CHAPTER 4

NUMBERS AND CORRESPONDENCES

This chapter establishes certain problems about correspondences and numbers. It begins with P1, which is Hume's Principle for Finite Predicates. Propositions P2 through P16 and P18 rely on P1, but P17 does not, it being proven by appealing to Induction.

1. Finite Hume's Principle.

$\vdash \forall n \forall P \forall Q \; (\omega[n] \; \& \; \mathbb{N}[n,P] \Rightarrow (P \sim Q \Leftrightarrow \mathbb{N}[n,Q]))$

First, we prove

$\forall n \; (\omega[n] \Rightarrow \forall P \forall Q \; (\mathbb{N}[n,P] \Rightarrow (P \sim Q \Leftrightarrow \mathbb{N}[n,Q])))$

by induction, taking ϕ to be

$\forall P \forall Q \; (\mathbb{N}[n,P] \Rightarrow (P \sim Q \Leftrightarrow \mathbb{N}[n,Q]))$

Since

$\forall P \forall Q \; (\mathbb{N}[0,P] \Rightarrow (P \sim Q \Leftrightarrow \mathbb{N}[0,Q]))$

has already been proven as C3.15, it therefore remains to show that

$\forall n \forall m \; (\omega[n] \; \& \; \sigma[n,m] \; \& \; \forall P \forall Q \; (\mathbb{N}[n,P] \Rightarrow (P \sim Q \Leftrightarrow \mathbb{N}[n,Q])) \Rightarrow \forall P \forall Q \; (\mathbb{N}[m,P] \Rightarrow (P \sim Q \Leftrightarrow \mathbb{N}[m,Q]))).$

n,m	,! 1 (Prem)
$\omega[\mathbf{n}] \; \& \; \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}] \; \& \; \forall P \forall Q \; (\mathbb{N}[\mathbf{n},P] \Rightarrow (P \sim Q \Leftrightarrow \mathbb{N}[\mathbf{n},Q]))$	,! 2 (Prem)
$\omega[\mathbf{n}]$	,! 3 (&E: 2)
$\omega[\mathbf{n}] \; \& \; \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]$	,! 4 (&E: 2)
$\forall P \forall Q \; (\mathbb{N}[\mathbf{n},P] \Rightarrow (P \sim Q \Leftrightarrow \mathbb{N}[\mathbf{n},Q]))$	,! 5 (&E: 2)
$(\mathbf{m} = 0 \vee \neg \mathbf{m} = 0)$	,! 6 (∀E I3.4)
$\mathbf{m} = 0 \vee \neg \mathbf{m} = 0$	,! 7 (()E: 6)
$\mathbf{m} = 0$	,! 8 (Prem)
$\forall P \forall Q \; (\mathbb{N}[\mathbf{m},P] \Rightarrow (P \sim Q \Leftrightarrow \mathbb{N}[\mathbf{m},Q]))$	,! 9 (=E: C3.15,8)
$\mathbf{m} = 0 \Rightarrow \forall P \forall Q \; (\mathbb{N}[\mathbf{m},P] \Rightarrow (P \sim Q \Leftrightarrow \mathbb{N}[\mathbf{m},Q]))$	,! 10 (⇒I: 8,9)
$\neg \mathbf{m} = 0$	,! 11 (Prem)
P,Q	,! 12 (Prem)
$\mathbb{N}[\mathbf{m},\mathbf{P}]$	,! 13 (Prem)
$\omega[\mathbf{n}] \; \& \; \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}] \; \& \; \mathbb{N}[\mathbf{m},\mathbf{P}]$	,! 14 (&I: 4,13)

```
ℕ[m,P] & ¬ m = 0                          ,! 15 (=E: 11,13)   ¡

( ℕ[m,P] & ¬ m = 0 ⇒ ∃x P[x] )            ,! 16 (∀E: C3.17)   ¡

ℕ[m,P] & ¬ m = 0 ⇒ ∃x P[x]                ,! 17 (()E: 16)     ¡

∃x P[x]                                   ,! 18 (⇒E: 15,17)   ¡

P[a]                                      ,! 19 (∃E: 18)      ¡

ω[n] & σ[n,m] & P[a] & ℕ[m,P]             ,! 20 (&I: 14,19)   ¡

( ω[n] & σ[n,m] & P[a] & ℕ[m,P] ⇒ ℕ[n,(P \ (a•))] )
                                          ,! 21 (∀E: C2.11)   ¡

ω[n] & σ[n,m] & P[a] & ℕ[m,P] ⇒ ℕ[n,(P \ (a•))]
                                          ,! 22 (()E: 21)     ¡

ℕ[n,(P \ (a•))]                           ,! 23 (⇒E: 20,22)   ¡

  P ~ Q                                   ,! 24 (Prem)        ¡

  P ~ Q & P[a]                            ,! 25 (&I: 19,24)   ¡

  ( P ~ Q & P[a]
    ⇒ ∃b ( Q[b] & (P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) ) )
                                          ,! 26 (∀E: III13.33)
                                                              ¡

  P ~ Q & P[a]
  ⇒ ∃b ( Q[b] & (P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) )
                                          ,! 27 (()E: 26)     ¡

  ∃b ( Q[b] & (P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) )
                                          ,! 28 (⇒E: 25,27)   ¡

  ( Q[b] & (P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) )
                                          ,! 29 (∃E: 28)      ¡

  Q[b] & (P \ (a•)) ~ (Q \ (b•))
                                          ,! 30 (()E: 29)     ¡

  Q[b]                                    ,! 31 (&E: 30)      ¡

  (P \ (a•)) ~ (Q \ (b•))                 ,! 32 (&E: 30)      ¡

! Appealing to the induction hypothesis...                     ¡

  ( ℕ[n,(P \ (a•))]
    ⇒ ((P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) ⇔ ℕ[n,(Q \ (b•))]) )
                                          ,! 33 (∀E: 5)       ¡

  ℕ[n,(P \ (a•))]
  ⇒ ((P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) ⇔ ℕ[n,(Q \ (b•))])
                                          ,! 34 (()E: 33)     ¡
```

((**P** \ (**a**•)) ~ (**Q** \ (**b**•)) ⇔ ℕ[**n**,(**Q** \ (**b**•))])
,! 35 (⇒E: 23,34) ¡

(**P** \ (**a**•)) ~ (**Q** \ (**b**•)) ⇔ ℕ[**n**,(**Q** \ (**b**•))]
,! 36 ()E: 35) ¡

(**P** \ (**a**•)) ~ (**Q** \ (**b**•)) ⇒ ℕ[**n**,(**Q** \ (**b**•))]
,! 37 (⇔E: 36) ¡

ℕ[**n**,(**Q** \ (**b**•))] ,! 38 (⇒E: 32,37) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℕ[**n**,(**Q** \ (**b**•))]
,! 39 (&I: 4,38) ¡

¬ (**Q** \ (**b**•))[**b**] ,! 40 (∀E: II8.47) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (**Q** \ (**b**•))[**b**] & ℕ[**n**,(**Q** \ (**b**•))]
,! 41 (&I: 39,40) ¡

(**Q**[**b**] ⇒ **Q** ≡ ((**Q** \ (**b**•)) ∪ (**b**•)))
,! 42 (∀E: II8.57) ¡

Q[**b**] ⇒ **Q** ≡ ((**Q** \ (**b**•)) ∪ (**b**•))
,! 43 ()E: 42) ¡

Q ≡ ((**Q** \ (**b**•)) ∪ (**b**•)) ,! 44 (⇒E: 31,43) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (**Q** \ (**b**•))[**b**]
& **Q** ≡ ((**Q** \ (**b**•)) ∪ (**b**•)) & ℕ[**n**,(**Q** \ (**b**•))]
,! 45 (&I: 41,44) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (**Q** \ (**b**•))[**b**]
& **Q** ≡ ((**Q** \ (**b**•)) ∪ (**b**•)) & ℕ[**n**,(**Q** \ (**b**•))]
⇒ ℕ[**m**,**Q**])
,! 46 (∀E: C2.7) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (**Q** \ (**b**•))[**b**]
& **Q** ≡ ((**Q** \ (**b**•)) ∪ (**b**•)) & ℕ[**n**,(**Q** \ (**b**•))]
⇒ ℕ[**m**,**Q**]
,! 47 ()E: 46) ¡

ℕ[**m**,**Q**] ,! 48 (⇒E: 45,47) ¡

P ~ **Q** ⇒ ℕ[**m**,**Q**] ,! 49 (⇒I: 24,48) ¡

ℕ[**m**,**Q**] ,! 50 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℕ[**m**,**Q**] ,! 51 (&I: 4,50) ¡

ℕ[**m**,**Q**] & ¬ **m** = 0 ,! 52 (&I: 11,50) ¡

(ℕ[**m**,**Q**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ∃x **Q**[x])

```
                                        ,! 53 (∀E: C3.17)   ¡

ℕ[m,Q] & ¬ m = 0 ⇒ ∃x Q[x]              ,! 54 (()E: 53)     ¡

∃x Q[x]                                 ,! 55 (⇒E: 52,54)   ¡

Q[b]                                    ,! 56 (∃E: 55)      ¡

ω[n] & σ[n,m] & Q[b] & ℕ[m,Q]           ,! 57 (&I: 51,56)   ¡

( ω[n] & σ[n,m] & Q[b] & ℕ[m,Q]
  ⇒ ℕ[n,(Q \ (b•))] )
                                        ,! 58 (∀E: C2.11)   ¡

ω[n] & σ[n,m] & Q[b] & ℕ[m,Q] ⇒ ℕ[n,(Q \ (b•))]
                                        ,! 59 (()E: 58)     ¡

ℕ[n,(Q \ (b•))]                         ,! 60 (⇒E: 57,59)   ¡

! Applying the induction hypothesis...                       ¡

( ℕ[n,(P \ (a•))]
  ⇒ ((P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) ⇔ ℕ[n,(Q \ (b•))]) )
                                        ,! 61 (∀E: 5)       ¡

ℕ[n,(P \ (a•))]
⇒ ((P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) ⇔ ℕ[n,(Q \ (b•))])
                                        ,! 62 (()E: 61)     ¡

((P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) ⇔ ℕ[n,(Q \ (b•))])
                                        ,! 63 (⇒E: 23,62)   ¡

(P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) ⇔ ℕ[n,(Q \ (b•))]
                                        ,! 64 (()E: 63)     ¡

ℕ[n,(Q \ (b•))] ⇒ (P \ (a•)) ~ (Q \ (b•))
                                        ,! 65 (⇔E: 64)      ¡

(P \ (a•)) ~ (Q \ (b•))                 ,! 66 (⇒E: 60,65)   ¡

(P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) & P[a]
                                        ,! 67 (&I: 19,66)   ¡

(P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) & P[a] & Q[b]
                                        ,! 68 (&I: 56,67)   ¡

( (P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) & P[a] & Q[b] ⇒ P ~ Q )
                                        ,! 69 (∀E: III13.31)
                                                            ¡

(P \ (a•)) ~ (Q \ (b•)) & P[a] & Q[b] ⇒ P ~ Q
                                        ,! 70 (()E: 69)     ¡
```

```
          P ~ Q                                  ,! 71 (⇒E: 68,70)  ¡

        ℕ[m,Q] ⇒ P ~ Q                           ,! 72 (⇒I: 50,71)  ¡

        P ~ Q ⇔ ℕ[m,Q]                           ,! 73 (⇔I: 49,72)  ¡

        (P ~ Q ⇔ ℕ[m,Q])                         ,! 74 (()I: 73)    ¡

      ℕ[m,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[m,Q])                  ,! 75 (⇒I: 13,74)  ¡

      ( ℕ[m,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[m,Q]) )              ,! 76 (()I: 75)    ¡

    ∀P∀Q ( ℕ[m,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[m,Q]) )
                                                 ,! 77 (∀I: 12,76)  ¡

  ¬ m = 0 ⇒ ∀P∀Q ( ℕ[m,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[m,Q]) )
                                                 ,! 78 (⇒I: 11,77)  ¡

  ∀P∀Q ( ℕ[m,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[m,Q]) )
                                                 ,! 79 (∨E: 7,10,78) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ∀P∀Q ( ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q]) )
⇒ ∀P∀Q ( ℕ[m,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[m,Q]) )
                                                 ,! 80 (⇒I: 2,79)   ¡

( ω[n] & σ[n,m] & ∀P∀Q ( ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q]) )
  ⇒ ∀P∀Q ( ℕ[m,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[m,Q]) ) )
                                                 ,! 81 (()I: 80)    ¡

∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m] & ∀P∀Q ( ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q]) )
       ⇒ ∀P∀Q ( ℕ[m,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[m,Q]) ) )
                                                 ,! 82 (∀I: 1,81)   ¡

∀n ( ω[n] ⇒ ∀P∀Q ( ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q]) ) )
                                                  ! 83 (Induct: C3.15,
                                                                82)  ¡

  n,P,Q                                          ,! 84 (Prem)       ¡

    ω[n] & ℕ[n,P]                                ,! 85 (Prem)       ¡

    ω[n]                                         ,! 86 (&E: 85)     ¡

    ℕ[n,P]                                       ,! 87 (&E: 85)     ¡

    ( ω[n] ⇒ ∀P∀Q ( ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q]) ) )
                                                 ,! 88 (∀E: 83)     ¡

    ω[n] ⇒ ∀P∀Q ( ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q]) )
                                                 ,! 89 (()E: 88)    ¡

    ∀P∀Q ( ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q]) ) ,! 90 (⇒E: 86,89)  ¡
```

```
    ( ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q]) )      ,! 91 (∀E: 90)      ¡

    ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q])          ,! 92 (()E: 91)     ¡

    (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q])                   ,! 93 (⇒E: 87,92)   ¡

  ω[n] & ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q])     ,! 94 (⇒I: 85,93)   ¡

  ( ω[n] & ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q]) ) ,! 95 (()I: 94)     ¡

∀n∀P∀Q ( ω[n] & ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q]) )
                                       ! 96 (∀I: 1,95)    ¡

□

! P2 and P3 assert one half of Finite Hume's Principle, P4 the
other half.                                                  ¡

! 2.                                                        ¡

⊢ ∀n∀P∀Q ( ω[n] & ℕ[n,P] & P ~ Q ⇒ ℕ[n,Q] )                 ¡

  n,P,Q                                ,! 1 (Prem)         ¡

    ω[n] & ℕ[n,P] & P ~ Q               ,! 2 (Prem)         ¡

    ω[n] & ℕ[n,P]                       ,! 3 (&E: 2)        ¡

    P ~ Q                               ,! 4 (&E: 2)        ¡

    ( ω[n] & ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q]) )
                                        ,! 5 (∀E: P1)       ¡

    ω[n] & ℕ[n,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q])    ,! 6 (()E: 5)       ¡

    (P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q])                    ,! 7 (⇒E: 3,6)      ¡

    P ~ Q ⇔ ℕ[n,Q]                      ,! 8 (()E: 7)       ¡

    P ~ Q ⇒ ℕ[n,Q]                      ,! 9 (⇔E: 8)        ¡

    ℕ[n,Q]                              ,! 10 (⇒E: 4,9)     ¡

  ω[n] & ℕ[n,P] & P ~ Q ⇒ ℕ[n,Q]        ,! 11 (⇒I: 2,10)    ¡

  ( ω[n] & ℕ[n,P] & P ~ Q ⇒ ℕ[n,Q] )    ,! 12 (()I: 11)     ¡

∀n∀P∀Q ( ω[n] & ℕ[n,P] & P ~ Q ⇒ ℕ[n,Q] )
                                       ! 13 (∀I: 1,12)     ¡

□

! 3.                                                        ¡

⊢ ∀n∀P∀Q ( ω[n] & ℕ[n,P] & Q ~ P ⇒ ℕ[n,Q] )                 ¡
```

n,**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & **Q** ~ **P** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] ,! 3 (&E: 2) ¡

Q ~ **P** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**Q** ~ **P** ⇒ **P** ~ **Q**) ,! 5 (∀E: III13.4) ¡

Q ~ **P** ⇒ **P** ~ **Q** ,! 6 (()E: 5) ¡

P ~ **Q** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & **P** ~ **Q** ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & **P** ~ **Q** ⇒ ℕ[**n**,**Q**]) ,! 9 (∀E: P2) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & **Q** ~ **P** ⇒ ℕ[**n**,**Q**] ,! 10 (()E: 9) ¡

ℕ[**n**,**Q**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & **Q** ~ **P** ⇒ ℕ[**n**,**Q**] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & **Q** ~ **P** ⇒ ℕ[**n**,**Q**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀P∀Q (ω[n] & ℕ[n,P] & Q ~ P ⇒ ℕ[n,Q])
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **4.** ¡

⊢ ∀n∀P∀Q (ω[n] & ℕ[n,P] & ℕ[n,Q] ⇒ P ~ Q) ¡

n,**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**n**,**Q**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ℕ[**n**,**Q**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] ⇒ (**P** ~ **Q** ⇔ ℕ[**n**,**Q**]))
,! 5 (∀E: P1) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] ⇒ (**P** ~ **Q** ⇔ ℕ[**n**,**Q**]) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ~ **Q** ⇔ ℕ[**n**,**Q**]) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

P ~ **Q** ⇔ ℕ[**n**,**Q**] ,! 8 (()E: 7) ¡

ℕ[**n**,**Q**] ⇒ **P** ~ **Q** ,! 9 (⇔E: 8) ¡

P ~ **Q** ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

```
  ω[n] & ℕ[n,P] & ℕ[n,Q] ⇒ P ~ Q          ,! 11 (⇒I: 2,10)   ¡

  ( ω[n] & ℕ[n,P] & ℕ[n,Q] ⇒ P ~ Q )       ,! 12 (()I: 11)    ¡

∀n∀P∀Q ( ω[n] & ℕ[n,P] & ℕ[n,Q] ⇒ P ~ Q )
                                           ! 13 (∀I: 1,12)    ¡

□

! Finite Hume's Principle is used to prove P5 and P6, which
assert that equivalent predicates share the same number.  Recall
that C2.13 proves this in full generality, but not relying on the
number axioms.                                                  ¡

! 5.                                                           ¡

⊢ ∀n∀P∀Q ( ω[n] & ℕ[n,P] & P ≡ Q ⇒ ℕ[n,Q] )                    ¡

  n,P,Q                                    ,! 1 (Prem)        ¡

    ω[n] & ℕ[n,P] & P ≡ Q                  ,! 2 (Prem)        ¡

    ω[n] & ℕ[n,P]                          ,! 3 (&E: 2)       ¡

    P ≡ Q                                  ,! 4 (&E: 2)       ¡

    ( P ≡ Q ⇒ P ~ Q )                      ,! 5 (∀E: III13.2) ¡

    P ≡ Q ⇒ P ~ Q                          ,! 6 (()E: 5)      ¡

    P ~ Q                                  ,! 7 (⇒E: 4,6)     ¡

    ω[n] & ℕ[n,P] & P ~ Q                  ,! 8 (&I: 3,7)     ¡

    ( ω[n] & ℕ[n,P] & P ~ Q ⇒ ℕ[n,Q] )      ,! 9 (∀E: P2)      ¡

    ω[n] & ℕ[n,P] & P ~ Q ⇒ ℕ[n,Q]          ,! 10 (()E: 9)     ¡

    ℕ[n,Q]                                 ,! 11 (⇒E: 8,10)   ¡

  ω[n] & ℕ[n,P] & P ≡ Q ⇒ ℕ[n,Q]           ,! 12 (⇒I: 2,11)   ¡

  ( ω[n] & ℕ[n,P] & P ≡ Q ⇒ ℕ[n,Q] )       ,! 13 (()I: 12)    ¡

∀n∀P∀Q ( ω[n] & ℕ[n,P] & P ≡ Q ⇒ ℕ[n,Q] )
                                           ! 14 (∀I: 1,13)    ¡

□

! 6.                                                           ¡

⊢ ∀n∀P∀Q ( ω[n] & ℕ[n,P] & Q ≡ P ⇒ ℕ[n,Q] )                    ¡

  n,P,Q                                    ,! 1 (Prem)        ¡
```

```
    ω[n] & ℕ[n,P] & Q ≡ P                    ,! 2 (Prem)          ¡
    ω[n] & ℕ[n,P]                            ,! 3 (&E: 2)         ¡
    Q ≡ P                                    ,! 4 (&E: 2)         ¡
    ( Q ≡ P ⇒ P ≡ Q )                        ,! 5 (∀E: II1.10)    ¡
    Q ≡ P ⇒ P ≡ Q                            ,! 6 (()E: 5)        ¡
    P ≡ Q                                    ,! 7 (⇒E: 4,6)       ¡
    ω[n] & ℕ[n,P] & P ≡ Q                    ,! 8 (&I: 3,7)       ¡
    ( ω[n] & ℕ[n,P] & P ≡ Q ⇒ ℕ[n,Q] )       ,! 9 (∀E: P5)        ¡
    ω[n] & ℕ[n,P] & P ≡ Q ⇒ ℕ[n,Q]           ,! 10 (()E: 9)       ¡
    ℕ[n,Q]                                   ,! 11 (⇒E: 8,10)     ¡
  ω[n] & ℕ[n,P] & Q ≡ P ⇒ ℕ[n,Q]             ,! 12 (⇒I: 2,11)     ¡
  ( ω[n] & ℕ[n,P] & Q ≡ P ⇒ ℕ[n,Q] )         ,! 13 (()I: 12)      ¡
∀n∀P∀Q ( ω[n] & ℕ[n,P] & Q ≡ P ⇒ ℕ[n,Q] )
                                             ! 14 (∀I: 1,13)      ¡
□
```

! **7.** P7 makes an assertion about the uniqueness of numbering. It therefore relies on P4 and P5 (by appealing to C2.10). ¡

```
⊢ ∀n∀m∀P∀Q ( ω[n] & ω[m] & ℕ[n,P] & ℕ[m,Q] & P ~ Q ⇒ n = m )
                                                                 ¡
  n,m,P,Q                                    ,! 1 (Prem)          ¡
    ω[n] & ω[m] & ℕ[n,P] & ℕ[m,Q] & P ~ Q
                                             ,! 2 (Prem)          ¡
    ω[n]                                     ,! 3 (&E: 2)         ¡
    ℕ[n,P]                                   ,! 4 (&E: 2)         ¡
    P ~ Q                                    ,! 5 (&E: 2)         ¡
    ω[n] & ℕ[n,P]                            ,! 6 (&I: 3,4)       ¡
    ω[n] & ℕ[n,P] & P ~ Q                    ,! 7 (&I: 5,6)       ¡
    ( ω[n] & ℕ[n,P] & P ~ Q ⇒ ℕ[n,Q] )       ,! 8 (∀E: P2)        ¡
    ω[n] & ℕ[n,P] & P ~ Q ⇒ ℕ[n,Q]           ,! 9 (()E: 8)        ¡
    ℕ[n,Q]                                   ,! 10 (⇒E: 7,9)      ¡
```

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 11 (&E: 2) ¡

ℕ[**m**,**Q**] ,! 12 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**Q**] ,! 13 (&I: 10,11) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**Q**] & ℕ[**m**,**Q**] ,! 14 (&E: 12,13) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**Q**] & ℕ[**m**,**Q**] ⇒ **n** = **m**)
,! 15 (∀E: C2.10) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**Q**] & ℕ[**m**,**Q**] ⇒ **n** = **m**
,! 16 (()E: 15) ¡

n = **m** ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**m**,**Q**] & **P** ~ **Q** ⇒ **n** = **m**
,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**m**,**Q**] & **P** ~ **Q** ⇒ **n** = **m**)
,! 19 (()I: 18) ¡

∀n∀m∀P∀Q (ω[n] & ω[m] & ℕ[n,P] & ℕ[m,Q] & P ~ Q ⇒ n = m)
! 20 (∀I: 1,19) ¡

□

! P8 through P11 assert that equivalent relationships have domains and images which share the same number. ¡

! **8.** ¡

⊢ ∀n∀R∀S (ω[n] & ℕ[n,(R^D)] & R ≣ S ⇒ ℕ[n,(S^D)]) ¡

n,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{D})] & **R** ≣ **S** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{D})] ,! 3 (&E: 2) ¡

R ≣ **S** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**R** ≣ **S** ⇒ (**R**^{D}) ≡ (**S**^{D})) ,! 5 (∀E: III5.15) ¡

R ≣ **S** ⇒ (**R**^{D}) ≡ (**S**^{D}) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**R**^{D}) ≡ (**S**^{D}) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{D})] & (**R**^{D}) ≡ (**S**^{D}) ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{D})] & (**R**^{D}) ≡ (**S**^{D}) ⇒ ℕ[**n**,(**S**^{D})])
,! 9 (∀E: P5) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{D})] & (**R**^{D}) ≡ (**S**^{D}) ⇒ ℕ[**n**,(**S**^{D})]
,! 10 (()E: 9) ¡

$\mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{S}^D)]$,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

$\omega[\mathbf{n}]$ & $\mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R}^D)]$ & $\mathbf{R} \equiv \mathbf{S} \Rightarrow \mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{S}^D)]$,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

($\omega[\mathbf{n}]$ & $\mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R}^D)]$ & $\mathbf{R} \equiv \mathbf{S} \Rightarrow \mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{S}^D)]$)
,! 13 (()I: 12) ¡

$\forall n \forall R \forall S$ ($\omega[n]$ & $\mathbb{N}[n,(R^D)]$ & $R \equiv S \Rightarrow \mathbb{N}[n,(S^D)]$)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **9.** ¡

⊢ $\forall n \forall R \forall S$ ($\omega[n]$ & $\mathbb{N}[n,(R^D)]$ & $S \equiv R \Rightarrow \mathbb{N}[n,(S^D)]$) ¡

$\mathbf{n},\mathbf{R},\mathbf{S}$,! 1 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{n}]$ & $\mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R}^D)]$ & $\mathbf{S} \equiv \mathbf{R}$,! 2 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{n}]$ & $\mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R}^D)]$,! 3 (&E: 2) ¡

$\mathbf{S} \equiv \mathbf{R}$,! 4 (&E: 2) ¡

($\mathbf{S} \equiv \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \mathbf{S}$) ,! 5 (∀E: III1.8) ¡

$\mathbf{S} \equiv \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \mathbf{S}$,! 6 (()E: 5) ¡

$\mathbf{R} \equiv \mathbf{S}$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$\omega[\mathbf{n}]$ & $\mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R}^D)]$ & $\mathbf{R} \equiv \mathbf{S}$,! 8 (&I: 3,7) ¡

($\omega[\mathbf{n}]$ & $\mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R}^D)]$ & $\mathbf{R} \equiv \mathbf{S} \Rightarrow \mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{S}^D)]$)
,! 9 (∀E: P8) ¡

$\omega[\mathbf{n}]$ & $\mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R}^D)]$ & $\mathbf{R} \equiv \mathbf{S} \Rightarrow \mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{S}^D)]$
,! 10 (()E: 9) ¡

$\mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{S}^D)]$,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

$\omega[\mathbf{n}]$ & $\mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R}^D)]$ & $\mathbf{S} \equiv \mathbf{R} \Rightarrow \mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{S}^D)]$,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

($\omega[\mathbf{n}]$ & $\mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R}^D)]$ & $\mathbf{S} \equiv \mathbf{R} \Rightarrow \mathbb{N}[\mathbf{n},(\mathbf{S}^D)]$)
,! 13 (()I: 12) ¡

$\forall n \forall R \forall S$ ($\omega[n]$ & $\mathbb{N}[n,(R^D)]$ & $S \equiv R \Rightarrow \mathbb{N}[n,(S^D)]$)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **10.** ¡

⊢ $\forall n \forall R \forall S$ ($\omega[n]$ & $\mathbb{N}[n,(R^I)]$ & $R \equiv S \Rightarrow \mathbb{N}[n,(S^I)]$) ¡

n,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] & **R** ≣ **S** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] ,! 3 (&E: 2) ¡

R ≣ **S** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**R** ≣ **S** ⇒ (**R**^{I}) ≡ (**S**^{I})) ,! 5 (∀E: III6.22) ¡

R ≣ **S** ⇒ (**R**^{I}) ≡ (**S**^{I}) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**R**^{I}) ≡ (**S**^{I}) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] & (**R**^{I}) ≡ (**S**^{I}) ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] & (**R**^{I}) ≡ (**S**^{I}) ⇒ ℕ[**n**,(**S**^{I})])
,! 9 (∀E: P5) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] & (**R**^{I}) ≡ (**S**^{I}) ⇒ ℕ[**n**,(**S**^{I})]
,! 10 (()E: 9) ¡

ℕ[**n**,(**S**^{I})] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] & **R** ≣ **S** ⇒ ℕ[**n**,(**S**^{I})] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] & **R** ≣ **S** ⇒ ℕ[**n**,(**S**^{I})])
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀R∀S (ω[n] & ℕ[n,(R^{I})] & R ≣ S ⇒ ℕ[n,(S^{I})])
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **11.** ¡

⊢ ∀n∀R∀S (ω[n] & ℕ[n,(R^{I})] & S ≣ R ⇒ ℕ[n,(S^{I})]) ¡

n,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] & **S** ≣ **R** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] ,! 3 (&E: 2) ¡

S ≣ **R** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**S** ≣ **R** ⇒ **R** ≣ **S**) ,! 5 (∀E: III1.8) ¡

S ≣ **R** ⇒ **R** ≣ **S** ,! 6 (()E: 5) ¡

R ≣ **S** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] & **R** ≣ **S** ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] & **R** ≡ **S** ⇒ ℕ[**n**,(**S**^{I})])
,! 9 (∀E: P10) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] & **R** ≡ **S** ⇒ ℕ[**n**,(**S**^{I})]
,! 10 (()E: 9) ¡

ℕ[**n**,(**S**^{I})] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] & **S** ≡ **R** ⇒ ℕ[**n**,(**S**^{I})] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,(**R**^{I})] & **S** ≡ **R** ⇒ ℕ[**n**,(**S**^{I})])
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀R∀S (ω[n] & ℕ[n,(R^{I})] & S ≡ R ⇒ ℕ[n,(S^{I})])
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! P12 and P13 are lemmas, for help in reformulating the axiom concerning multiplication. ¡

! **12.** ¡

⊢ ∀n∀P∀R (ω[n] & ℕ[n,((R ⌈ P)^{I})]
⇒ ℕ[n,{y : ∃z(R[z,y] & P[z])}]) ¡

n,**P**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,((**R** ⌈ **P**)^{I})] ,! 2 (Prem) ¡

{y : ∃z(**R**[z,y] & **P**[z])} ≡ ((**R** ⌈ **P**)^{I}) ,! 3 (∀E: III7.47) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,((**R** ⌈ **P**)^{I})]
& {y : ∃z(**R**[z,y] & **P**[z])} ≡ ((**R** ⌈ **P**)^{I})
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,((**R** ⌈ **P**)^{I})]
& {y : ∃z(**R**[z,y] & **P**[z])} ≡ ((**R** ⌈ **P**)^{I})
⇒ ℕ[**n**,{y : ∃z(**R**[z,y] & **P**[z])}])
,! 5 (∀E: P6) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,((**R** ⌈ **P**)^{I})]
& {y : ∃z(**R**[z,y] & **P**[z])} ≡ ((**R** ⌈ **P**)^{I})
⇒ ℕ[**n**,{y : ∃z(**R**[z,y] & **P**[z])}]
,! 6 (()E: 5) ¡

ℕ[**n**,{y : ∃z(**R**[z,y] & **P**[z])}] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,((**R** ⌈ **P**)^{I})] ⇒ ℕ[**n**,{y : ∃z(**R**[z,y] & **P**[z])}]
,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,((**R** ⌈ **P**)^{I})] ⇒ ℕ[**n**,{y : ∃z(**R**[z,y] & **P**[z])}])
,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀P∀R (ω[n] & ℕ[n,((R ⌈ P)^{I})] ⇒ ℕ[n,{y : ∃z(R[z,y] & P[z])}])
! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **13.** ¡

⊢ ∀n∀R∀x (ω[n] & ℕ[n,((R ⌈ (x•))^{I})] ⇒ ℕ[n,{y : R[x,y]}]) ¡

n,**R**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,((**R** ⌈ (**x**•))^{I})] ,! 2 (Prem) ¡

{y : **R**[**x**,y]} ≡ ((**R** ⌈ (**x**•))^{I}) ,! 3 (∀E: III7.48) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,((**R** ⌈ (**x**•))^{I})] & {y : **R**[**x**,y]} ≡ ((**R** ⌈ (**x**•))^{I})
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,((**R** ⌈ (**x**•))^{I})] & {y : **R**[**x**,y]} ≡ ((**R** ⌈ (**x**•))^{I})
⇒ ℕ[**n**,{y : **R**[**x**,y]}])
,! 5 (∀E: P6) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,((**R** ⌈ (**x**•))^{I})] & {y : **R**[**x**,y]} ≡ ((**R** ⌈ (**x**•))^{I})
⇒ ℕ[**n**,{y : **R**[**x**,y]}]
,! 6 (()E: 5) ¡

ℕ[**n**,{y : **R**[**x**,y]}] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,((**R** ⌈ (**x**•))^{I})] ⇒ ℕ[**n**,{y : **R**[**x**,y]}]
,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,((**R** ⌈ (**x**•))^{I})] ⇒ ℕ[**n**,{y : **R**[**x**,y]}])
,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀R∀x (ω[n] & ℕ[n,((R ⌈ (x•))^{I})] ⇒ ℕ[n,{y : R[x,y]}])
! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **14.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀A∀B∀C
(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & ℕ[k,(A ∪ B)]
& ℕ[k,C] & (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ ∃Q∃R (ℕ[n,Q] & ℕ[m,R] & (Q ∪ R) ≡ C & (Q ∩ R) ≡ ϕ)) ¡

n,**m**,**k**,**A**,**B**,**C** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & ℕ[**k**,(**A** ∪ **B**)]
& ℕ[**k**,**C**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
,! 2 (Prem) ¡

ω[**k**] ,! 3 (&E: 2) ¡

$\mathbb{N}[\mathbf{k},(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})] \;\&\; \mathbb{N}[\mathbf{k},\mathbf{C}]$,! 4 (&E: 2) ¡

$\omega[\mathbf{k}] \;\&\; \mathbb{N}[\mathbf{k},(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})] \;\&\; \mathbb{N}[\mathbf{k},\mathbf{C}]$,! 5 (&I: 3,4) ¡

$(\omega[\mathbf{k}] \;\&\; \mathbb{N}[\mathbf{k},(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})] \;\&\; \mathbb{N}[\mathbf{k},\mathbf{C}] \Rightarrow (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \sim \mathbf{C})$
,! 6 (∀E: P4) ¡

$\omega[\mathbf{k}] \;\&\; \mathbb{N}[\mathbf{k},(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})] \;\&\; \mathbb{N}[\mathbf{k},\mathbf{C}] \Rightarrow (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \sim \mathbf{C}$
,! 7 (()E: 6) ¡

$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \sim \mathbf{C}$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \equiv \phi$,! 9 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \sim \mathbf{C} \;\&\; (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \equiv \phi$,! 10 (&I: 8,9) ¡

$((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \sim \mathbf{C} \;\&\; (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \equiv \phi$
$\Rightarrow \exists D \exists E ((D \cup E) \equiv \mathbf{C} \;\&\; (D \cap E) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{A} \sim D \;\&\; \mathbf{B} \sim E))$
,! 11 (∀E: III13.17)
¡

$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \sim \mathbf{C} \;\&\; (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \equiv \phi$
$\Rightarrow \exists D \exists E ((D \cup E) \equiv \mathbf{C} \;\&\; (D \cap E) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{A} \sim D \;\&\; \mathbf{B} \sim E)$
,! 12 (()E: 11) ¡

$\exists D \exists E ((D \cup E) \equiv \mathbf{C} \;\&\; (D \cap E) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{A} \sim D \;\&\; \mathbf{B} \sim E)$
,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

$\exists E ((\mathbf{Q} \cup E) \equiv \mathbf{C} \;\&\; (\mathbf{Q} \cap E) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{A} \sim \mathbf{Q} \;\&\; \mathbf{B} \sim E)$
,! 14 (∃E: 13) ¡

$((\mathbf{Q} \cup \mathbf{R}) \equiv \mathbf{C} \;\&\; (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{A} \sim \mathbf{Q} \;\&\; \mathbf{B} \sim \mathbf{R})$
,! 15 (∃E: 14) ¡

$(\mathbf{Q} \cup \mathbf{R}) \equiv \mathbf{C} \;\&\; (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{A} \sim \mathbf{Q} \;\&\; \mathbf{B} \sim \mathbf{R}$
,! 16 (()E: 15) ¡

$\mathbf{A} \sim \mathbf{Q}$,! 17 (&E: 16) ¡

$\omega[\mathbf{n}]$,! 18 (&E: 2) ¡

$\mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{A}]$,! 19 (&E: 2) ¡

$\omega[\mathbf{n}] \;\&\; \mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{A}]$,! 20 (&I: 18,19) ¡

$\omega[\mathbf{n}] \;\&\; \mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{A}] \;\&\; \mathbf{A} \sim \mathbf{Q}$,! 21 (&I: 17,20) ¡

$(\omega[\mathbf{n}] \;\&\; \mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{A}] \;\&\; \mathbf{A} \sim \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{Q}])$,! 22 (∀E: P2) ¡

$\omega[\mathbf{n}] \;\&\; \mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{A}] \;\&\; \mathbf{A} \sim \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{Q}]$,! 23 (()E: 22) ¡

$\mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{Q}]$,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

B ~ **R** ,! 25 (&E: 16) ¡

ω[**m**] ,! 26 (&E: 2) ¡

ℕ[**m**,**B**] ,! 27 (&E: 2) ¡

ω[**m**] & ℕ[**m**,**B**] ,! 28 (&I: 26,27) ¡

ω[**m**] & ℕ[**m**,**B**] & **B** ~ **R** ,! 29 (&I: 25,28) ¡

(ω[**m**] & ℕ[**m**,**B**] & **B** ~ **R** ⇒ ℕ[**m**,**R**]) ,! 30 (∀E: P2) ¡

ω[**m**] & ℕ[**m**,**B**] & **B** ~ **R** ⇒ ℕ[**m**,**R**] ,! 31 ()E: 30) ¡

ℕ[**m**,**R**] ,! 32 (⇒E: 29,31) ¡

ℕ[**n**,**Q**] & ℕ[**m**,**R**] ,! 33 (&I: 24,32) ¡

(**Q** ∪ **R**) ≡ **C** ,! 34 (&E: 16) ¡

ℕ[**n**,**Q**] & ℕ[**m**,**R**] & (**Q** ∪ **R**) ≡ **C** ,! 35 (&I: 33,34) ¡

(**Q** ∩ **R**) ≡ ϕ ,! 36 (&E: 16) ¡

ℕ[**n**,**Q**] & ℕ[**m**,**R**] & (**Q** ∪ **R**) ≡ **C** & (**Q** ∩ **R**) ≡ ϕ
,! 37 (&I: 35,36) ¡

(ℕ[**n**,**Q**] & ℕ[**m**,**R**] & (**Q** ∪ **R**) ≡ **C** & (**Q** ∩ **R**) ≡ ϕ)
,! 38 ()I: 37) ¡

∃R (ℕ[**n**,**Q**] & ℕ[**m**,R] & (**Q** ∪ R) ≡ **C** & (**Q** ∩ R) ≡ ϕ)
,! 39 (∃I: 38) ¡

∃Q∃R (ℕ[**n**,Q] & ℕ[**m**,R] & (Q ∪ R) ≡ **C** & (Q ∩ R) ≡ ϕ)
,! 40 (∃I: 39) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & ℕ[**k**,(**A** ∪ **B**)]
& ℕ[**k**,**C**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
⇒ ∃Q∃R (ℕ[**n**,Q] & ℕ[**m**,R] & (Q ∪ R) ≡ **C** & (Q ∩ R) ≡ ϕ)
,! 41 (⇒I: 2,40) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & ℕ[**k**,(**A** ∪ **B**)]
& ℕ[**k**,**C**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
⇒ ∃Q∃R (ℕ[**n**,Q] & ℕ[**m**,R] & (Q ∪ R) ≡ **C** & (Q ∩ R) ≡ ϕ))
,! 42 ()I: 41) ¡

∀n∀m∀k∀A∀B∀C
(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & ℕ[k,(A ∪ B)]
& ℕ[k,C] & (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ ∃Q∃R (ℕ[n,Q] & ℕ[m,R] & (Q ∪ R) ≡ C & (Q ∩ R) ≡ ϕ))
! 43 (∀I: 1,42) ¡

□

! **15.** ¡

⊢ ∀n∀P∀a∀b (ω[n] & ℕ[n,(P ∪ (a•))] & ¬ P[a] & ¬ P[b]
⇒ ℕ[n,(P ∪ (b•))]) ¡

n,**P**,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**P** ∪ (**a**•))] & ¬ **P**[**a**] & ¬ **P**[**b**]
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **P**[**a**] & ¬ **P**[**b**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(¬ **P**[**a**] & ¬ **P**[**b**] ⇒ (**P** ∪ (**a**•)) ~ (**P** ∪ (**b**•)))
,! 5 (∀E: III13.30) ¡

¬ **P**[**a**] & ¬ **P**[**b**] ⇒ (**P** ∪ (**a**•)) ~ (**P** ∪ (**b**•))
,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∪ (**a**•)) ~ (**P** ∪ (**b**•)) ,! 7 (⇒I: 6) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**P** ∪ (**a**•))] & (**P** ∪ (**a**•)) ~ (**P** ∪ (**b**•))
,! 8 (&I: 3,7) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,(**P** ∪ (**a**•))] & (**P** ∪ (**a**•)) ~ (**P** ∪ (**b**•))
⇒ ℕ[**n**,(**P** ∪ (**b**•))])
,! 9 (∀E: P2) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**P** ∪ (**a**•))] & (**P** ∪ (**a**•)) ~ (**P** ∪ (**b**•))
⇒ ℕ[**n**,(**P** ∪ (**b**•))]
,! 10 (()E: 9) ¡

ℕ[**n**,(**P** ∪ (**b**•))] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**P** ∪ (**a**•))] & ¬ **P**[**a**] & ¬ **P**[**b**] ⇒ ℕ[**n**,(**P** ∪ (**b**•))]
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,(**P** ∪ (**a**•))] & ¬ **P**[**a**] & ¬ **P**[**b**]
⇒ ℕ[**n**,(**P** ∪ (**b**•))])
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀P∀a∀b (ω[n] & ℕ[n,(P ∪ (a•))] & ¬ P[a] & ¬ P[b]
⇒ ℕ[n,(P ∪ (b•))])
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **16.** P16's proof appeals to P6, which is why it appears in this chapter and not already in the second. ¡

⊢ ∀n∀P∀a (ω[n] & ℕ[n,P] ⇒ ∃m (ω[m] & ℕ[m,(P ∪ (a•))])) ¡

n,**P**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] ,! 2 (Prem) ¡

((**P** ∪ (**a**•)) ≡ **P** ∨ ¬ **P**[**a**]) ,! 3 (∀E: II8.36) ¡

(**P** ∪ (**a**•)) ≡ **P** ∨ ¬ **P**[**a**] ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∪ (**a**•)) ≡ **P** ,! 5 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & (**P** ∪ (**a**•)) ≡ **P** ,! 6 (&I: 2,5) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & (**P** ∪ (**a**•)) ≡ **P** ⇒ ℕ[**n**,(**P** ∪ (**a**•))])
,! 7 (∀E: P6) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & (**P** ∪ (**a**•)) ≡ **P** ⇒ ℕ[**n**,(**P** ∪ (**a**•))]
,! 8 (()E: 7) ¡

ℕ[**n**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[**n**] ,! 10 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 11 (&I: 9,10) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,(**P** ∪ (**a**•))]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∃m (ω[m] & ℕ[m,(**P** ∪ (**a**•))]) ,! 13 (∃I: 12) ¡

(**P** ∪ (**a**•)) ≡ **P** ⇒ ∃m (ω[m] & ℕ[m,(**P** ∪ (**a**•))])
,! 14 (⇒I: 5,13) ¡

¬ **P**[**a**] ,! 15 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ,! 16 (&I: 2,15) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ⇒ ∃m (ω[m] & ℕ[m,(**P** ∪ (**a**•))]))
,! 17 (∀E: C2.9) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ⇒ ∃m (ω[m] & ℕ[m,(**P** ∪ (**a**•))])
,! 18 (()E: 17) ¡

∃m (ω[m] & ℕ[m,(**P** ∪ (**a**•))]) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

¬ **P**[**a**] ⇒ ∃m (ω[m] & ℕ[m,(**P** ∪ (**a**•))]),! 20 (⇒I: 15,19) ¡

∃m (ω[m] & ℕ[m,(**P** ∪ (**a**•))]) ,! 21 (∨E: 4,14,20) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] ⇒ ∃m (ω[m] & ℕ[m,(**P** ∪ (**a**•))])
,! 22 (⇒I: 2,21) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] ⇒ ∃m (ω[m] & ℕ[m,(**P** ∪ (**a**•))]))
,! 23 (()I: 22) ¡

∀n∀P∀a (ω[n] & ℕ[n,P] ⇒ ∃m (ω[m] & ℕ[m,(P ∪ (a•))]))
! 24 (∀I: 1,23) ¡

□

! **17.** P17 is important for subtraction. Remark that the condition that R has a finite number is necessary. Otherwise, choosing P = even numbers and R = Q = S = finite numbers, the antecedent would hold but not the conclusion. ¡

⊢ ∀n∀k∀P∀Q∀R∀S (ω[n] & ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S))) ¡

! We first prove
∀n (ω[n] ⇒
∀P∀Q∀R∀S (ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S)))
by induction, taking ϕ to be
∀P∀Q∀R∀S (ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S))
It must be shown that
∀P∀Q∀R∀S (ℕ[0,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S))
and that
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& ∀P∀Q∀R∀S (ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S))
⇒ ∀P∀Q∀R∀S (ℕ[m,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S))). ¡

! To prove:
∀P∀Q∀R∀S (ℕ[0,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

ℕ[0,**R**] & **P** ~ **Q** & **R** ~ **S** & **R** ⊆ **P** & **S** ⊆ **Q**
,! 2 (Prem) ¡

ℕ[0,**R**] ,! 3 (&E: 2) ¡

P ~ **Q** ,! 4 (&E: 2) ¡

R ~ **S** ,! 5 (&E: 2) ¡

(ℕ[0,**R**] ⇒ **R** ≡ ϕ) ,! 6 (∀E: C3.1) ¡

ℕ[0,**R**] ⇒ **R** ≡ ϕ ,! 7 (()E: 6) ¡

R ≡ ϕ ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

R ~ **S** & **R** ≡ ϕ ,! 9 (&I: 5,8) ¡

(**R** ~ **S** & **R** ≡ ϕ ⇒ **S** ≡ ϕ) ,! 10 (∀E: III13.21)

¡

R ~ **S** & **R** ≡ ϕ ⇒ **S** ≡ ϕ ,! 11 (()E: 10) ¡

S ≡ ϕ ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(**R** ≡ ϕ ⇒ (**P** \ **R**) ≡ **P**) ,! 13 (∀E: II7.57) ¡

R ≡ ϕ ⇒ (**P** \ **R**) ≡ **P** ,! 14 (()E: 13) ¡

(**P** \ **R**) ≡ **P** ,! 15 (⇒E: 8,14) ¡

P ~ **Q** & (**P** \ **R**) ≡ **P** ,! 16 (&I: 4,15) ¡

(**S** ≡ ϕ ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ **Q**) ,! 17 (∀E: II7.57) ¡

S ≡ ϕ ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ **Q** ,! 18 (()E: 17) ¡

(**Q** \ **S**) ≡ **Q** ,! 19 (⇒E: 12,18) ¡

P ~ **Q** & (**P** \ **R**) ≡ **P** & (**Q** \ **S**) ≡ **Q** ,! 20 (&I: 16,19) ¡

(**P** ~ **Q** & (**P** \ **R**) ≡ **P** & (**Q** \ **S**) ≡ **Q** ⇒ (**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**))
,! 21 (∀E: III13.14)
¡

P ~ **Q** & (**P** \ **R**) ≡ **P** & (**Q** \ **S**) ≡ **Q** ⇒ (**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**)
,! 22 (()E: 21) ¡

(**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**) ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

ℕ[0,**R**] & **P** ~ **Q** & **R** ~ **S** & **R** ⊆ **P** & **S** ⊆ **Q**
⇒ (**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**)
,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

(ℕ[0,**R**] & **P** ~ **Q** & **R** ~ **S** & **R** ⊆ **P** & **S** ⊆ **Q**
⇒ (**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**))
,! 25 (()I: 24) ¡

∀P∀Q∀R∀S (ℕ[0,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S))
,! 26 (∀I: 1,25) ¡

! To prove:
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& ∀P∀Q∀R∀S (ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S))
⇒ ∀P∀Q∀R∀S (ℕ[m,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S))) ¡

n,**m** ,! 27 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& ∀P∀Q∀R∀S (ℕ[**n**,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q

⇒ (P \ R) ~ (Q \ S))
,! 28 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 29 (&E: 28) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 30 (&E: 28) ¡

∀P∀Q∀R∀S (ℕ[**n**,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S))
,! 31 (&E: 28) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 32 (Prem) ¡

ℕ[**m**,**R**] & **P** ~ **Q** & **R** ~ **S** & **R** ⊆ **P** & **S** ⊆ **Q**
,! 33 (Prem) ¡

ℕ[**m**,**R**] ,! 34 (&E: 33) ¡

P ~ **Q** ,! 35 (&E: 33) ¡

R ~ **S** ,! 36 (&E: 33) ¡

R ⊆ **P** ,! 37 (&E: 33) ¡

S ⊆ **Q** ,! 38 (&E: 33) ¡

(**m** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 39 (∀E: I3.4) ¡

m = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ,! 40 ()E: 39) ¡

m = 0 ,! 41 (Prem) ¡

ℕ[0,**R**] & **P** ~ **Q** & **R** ~ **S** & **R** ⊆ **P** & **S** ⊆ **Q**
,! 42 (=E: 33,41) ¡

(ℕ[0,**R**] & **P** ~ **Q** & **R** ~ **S** & **R** ⊆ **P** & **S** ⊆ **Q**
⇒ (**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**))
,! 43 (∀E: 42) ¡

ℕ[0,**R**] & **P** ~ **Q** & **R** ~ **S** & **R** ⊆ **P** & **S** ⊆ **Q**
⇒ (**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**)
,! 44 ()E: 43) ¡

(**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**) ,! 45 (⇒E: 42,44) ¡

m = 0 ⇒ (**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**) ,! 46 (⇒I: 41,45) ¡

¬ **m** = 0 ,! 47 (Prem) ¡

ℕ[**m**,**R**] & ¬ **m** = 0 ,! 48 (&I: 34,47) ¡

(ℕ[**m**,**R**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ∃x **R**[x]),! 49 (∀E: C3.17) ¡

ℕ[**m**,**R**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ∃x **R**[x] ,! 50 ()E: 49) ¡

∃x **R**[x] ,! 51 (⇒E: 48,50) ¡

R[**a**] ,! 52 (∃E: 51) ¡

R ~ **S** & **R**[**a**] ,! 53 (&I: 36,52) ¡

R ~ **S** & ∃x **R**[x] ,! 54 (&I: 36,51) ¡

(**R** ~ **S** & ∃x **R**[x] ⇒ ∃x **S**[x]) ,! 55 (∀E: III13.25) ¡

R ~ **S** & ∃x **R**[x] ⇒ ∃x **S**[x] ,! 56 ()E: 55) ¡

∃x **S**[x] ,! 57 (⇒E: 54,56) ¡

S[**b**] ,! 58 (∃E: 57) ¡

R ~ **S** & **R**[**a**] & **S**[**b**] ,! 59 (&I: 53,58) ¡

(**R** ~ **S** & **R**[**a**] & **S**[**b**] ⇒ (**R** \ (**a**•)) ~ (**S** \ (**b**•))) ,! 60 (∀E: III13.34) ¡

R ~ **S** & **R**[**a**] & **S**[**b**] ⇒ (**R** \ (**a**•)) ~ (**S** \ (**b**•)) ,! 61 ()E: 60) ¡

(**R** \ (**a**•)) ~ (**S** \ (**b**•)) ,! 62 (⇒E: 59,61) ¡

P ~ **Q** & (**R** \ (**a**•)) ~ (**S** \ (**b**•)) ,! 63 (&I: 35,62) ¡

(**R** ⊆ **P** ⇒ (**R** \ (**a**•)) ⊆ **P**) ,! 64 (∀E: II7.15) ¡

R ⊆ **P** ⇒ (**R** \ (**a**•)) ⊆ **P** ,! 65 ()E: 64) ¡

(**R** \ (**a**•)) ⊆ **P** ,! 66 (⇒E: 37,64) ¡

P ~ **Q** & (**R** \ (**a**•)) ~ (**S** \ (**b**•)) & (**R** \ (**a**•)) ⊆ **P** ,! 67 (&I: 63,66) ¡

(**S** ⊆ **Q** ⇒ (**S** \ (**b**•)) ⊆ **Q**) ,! 68 (∀E: II7.15) ¡

S ⊆ **Q** ⇒ (**S** \ (**b**•)) ⊆ **Q** ,! 69 ()E: 68) ¡

(**S** \ (**b**•)) ⊆ **Q** ,! 70 (⇒E: 38,69) ¡

P ~ **Q** & (**R** \ (**a**•)) ~ (**S** \ (**b**•)) & (**R** \ (**a**•)) ⊆ **P** & (**S** \ (**b**•)) ⊆ **Q** ,! 71 (&I: 67,70) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & **R**[**a**] ,! 72 (&I: 30,52) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & **R**[**a**] & 𝔑[**m**,**R**] ,! 73 (&I: 34,72) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & **R**[**a**] & 𝔑[**m**,**R**] ⇒ 𝔑[**n**,(**R** \ (**a**•))]) ,! 74 (∀E: C2.11) ¡

$\omega[\mathbf{n}] \;\&\; \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}] \;\&\; \mathbf{R}[\mathbf{a}] \;\&\; \mathfrak{N}[\mathbf{m},\mathbf{R}] \Rightarrow \mathfrak{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))]$
,! 75 (()E: 74) ¡

$\mathfrak{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))]$,! 76 (⇒E: 73,75) ¡

$\mathfrak{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))] \;\&\; \mathbf{P} \sim \mathbf{Q} \;\&\; (\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \sim (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{b}^\bullet))$
$\&\; (\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \subseteq \mathbf{P} \;\&\; (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{b}^\bullet)) \subseteq \mathbf{Q}$
,! 77 (&I: 71,76) ¡

! Using the induction hypothesis... ¡

$(\mathfrak{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))] \;\&\; \mathbf{P} \sim \mathbf{Q} \;\&\; (\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \sim (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{b}^\bullet))$
$\&\; (\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \subseteq \mathbf{P} \;\&\; (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{b}^\bullet)) \subseteq \mathbf{Q}$
$\Rightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))) \sim (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{b}^\bullet))))$
,! 78 (∀E: 31) ¡

$\mathfrak{N}[\mathbf{n},(\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))] \;\&\; \mathbf{P} \sim \mathbf{Q} \;\&\; (\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \sim (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{b}^\bullet))$
$\&\; (\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \subseteq \mathbf{P} \;\&\; (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{b}^\bullet)) \subseteq \mathbf{Q}$
$\Rightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))) \sim (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{b}^\bullet)))$
,! 79 (()E: 78) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))) \sim (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{b}^\bullet)))$
,! 80 (⇒E: 77,79) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{a}] \;\&\; \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$,! 81 (&I: 37,52) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{a}] \;\&\; \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{S}[\mathbf{b}]$,! 82 (&I: 58,81) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{a}] \;\&\; \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{S}[\mathbf{b}] \;\&\; \mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q}$,! 83 (&I: 38,82) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{a}] \;\&\; \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{S}[\mathbf{b}] \;\&\; \mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q}$
$\&\; (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))) \sim (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{b}^\bullet)))$
,! 84 (&I: 80,83) ¡

$(\mathbf{R}[\mathbf{a}] \;\&\; \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{S}[\mathbf{b}] \;\&\; \mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q}$
$\&\; (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))) \sim (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{b}^\bullet)))$
$\Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \sim (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{S}))$
,! 85 (∀E: III13.36) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{a}] \;\&\; \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{S}[\mathbf{b}] \;\&\; \mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q}$
$\&\; (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{R} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))) \sim (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{b}^\bullet)))$
$\Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \sim (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{S})$
,! 86 (()E: 85) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \sim (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{S})$,! 87 (⇒E: 84,86) ¡

$\neg\, \mathbf{m} = 0 \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \sim (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{S})$,! 88 (⇒I: 47,87) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \sim (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{S})$,! 89 (∨E: 40,46,88) ¡

```
      ℕ[m,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
      ⇒ (P \ R) ~ (Q \ S)
                                          ,! 90 (⇒I: 33,89)  ¡

      ( ℕ[m,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
        ⇒ (P \ R) ~ (Q \ S) )
                                          ,! 91 (()I: 90)    ¡

    ∀P∀Q∀R∀S ( ℕ[m,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
               ⇒ (P \ R) ~ (Q \ S) )
                                          ,! 92 (∀I: 32,91)  ¡

  ω[n] & σ[n,m]
  & ∀P∀Q∀R∀S ( ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
               ⇒ (P \ R) ~ (Q \ S) )
  ⇒ ∀P∀Q∀R∀S ( ℕ[m,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
                ⇒ (P \ R) ~ (Q \ S) )
                                          ,! 93 (⇒I: 28,92)  ¡

  ( ω[n] & σ[n,m]
    & ∀P∀Q∀R∀S ( ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
                 ⇒ (P \ R) ~ (Q \ S) )
    ⇒ ∀P∀Q∀R∀S ( ℕ[m,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
                 ⇒ (P \ R) ~ (Q \ S) ) )
                                          ,! 94 (()I: 93)    ¡

∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m]
       & ∀P∀Q∀R∀S ( ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
                    ⇒ (P \ R) ~ (Q \ S) )
       ⇒ ∀P∀Q∀R∀S ( ℕ[m,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
                    ⇒ (P \ R) ~ (Q \ S) ) )
                                          ,! 95 (∀I: 27,94)  ¡

∀n ( ω[n] ⇒
     ∀P∀Q∀R∀S ( ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
                ⇒ (P \ R) ~ (Q \ S) ) )
                                          ,! 96 (Induct: 26,95)
                                                             ¡

  n,P,Q,R,S                               ,! 97 (Prem)       ¡

    ω[n] & ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
                                          ,! 98 (Prem)       ¡

    ω[n]                                  ,! 99 (&E: 98)     ¡

    ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
                                          ,! 100 (&E: 98)    ¡

    ( ω[n] ⇒
      ∀P∀Q∀R∀S ( ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
```

⇒ (P \ R) ~ (Q \ S)))
,! 101 (∀E: 96) ¡

ω[**n**] ⇒
∀P∀Q∀R∀S (ℕ[**n**,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S))
,! 102 (()E: 101) ¡

∀P∀Q∀R∀S (ℕ[**n**,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S))
,! 103 (⇒E: 99,102)
¡

(ℕ[**n**,**R**] & **P** ~ **Q** & **R** ~ **S** & **R** ⊆ **P** & **S** ⊆ **Q**
⇒ (**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**))
,! 104 (∀E: 103) ¡

ℕ[**n**,**R**] & **P** ~ **Q** & **R** ~ **S** & **R** ⊆ **P** & **S** ⊆ **Q**
⇒ (**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**)
,! 105 (()E: 104) ¡

(**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**) ,! 106 (⇒E: 100,105)
¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**R**] & **P** ~ **Q** & **R** ~ **S** & **R** ⊆ **P** & **S** ⊆ **Q**
⇒ (**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**)
,! 107 (⇒I: 98,106)
¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,**R**] & **P** ~ **Q** & **R** ~ **S** & **R** ⊆ **P** & **S** ⊆ **Q**
⇒ (**P** \ **R**) ~ (**Q** \ **S**))
,! 108 (()I: 107) ¡

∀n∀k∀P∀Q∀R∀S (ω[n] & ℕ[n,R] & P ~ Q & R ~ S & R ⊆ P & S ⊆ Q
⇒ (P \ R) ~ (Q \ S)))
! 109 (∀I: 97,108) ¡

□

! **18.** ¡

⊢ ∀n∀P∀Q (ω[n] & ℕ[n,P] & ℕ[n,Q] & P ⊆ Q ⇒ P ≡ Q) ¡

n,**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**n**,**Q**] & **P** ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**n**,**Q**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**n**,**Q**] ⇒ **P** ~ **Q**) ,! 5 (∀E: P4) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**n**,**Q**] ⇒ **P** ~ **Q** ,! 6 (()E: 5) ¡

P ~ **Q** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & **P** ~ **Q** ,! 8 (&I: 3,7) ¡

P ~ **P** ,! 9 (∀E: III13.3) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & **P** ~ **Q** & **P** ~ **P** ,! 10 (&I: 8,9) ¡

P ⊆ **P** ,! 11 (∀E: II1.4) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & **P** ~ **Q** & **P** ~ **P** & **P** ⊆ **P**
,! 12 (&I: 10,11) ¡

P ⊆ **Q** ,! 13 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & **P** ~ **Q** & **P** ~ **P** & **P** ⊆ **P** & **P** ⊆ **Q**
,! 14 (&I: 12,13) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & **P** ~ **Q** & **P** ~ **P** & **P** ⊆ **P** & **P** ⊆ **Q**
⇒ (**P** \ **P**) ~ (**Q** \ **P**))
,! 15 (∀E: P17) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & **P** ~ **Q** & **P** ~ **P** & **P** ⊆ **P** & **P** ⊆ **Q**
⇒ (**P** \ **P**) ~ (**Q** \ **P**)
,! 16 (()E: 15) ¡

(**P** \ **P**) ~ (**Q** \ **P**) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

(**P** \ **P**) ≡ ϕ ,! 18 (∀E: II7.51) ¡

(**P** \ **P**) ~ (**Q** \ **P**) & (**P** \ **P**) ≡ ϕ ,! 19 (&I: 17,18) ¡

((**P** \ **P**) ~ (**Q** \ **P**) & (**P** \ **P**) ≡ ϕ ⇒ (**Q** \ **P**) ~ ϕ)
,! 20 (∀E: III13.21)
¡

(**P** \ **P**) ~ (**Q** \ **P**) & (**P** \ **P**) ≡ ϕ ⇒ (**Q** \ **P**) ~ ϕ
,! 21 (()E: 20) ¡

(**Q** \ **P**) ~ ϕ ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

((**Q** \ **P**) ~ ϕ ⇒ (**Q** \ **P**) ≡ ϕ) ,! 23 (∀E III13.18) ¡

(**Q** \ **P**) ~ ϕ ⇒ (**Q** \ **P**) ≡ ϕ ,! 24 (()E: 23) ¡

(**Q** \ **P**) ≡ ϕ ,! 25 (⇒E: 22,24) ¡

((**Q** \ **P**) ≡ ϕ ⇒ **Q** ⊆ **P**) ,! 26 (∀E: II7.53) ¡

(**Q** \ **P**) ≡ ϕ ⇒ **Q** ⊆ **P** ,! 27 (()E: 26) ¡

Q ⊆ **P** ,! 28 (⇒E: 25,27) ¡

P ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P** ,! 29 (&I: 13,28) ¡

(**P** ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P** ⇒ **P** ≡ **Q**) ,! 30 (∀E: II1.8) ¡

P ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P** ⇒ **P** ≡ **Q** ,! 31 (()E: 30) ¡

P ≡ **Q** ,! 32 (⇒E: 29,31) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**n**,**Q**] & **P** ⊆ **Q** ⇒ **P** ≡ **Q**
,! 33 (⇒I: 2,32) ¡

(ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**n**,**Q**] & **P** ⊆ **Q** ⇒ **P** ≡ **Q**)
,! 34 (()I: 33) ¡

∀n∀P∀Q (ω[n] & ℕ[n,P] & ℕ[n,Q] & P ⊆ Q ⇒ P ≡ Q)
! 35 (∀I: 1,34) ¡

□