ P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P
& ℕ[k,(R^{I})]
⇒ ⊗[n,m,k])

! 21 (∀I: 1,20) ¡

□

! **6.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊗[n,m,k]
⇒ ∃P∃R (ℕ[n,P] & R υ$_{m}$ P & **1** R & ℕ[k,(R^{I})])) ¡

n,**j**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**n**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 5 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 6 (&I: 4,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃P∃R (ℕ[**n**,P] & R υ$_{m}$ P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P))

,! 7 (∀E: IV11.18) ¡

ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃P∃R (ℕ[**n**,P] & R υ$_{m}$ P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P)

,! 8 (()E: 7) ¡

∃P∃R (ℕ[**n**,P] & R υ$_{m}$ P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P)

,! 9 (⇒E: 3,8) ¡

∃R (ℿ[**n**,**P**] & R υ$_m$ **P** & **1** R & (R^D) ⊆ **P**)
,! 10 (∃E: 9) ¡

(ℿ[**n**,**P**] & **R** υ$_m$ **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P**) ,! 11 (∃E: 10) ¡

ℿ[**n**,**P**] & **R** υ$_m$ **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P** ,! 12 (()E: 11) ¡

ℿ[**n**,**P**] & **R** υ$_m$ **P** & **1** **R** ,! 13 (&E: 12) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ℿ[**n**,**P**] & **R** υ$_m$ **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P** & ⊗[**n**,**j**,**k**]
,! 14 (&I: 6,12) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] & ℿ[**n**,**P**] & **R** υ$_j$ **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P** & ⊗[**n**,**j**,**k**]
⇒ ℿ[**k**,(**R**^{I})])
,! 15 (∀E: P4) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ℿ[**n**,**P**] & **R** υ$_j$ **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P** & ⊗[**n**,**j**,**k**]
⇒ ℿ[**k**,(**R**^{I})]
,! 16 (()E: 15) ¡

ℿ[**k**,(**R**^{I})] ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

ℿ[**n**,**P**] & **R** υ$_m$ **P** & **1** **R** & ℿ[**k**,(**R**^{I})] ,! 18 (&I: 13,17) ¡

(ℿ[**n**,**P**] & **R** υ$_m$ **P** & **1** **R** & ℿ[**k**,(**R**^{I})]) ,! 19 (()I: 18) ¡

∃R (ℿ[**n**,**P**] & R υ$_m$ **P** & **1** R & ℿ[**k**,(R^I)])
,! 20 (∃I: 19) ¡

∃P∃R (ℿ[**n**,P] & R υ$_m$ P & **1** R & ℿ[**k**,(R^I)])
,! 21 (∃I: 20) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**]
⇒ ∃P∃R (ℿ[**n**,P] & R υ$_m$ P & **1** R & ℿ[**k**,(R^I)])
,! 22 (⇒I: 2,21) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**]
⇒ ∃P∃R (ℿ[**n**,P] & R υ$_m$ P & **1** R & ℿ[**k**,(R^I)]))
,! 23 (()I: 22) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊗[n,m,k]
⇒ ∃P∃R (ℿ[n,P] & R υ$_m$ P & **1** R & ℿ[k,(R^I)]))
! 24 (∀I: 1,23) ¡

▯

! P7 and P8 prepare the definition of the multiplication term in P9. ¡

! **7.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ∃a (ω[a] & ⊗[n,m,a])) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃P∃R (ℕ[**n**,P] & R υ**m** P & **1** R & (R^D) ⊆ P & *f* (R^I)))
,! 4 (∀E: IV11.16) ¡

ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃P∃R (ℕ[**n**,P] & R υ**m** P & **1** R & (R^D) ⊆ P & *f* (R^I))
,! 5 (()E: 4) ¡

∃P∃R (ℕ[**n**,P] & R υ**m** P & **1** R & (R^D) ⊆ P & *f* (R^I))
,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

∃R (ℕ[**n**,**P**] & R υ**m** **P** & **1** R & (R^D) ⊆ **P** & *f* (R^I))
,! 7 (∃E: 6) ¡

(ℕ[**n**,**P**] & **R** υ**m** **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P** & *f* (**R**^{I}))
,! 8 (∃E: 7) ¡

ℕ[**n**,**P**] & **R** υ**m** **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P** & *f* (**R**^{I})
,! 9 (()E: 8) ¡

ℕ[**n**,**P**] & **R** υ**m** **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P** ,! 10 (&E: 9) ¡

f (**R**^{I}) ,! 11 (&E: 9) ¡

∃n (ω[n] & ℕ[n,(**R**^{I})]) ,! 12 ($E: IV5.1,11) ¡

(ω[**k**] & ℕ[**k**,(**R**^{I})]) ,! 13 (∃E: 12) ¡

ω[**k**] & ℕ[**k**,(**R**^{I})] ,! 14 (()E: 13) ¡

ω[**k**] ,! 15 (&E: 14) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ℕ[**k**,(**R**^{I})] ,! 16 (&I: 3,14) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ℕ[**n**,**P**] & **R** υ**m** **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P** & ℕ[**k**,(**R**^{I})]
,! 17 (&I: 10,16) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] & ℕ[**n**,**P**] & **R** υ**m** **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P**

& ℩[**k**,(**R**^{I})]
⇒ ⊗[**n**,**m**,**k**])

,! 18 (∀E: P5) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & ℩[**n**,**P**] & **R** ≀$_{m}$ **P** & 1 **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P** & ℩[**k**,(**R**^{I})]
⇒ ⊗[**n**,**m**,**k**]

,! 19 (()E: 18) ¡

⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 21 (&I: 15,20) ¡

(ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**]) ,! 22 (()I: 21) ¡

∃a (ω[a] & ⊗[**n**,**m**,a]) ,! 23 (∃I: 22) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃a (ω[a] & ⊗[**n**,**m**,a]) ,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃a (ω[a] & ⊗[**n**,**m**,a])) ,! 25 (()I: 24) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ∃a (ω[a] & ⊗[n,m,a]))

! 26 (∀I: 1,25) ¡

▯

! **8.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m]
⇒ ∀a∀b((ω[a] & ⊗[n,m,a]) & (ω[b] & ⊗[n,m,b])
⇒ a = b)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

a,**b** ,! 4 (Prem) ¡

(ω[**a**] & ⊗[**n**,**m**,**a**]) & (ω[**b**] & ⊗[**n**,**m**,**b**])
,! 5 (Prem) ¡

(ω[**a**] & ⊗[**n**,**m**,**a**]) ,! 6 (&E: 5) ¡

ω[**a**] & ⊗[**n**,**m**,**a**] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[**a**] ,! 8 (&E: 7) ¡

(ω[**b**] & ⊗[**n**,**m**,**b**]) ,! 9 (&E: 5) ¡

ω[**b**] & ⊗[**n**,**m**,**b**] ,! 10 (()E: 9) ¡

ω[**b**] ,! 11 (&E: 10) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ,! 12 (&I: 8,11) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃P∃R (ℵ[**n**,P] & R υm P & **1** R))
,! 13 (∀E: IV11.17) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃P∃R (ℵ[**n**,P] & R υm P & **1** R)
,! 14 (()E: 13) ¡

∃P∃R (ℵ[**n**,P] & R υm P & **1** R) ,! 15 (⇒E: 2,14) ¡

∃R (ℵ[**n**,**P**] & R υm **P** & **1** R) ,! 16 (∃E: 15) ¡

(ℵ[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R**) ,! 17 (∃E: 16) ¡

ℵ[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** ,! 18 (()E: 17) ¡

ω[**n**] & ω[**a**] & ⊗[**n**,**m**,**a**] ,! 19 (&I: 3,7) ¡

ω[**n**] & ω[**a**] & ℵ[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ⊗[**n**,**m**,**a**]
,! 20 (&I: 18,19) ¡

(ω[**n**] & ω[**a**] & ℵ[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ⊗[**n**,**m**,**a**]
⇒ ℵ[**a**,((**R** ⌈ **P**)ᴵ)])
,! 21 (∀E: P2) ¡

ω[**n**] & ω[**a**] & ℵ[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ⊗[**n**,**m**,**a**]
⇒ ℵ[**a**,((**R** ⌈ **P**)ᴵ)]
,! 22 (()E: 21) ¡

ℵ[**a**,((**R** ⌈ **P**)ᴵ)] ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] & ℵ[**a**,((**R** ⌈ **P**)ᴵ)] ,! 24 (&I: 12,23) ¡

ω[**n**] & ω[**b**] & ⊗[**n**,**m**,**b**] ,! 25 (&I: 3,10) ¡

ω[**n**] & ω[**b**] & ℵ[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ⊗[**n**,**m**,**b**]
,! 26 (&I: 18,25) ¡

(ω[**n**] & ω[**b**] & ℵ[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ⊗[**n**,**m**,**b**]
⇒ ℵ[**b**,((**R** ⌈ **P**)ᴵ)])
,! 27 (∀E: P2) ¡

ω[**n**] & ω[**b**] & ℵ[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ⊗[**n**,**m**,**b**]
⇒ ℵ[**b**,((**R** ⌈ **P**)ᴵ)]
,! 28 (()E: 27) ¡

ℵ[**b**,((**R** ⌈ **P**)ᴵ)] ,! 29 (⇒E: 26,28) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] & ℵ[**a**,((**R** ⌈ **P**)ᴵ)] & ℵ[**b**,((**R** ⌈ **P**)ᴵ)]
,! 30 (&I: 24,29) ¡

(ω[**a**] & ω[**b**] & 𝔑[**a**,((**R** ⌈ **P**)^I)] & 𝔑[**b**,((**R** ⌈ **P**)^I)]
⇒ **a** = **b**)
,! 31 (∀E: IV2.10) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] & 𝔑[**a**,((**R** ⌈ **P**)^I)] & 𝔑[**b**,((**R** ⌈ **P**)^I)] ⇒ **a** = **b**
,! 32 (()E: 31) ¡

a = **b** ,! 33 (⇒E: 30,32) ¡

(ω[**a**] & ⊗[**n**,**m**,**a**]) & (ω[**b**] & ⊗[**n**,**m**,**b**]) ⇒ **a** = **b**
,! 34 (⇒I: 5,33) ¡

((ω[**a**] & ⊗[**n**,**m**,**a**]) & (ω[**b**] & ⊗[**n**,**m**,**b**]) ⇒ **a** = **b**)
,! 35 (()I: 34) ¡

∀a∀b ((ω[a] & ⊗[**n**,**m**,a]) & (ω[b] & ⊗[**n**,**m**,b]) ⇒ a = b)
,! 36 (∀I: 4,35) ¡

ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∀a∀b ((ω[a] & ⊗[**n**,**m**,a]) & (ω[b] & ⊗[**n**,**m**,b]) ⇒ a = b)
,! 37 (⇒I: 2,36) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∀a∀b ((ω[a] & ⊗[**n**,**m**,a]) & (ω[b] & ⊗[**n**,**m**,b]) ⇒ a = b))
,! 38 (()I: 37) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m]
⇒ ∀a∀b((ω[a] & ⊗[n,m,a]) & (ω[b] & ⊗[n,m,b]) ⇒ a = b))
! 39 (∀I: 1,38) ¡

▯

! **9.** ¡

𝕋 x ; (**n** x **m**) ; ω[**n**] & ω[**m**] ; (ω[**a**] & ⊗[**n**,**m**,**a**])
¡! (𝕋D: P7,P8) ¡

! **10.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ω[(nxm)]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[(**n**x**m**)] & ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)]) ,! 3 (𝕋I: P9,2) ¡

ω[(**n**x**m**)] & ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)] ,! 4 (()I: 3) ¡

ω[(**n**x**m**)] ,! 5 (&E: 4) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n**x**m**)] ,! 6 (⇒I: 2,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n**x**m**)]) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ω[(nxm)]) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **11.** ¡

⊦ (ω[n] & ω[m] ⇒ ⊗[n,m,(nxm)]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[(**n**x**m**)] & ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)]) ,! 3 (𝕋I: P9,2) ¡

ω[(**n**x**m**)] & ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)] ,! 4 (()I: 3) ¡

⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)] ,! 5 (&E: 4) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)] ,! 6 (⇒I: 2,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)]) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ⊗[n,m,(nxm)]) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **12.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k ((n x m) = k ⇒ ω[k]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** x **m**) = **k** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (𝕋E: P9,2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n** x **m**)]) ,! 4 (∀E: P10) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n** x **m**)] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[(**n** x **m**)] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**k**] ,! 7 (=E: 2,6) ¡

(**n** x **m**) = **k** ⇒ ω[**k**] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((**n** x **m**) = **k** ⇒ ω[**k**]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k ((n x m) = k ⇒ ω[k]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **13.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (k = (n x m) ⇒ ω[k]) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

k = (**n** x **m**) ,! 2 (Prem) ¡

k = **k** ,! 3 (=I) ¡

(**n** x **m**) = **k** ,! 4 (=E: 2,3) ¡

((**n** x **m**) = **k** ⇒ ω[**k**]) ,! 5 (∀E: P12) ¡

(**n** x **m**) = **k** ⇒ ω[**k**] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[**k**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

k = (**n** x **m**) ⇒ ω[**k**] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**k** = (**n** x **m**) ⇒ ω[**k**]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k (k = (n x m) ⇒ ω[k]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **14.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊗[n,m,k] ⇒ k = (nxm)) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∀a∀b ((ω[a] & ⊗[**n**,**m**,a]) & (ω[b] & ⊗[**n**,**m**,b]) ⇒ a = b))
,! 5 (∀E: P8) ¡

ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∀a∀b ((ω[a] & ⊗[**n**,**m**,a]) & (ω[b] & ⊗[**n**,**m**,b]) ⇒ a = b)
,! 6 (()E: 5) ¡

∀a∀b ((ω[a] & ⊗[**n**,**m**,a]) & (ω[b] & ⊗[**n**,**m**,b]) ⇒ a = b)
,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**]) ,! 8 (()I: 4) ¡

(ω[(**n**x**m**)] & ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)]) ,! 9 (𝕋I: P9,3) ¡

(ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**]) & (ω[(**n**x**m**)] & ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)])
,! 10 (&I: 8,9) ¡

((ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**]) & (ω[(**n**x**m**)] & ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)]) ⇒ **k** = (**n**x**m**))
,! 11 (∀E: 7;

(**n**xm): P9,3) ¡

(ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**]) & (ω[(**n**xm)] & ⊗[**n**,**m**,(**n**xm)]) ⇒ **k** = (**n**xm)
,! 12 (()E: 12) ¡

k = (**n**xm) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ⇒ **k** = (**n**xm)
,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ⇒ **k** = (**n**xm))
,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊗[n,m,k] ⇒ k = (nxm))
! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **15.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊗[n,m,k] ⇒ (nxm) = k) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ⇒ **k** = (**n**xm))
,! 3 (∀E: P14) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ⇒ **k** = (**n**xm)
,! 4 (()E: 3) ¡

k = (**n**xm) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

k = **k** ,! 6 (=E: 5) ¡

(**n**xm) = **k** ,! 7 (=E: 5,6) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ⇒ (**n**xm) = **k**
,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ⊗[**n**,**m**,**k**] ⇒ (**n**xm) = **k**)
,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ⊗[n,m,k] ⇔ (nxm) = k)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **16.** ¡

⊢ ∀n∀m∀R∀P (ω[n] & ℿ[n,P] & R υ_m P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P
⇒ ℿ[(nxm),(R^{I})]) ¡

n,**m**,**R**,**P**, ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P**
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P** ,! 4 (&E: 2) ¡

R υm **P** ,! 5 (&E: 2) ¡

ω[**m**] & ∀x (**P**[x] ⇒ (#((**R** ⌈ (x•))^{I})) = **m**)
,! 6 (𝕊E: IV11.1,5)
¡

ω[**m**] ,! 7 (&E: 6) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(ω[(**n**x**m**)] & ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)]) ,! 9 (𝕋I: P9,8) ¡

ω[(**n**x**m**)] & ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)] ,! 10 (()E: 9) ¡

ω[**n**] & ω[(**n**x**m**)] & ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)] ,! 11 (&I: 3,10) ¡

ω[**n**] & ω[(**n**x**m**)] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P**
& ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)]
,! 12 (&I: 4,11) ¡

(ω[**n**] & ω[(**n**x**m**)] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P**
& ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)]
⇒ 𝔑[(**n**x**m**),($\mathbf{R}^{I}$)])
,! 13 (∀E: P4;
(**n**x**m**): P9,8) ¡

ω[**n**] & ω[(**n**x**m**)] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P**
& ⊗[**n**,**m**,(**n**x**m**)]
⇒ 𝔑[(**n**x**m**),($\mathbf{R}^{I}$)]
,! 14 (()E: 13) ¡

𝔑[(**n**x**m**),($\mathbf{R}^{I}$)] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P** ⇒ 𝔑[(**n**x**m**),($\mathbf{R}^{I}$)]
,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P** ⇒ 𝔑[(**n**x**m**),($\mathbf{R}^{I}$)])
,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m∀R∀P (ω[n] & 𝔑[n,P] & R υm P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P
⇒ 𝔑[(nxm),(R^{I})])
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **17.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k∀R∀P (ω[n] & ω[k] & 𝔑[n,P] & R υ_m P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P
& 𝔑[k,(R^{I})]
⇒ k = (nxm)) ¡

n,**m**,**k**,**R**,**P** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υ_m **P** & **1** **R** & (**R^{D}**) ⊆ **P** & 𝔑[**k**,(**R^{I}**)]
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

𝔑[**n**,**P**] & **R** υ_m **P** & **1** **R** & (**R^{D}**) ⊆ **P** ,! 5 (&E: 2) ¡

𝔑[**k**,(**R^{I}**)] ,! 6 (&E: 2) ¡

ω[**k**] & 𝔑[**k**,(**R^{I}**)] ,! 7 (&I: 4,6) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υ_m **P** & **1** **R** & (**R^{D}**) ⊆ **P**
,! 8 (&I: 3,5) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υ_m **P** & **1** **R** & (**R^{D}**) ⊆ **P**
⇒ 𝔑[(**n**x**m**),(**R^{I}**)])
,! 9 (∀E: P16) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υ_m **P** & **1** **R** & (**R^{D}**) ⊆ **P** ⇒ 𝔑[(**n**x**m**),(**R^{I}**)]
,! 10 (()E: 9) ¡

𝔑[(**n**x**m**),(**R^{I}**)] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[**k**] & 𝔑[**k**,(**R^{I}**)] & 𝔑[(**n**x**m**),(**R^{I}**)] ,! 12 (&I: 7,11) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 13 (𝕋E: P9,11) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n**x**m**)]) ,! 14 (∀E: P10) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n**x**m**)] ,! 15 (()E: 14) ¡

ω[(**n**x**m**)] ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

ω[**k**] & ω[(**n**x**m**)] & 𝔑[**k**,(**R^{I}**)] & 𝔑[(**n**x**m**),(**R^{I}**)]
,! 17 (&I: 12,16) ¡

(ω[**k**] & ω[(**n**x**m**)] & 𝔑[**k**,(**R^{I}**)] & 𝔑[(**n**x**m**),(**R^{I}**)] ⇒ **k** = (**n**x**m**))
,! 18 (∀E: IV2.10) ¡

ω[**k**] & ω[(**n**x**m**)] & 𝔑[**k**,(**R^{I}**)] & 𝔑[(**n**x**m**),(**R^{I}**)] ⇒ **k** = (**n**x**m**)
,! 19 (()E: 18) ¡

k = (nxm) ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P & ℿ[k,(R^I)]
⇒ k = (nxm)
,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P & ℿ[k,(R^I)]
⇒ k = (nxm))
,! 22 (()I: 21) ¡

∀n∀m∀k∀R∀P (ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P
& ℿ[k,(R^I)]
⇒ k = (nxm))
! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! **18.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀R∀P (ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P
& ℿ[k,(R^I)]
⇒ (nxm) = k) ¡

n,m,k,R,P ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P & ℿ[k,(R^I)]
,! 2 (Prem) ¡

(ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P
& ℿ[k,(R^I)]
⇒ k = (nxm)) ,! 3 (∀E: P17) ¡

ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P & ℿ[k,(R^I)]
⇒ k = (nxm) ,! 4 (()E: 3) ¡

k = (nxm) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

k = k ,! 6 (=I) ¡

(nxm) = k ,! 7 (⇒E: 5,6) ¡

ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P & ℿ[k,(R^I)]
⇒ (nxm) = k
,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P & ℿ[k,(R^I)]
⇒ (nxm) = k)
,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k∀R∀P (ω[n] & ω[k] & ℿ[n,P] & R υm P & 1 R & (R^D) ⊆ P

& 𝔑[k,(R^{I})]
⇒ (nxm) = k)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **19.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m]
⇒ ∃P∃R (𝔑[n,P] & R υm P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P &
𝔑[(nxm),(R^{I})])) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃P∃R (𝔑[**n**,P] & R υm P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P))
,! 4 (∀E: IV11.18)
¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃P∃R (𝔑[**n**,P] & R υm P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P)
,! 5 (()E: 4) ¡

∃P∃R (𝔑[**n**,P] & R υm P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P)
,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

∃R (𝔑[**n**,**P**] & R υm **P** & **1** R & (R^{D}) ⊆ **P**)
,! 7 (∃E: 6) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P**) ,! 8 (∃E: 7) ¡

𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P** ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P**
,! 10 (&I: 3,9) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P**
⇒ 𝔑[(**n**xm),($\mathbf{R}^{I}$)])
,! 11 (∀E: P16;
(**n**xm): P9,2) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P** ⇒ 𝔑[(**n**xm),($\mathbf{R}^{I}$)]
,! 12 (()E: 11) ¡

𝔑[(**n**xm),($\mathbf{R}^{I}$)] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

𝔑[**n**,**P**] & **R** υm **P** & **1** **R** & ($\mathbf{R}^{D}$) ⊆ **P** & 𝔑[(**n**xm),($\mathbf{R}^{I}$)]
,! 14 (&I: 9,13) ¡

(ℿ[**n**,**P**] & **R** υ$_{\mathbf{m}}$ **P** & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ **P** & ℿ[(**n**x**m**),(**R**^{I})])
,! 15 (()I: 14) ¡

∃P (ℿ[**n**,P] & **R** υ$_{\mathbf{m}}$ P & **1** **R** & (**R**^{D}) ⊆ P & ℿ[(**n**x**m**),(**R**^{I})])
,! 16 (∃I: 15) ¡

∃R∃P (ℿ[**n**,P] & R υ$_{\mathbf{m}}$ P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P & ℿ[(**n**x**m**),(R^{I})])
,! 17 (∃I: 16) ¡

ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃R∃P (ℿ[**n**,P] & R υ$_{\mathbf{m}}$ P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P & ℿ[(**n**x**m**),(R^{I})])
,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃R∃P (ℿ[**n**,P] & R υ$_{\mathbf{m}}$ P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P
& ℿ[(**n**x**m**),(R^{I})]))
,! 19 (()I: 18) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m]
⇒ ∃P∃R (ℿ[n,P] & R υ$_{m}$ P & **1** R & (R^{D}) ⊆ P
& ℿ[(nxm),(R^{I})]))
! 20 (∀I: 1,19) ¡

□