CHAPTER 1
COUNTING

This chapter is the first to appeal to the mathematical axioms and rule of deduction (Induction). It reformulates certain of them in terms of the logical language which has been introduced in Sections II and III and proves simple consequences. It finishes by stating and proving an important lemma and and important theorem. The lemma asserts that a finite count is not changed even if two items are switched; and the theorem states that finite counts yield a unique number.

P1 reforumulates Count0.

1.

⊢ ∀n∀C (𝔖[n,C] ⇒ **1** C)

n,**C**	,! 1 (Prem)	
𝔖[**n**,**C**]	,! 2 (Prem)	
x,**y**,**z**	,! 3 (Prem)	
C[**x**,**y**] & **C**[**z**,**y**]	,! 4 (Prem)	
𝔖[**n**,**C**] & **C**[**x**,**y**] & **C**[**z**,**y**]	,! 5 (&I: 2,4)	
(𝔖[**n**,**C**] & **C**[**x**,**y**] & **C**[**z**,**y**] ⇒ **x** = **z**)	,! 6 (∀E: Count0)	
𝔖[**n**,**C**] & **C**[**x**,**y**] & **C**[**z**,**y**] ⇒ **x** = **z**	,! 7 (()E: 6)	
x = **z**	,! 8 (⇒E: 5,7)	
C[**x**,**y**] & **C**[**z**,**y**] ⇒ **x** = **z**	,! 9 (⇒I: 4,8)	
(**C**[**x**,**y**] & **C**[**z**,**y**] ⇒ **x** = **z**)	,! 10 (()I: 9)	
∀x∀y∀z (**C**[x,y] & **C**[z,y] ⇒ x = z)	,! 11 (∀I: 3,10)	
1 **C**	,! 12 ($I: III9.1,11)	
𝔖[**n**,**C**] ⇒ **1** **C**	,! 13 (⇒I: 2,12)	
(𝔖[**n**,**C**] ⇒ **1** **C**)	,! 14 (()I: 13)	
∀n∀C (𝔖[n,C] ⇒ **1** C)	! 15 (∀E: 1,14)	

□

P2 through P8 state reformulations and simple consequences of Count2.

2.

⊢ ∀C (𝔖[0,C] ⇔ C ≡ Φ)

C ,! 1 (Prem) ¡

(ℭ[0,**C**] ⇔ ¬ ∃x∃y **C**[x,y]) ,! 2 (∀E: Count2) ¡

ℭ[0,**C**] ⇔ ¬ ∃x∃y **C**[x,y] ,! 3 (()E: 2) ¡

ℭ[0,**C**] ,! 4 (Prem) ¡

ℭ[0,**C**] ⇒ ¬ ∃x∃y **C**[x,y] ,! 5 (⇔E: 3) ¡

¬ ∃x∃y **C**[x,y] ,! 6 (⇒E: 4,5) ¡

(¬ ∃x∃y **C**[x,y] ⇒ **C** ≣ Φ) ,! 7 (∀E: III4.9) ¡

¬ ∃x∃y **C**[x,y] ⇒ **C** ≣ Φ ,! 8 (()E: 7) ¡

C ≣ Φ ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ℭ[0,**C**] ⇒ **C** ≣ Φ ,! 10 (⇒I: 4,9) ¡

C ≣ Φ ,! 11 (Prem) ¡

(**C** ≣ Φ ⇒ ¬ ∃x∃y **C**[x,y]) ,! 12 (∀E: III4.5) ¡

C ≣ Φ ⇒ ¬ ∃x∃y **C**[x,y] ,! 13 (()E: 12) ¡

¬ ∃x∃y **C**[x,y] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

¬ ∃x∃y **C**[x,y] ⇒ ℭ[0,**C**] ,! 15 (⇔E: 3) ¡

ℭ[0,**C**] ,! 16 (⇒E: 14,15) ¡

C ≣ Φ ⇒ ℭ[0,**C**] ,! 17 (⇒I: 11,16) ¡

ℭ[0,**C**] ⇔ **C** ≣ Φ ,! 18 (⇔I: 10,17) ¡

(ℭ[0,**C**] ⇔ **C** ≣ Φ) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀C (ℭ[0,C] ⇔ C ≣ Φ) ! 20 (∀I: 1,19) ¡

□

! **3.** ¡

⊢ ∀C (ℭ[0,C] ⇒ C ≣ Φ) ¡

C ,! 1 (Prem) ¡

(ℭ[0,**C**] ⇔ **C** ≣ Φ) ,! 2 (∀E: P2) ¡

ℭ[0,**C**] ⇔ **C** ≣ Φ ,! 3 (()E: 2) ¡

ℭ[0,**C**] ⇒ **C** ≣ Φ ,! 4 (⇔E: 3) ¡

```
  ( 𝔊[0,C] ⇒ C ≣ Φ )                          ,! 5 (()I: 4)        ¡
∀C ( 𝔊[0,C] ⇒ C ≣ Φ )                           ! 6 (∀I: 1,5)       ¡
□
! 4.                                                                 ¡
⊢ ∀C ( C ≣ Φ ⇒ 𝔊[0,C] )                                              ¡
  C                                          ,! 1 (Prem)           ¡
  ( 𝔊[0,C] ⇔ C ≣ Φ )                         ,! 2 (∀E: P2)         ¡
  𝔊[0,C] ⇔ C ≣ Φ                             ,! 3 (()E: 2)         ¡
  C ≣ Φ ⇒ 𝔊[0,C]                             ,! 4 (⇔E: 3)          ¡
  ( C ≣ Φ ⇒ 𝔊[0,C] )                         ,! 5 (()I: 4)         ¡
∀C ( C ≣ Φ ⇒ 𝔊[0,C] )                           ! 6 (∀I: 1,5)       ¡
□
! 5.                                                                 ¡
⊢ ∀C ( 𝔊[0,C] ⇒ ¬ ∃x∃y C[x,y] )                                      ¡
  C                                          ,! 1 (Prem)           ¡
  ( 𝔊[0,C] ⇔ ¬ ∃x∃y C[x,y] )                 ,! 2 (∀E: Count2)     ¡
  𝔊[0,C] ⇔ ¬ ∃x∃y C[x,y]                     ,! 3 (()E: 2)         ¡
  𝔊[0,C] ⇒ ¬ ∃x∃y C[x,y]                     ,! 4 (⇔E: 3)          ¡
  ( 𝔊[0,C] ⇒ ¬ ∃x∃y C[x,y] )                 ,! 5 (()I: 4)         ¡
∀C ( 𝔊[0,C] ⇒ ¬ ∃x∃y C[x,y] )                   ! 6 (∀I: 1,5)       ¡
□
! 6.                                                                 ¡
⊢ ∀n∀C∀x∀y ( 𝔊[n,C] & C[x,y] ⇒ ¬ n = 0 )                             ¡
  n,C,x,y                                    ,! 1 (Prem)           ¡
    𝔊[n,C] & C[x,y]                          ,! 2 (Prem)           ¡
    𝔊[n,C]                                   ,! 3 (&E: 2)          ¡
    C[x,y]                                   ,! 4 (&E: 2)          ¡
      n = 0                                  ,! 5 (Prem)           ¡
```

```
      𝔊[0,C]                                  ,! 6 (=E: 3,5)        ¡
      ( 𝔊[0,C] ⇒ ¬ ∃x∃y C[x,y] )              ,! 7 (∀E: P5)         ¡
      𝔊[0,C] ⇒ ¬ ∃x∃y C[x,y]                  ,! 8 (()E: 7)         ¡
      ¬ ∃x∃y C[x,y]                           ,! 9 (⇒E: 6,8)        ¡
      ∃y C[x,y]                               ,! 10 (∃I: 4)         ¡
      ∃x∃y C[x,y]                             ,! 11 (∃I: 10)        ¡
      𝔉                                       ,! 12 (𝔉I: 9,11)      ¡
    n = 0 ⇒ 𝔉                                 ,! 13 (⇒I: 5,12)      ¡
    ¬ n = 0                                   ,! 14 (¬I: 13)        ¡
  𝔊[n,C] & C[x,y] ⇒ ¬ n = 0                   ,! 15 (⇒I: 2,14)      ¡
  ( 𝔊[n,C] & C[x,y] ⇒ ¬ n = 0 )               ,! 16 (()I: 15)       ¡
∀n∀C∀x∀y ( 𝔊[n,C] & C[x,y] ⇒ ¬ n = 0 )        ! 17 (∀I: 1,16)       ¡
□
! 7.                                                                ¡
⊢ ∀n∀C ( 𝔊[n,C] & 𝔊[0,C] ⇒ n = 0 )                                  ¡
  n,C                                       ,! 1 (Prem)           ¡
    𝔊[n,C] & 𝔊[0,C]                         ,! 2 (Prem)           ¡
    𝔊[n,C]                                  ,! 3 (&E: 2)          ¡
    𝔊[0,C]                                  ,! 4 (&E: 2)          ¡
    0 = 0                                   ,! 5 (=I)             ¡
      ¬ n = 0                               ,! 6 (Prem)           ¡
      𝔊[n,C] & ¬ n = 0                      ,! 7 (&I: 3,6)        ¡
      ( 𝔊[n,C] & ¬ n = 0 ⇒ ∃a C[n,a] )       ,! 8 (∀E: Count1a)    ¡
      𝔊[n,C] & ¬ n = 0 ⇒ ∃a C[n,a]           ,! 9 (()E: 8)         ¡
      ∃a C[n,a]                             ,! 10 (⇒E: 7,9)       ¡
      C[n,a]                                ,! 11 (∃E: 10)        ¡
      𝔊[0,C] & C[n,a]                       ,! 12 (&I: 4,11)      ¡
      ( 𝔊[0,C] & C[n,a] ⇒ ¬ 0 = 0 )          ,! 13 (∀E: P6)        ¡
```

```
    ℂ[0,C] & C[n,a] ⇒ ¬ 0 = 0          ,! 14 (()E: 13)     ¡
    ¬ 0 = 0                            ,! 15 (⇒E: 12,14)   ¡
    ℱ                                  ,! 16 (ℱI: 5,15)    ¡
  ¬ n = 0 ⇒ ℱ                          ,! 17 (⇒I: 6,16)    ¡
  ¬¬ n = 0                             ,! 18 (¬I: 17)      ¡
  n = 0                                ,! 19 (¬E: 18)      ¡
 ℂ[n,C] & ℂ[0,C] ⇒ n = 0               ,! 20 (⇒I: 2,19)    ¡
 ( ℂ[n,C] & ℂ[0,C] ⇒ n = 0 )           ,! 21 (()I: 20)     ¡
∀n∀C ( ℂ[n,C] & ℂ[0,C] ⇒ n = 0 )        ! 22 (∀I: 1,21)    ¡
□
! 8.                                                       ¡
⊢ ∀n∀C∀D ( ℂ[n,C] & ℂ[0,D] & (C^I) ≡ (D^I) ⇒ n = 0 )      ¡
  n,C,D                              ,! 1 (Prem)         ¡
    ℂ[n,C] & ℂ[0,D] & (C^I) ≡ (D^I)  ,! 2 (Prem)         ¡
    ℂ[n,C]                           ,! 3 (&E: 2)        ¡
    ℂ[0,D]                           ,! 4 (&E: 2)        ¡
    (C^I) ≡ (D^I)                    ,! 5 (&E: 2)        ¡
    ( ℂ[0,D] ⇒ D ≣ Φ )               ,! 6 (∀E: P3)       ¡
    ℂ[0,D] ⇒ D ≣ Φ                   ,! 7 (()E: 6)       ¡
    D ≣ Φ                            ,! 8 (⇒E: 4,7)      ¡
    ( D ≣ Φ ⇒ (D^I) ≡ ϕ )            ,! 9 (∀E: III6.29)  ¡
    D ≣ Φ ⇒ (D^I) ≡ ϕ                ,! 10 (()E: 9)      ¡
    (D^I) ≡ ϕ                        ,! 11 (⇒E: 8,10)    ¡
    (C^I) ≡ (D^I) & (D^I) ≡ ϕ        ,! 12 (&I: 5,11)    ¡
    ( (C^I) ≡ (D^I) & (D^I) ≡ ϕ ⇒ (C^I) ≡ ϕ )
                                     ,! 13 (∀E: II1.15)  ¡
    (C^I) ≡ (D^I) & (D^I) ≡ ϕ ⇒ (C^I) ≡ ϕ  ,! 14 (()E: 13)  ¡
    (C^I) ≡ ϕ                        ,! 15 (⇒E: 12,14)   ¡
```

($(\mathbf{C}^{I}) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{C} \equiv \Phi$) ,! 16 (∀E: III6.30) ¡

$(\mathbf{C}^{I}) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{C} \equiv \Phi$,! 17 (()E: 16) ¡

$\mathbf{C} \equiv \Phi$,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

($\mathbf{C} \equiv \Phi \Rightarrow \mathfrak{C}[0,\mathbf{C}]$) ,! 19 (∀E: P4) ¡

$\mathbf{C} \equiv \Phi \Rightarrow \mathfrak{C}[0,\mathbf{C}]$,! 20 (()E: 19) ¡

$\mathfrak{C}[0,\mathbf{C}]$,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}] \& \mathfrak{C}[0,\mathbf{C}]$,! 22 (&I: 3,21) ¡

($\mathfrak{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}] \& \mathfrak{C}[0,\mathbf{C}] \Rightarrow \mathbf{n} = 0$) ,! 23 (∀E: P7) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}] \& \mathfrak{C}[0,\mathbf{C}] \Rightarrow \mathbf{n} = 0$,! 24 (()E: 23) ¡

$\mathbf{n} = 0$,! 25 (⇒E: 22,24) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}] \& \mathfrak{C}[0,\mathbf{D}] \& (\mathbf{C}^{I}) \equiv (\mathbf{D}^{I}) \Rightarrow \mathbf{n} = 0$,! 26 (⇒I: 2,25) ¡

($\mathfrak{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}] \& \mathfrak{C}[0,\mathbf{D}] \& (\mathbf{C}^{I}) \equiv (\mathbf{D}^{I}) \Rightarrow \mathbf{n} = 0$)
,! 27 (()I: 26) ¡

$\forall n \forall C \forall D$ ($\mathfrak{C}[n,C] \& \mathfrak{C}[0,D] \& (C^{I}) \equiv (D^{I}) \Rightarrow n = 0$)
! 28 (∀I: 1,27) ¡

□

! P9 through P14 state a reformulation and simple consequences of Count3. ¡

! **9.** ¡

⊢ $\forall n \forall m \forall C \forall D \forall a$ ($\omega[n] \& \sigma[n,m] \& \neg (C^{I})[a] \& D \equiv (C \sqcup (m \blacksquare a))$
$\Rightarrow (\mathfrak{C}[n,C] \Leftrightarrow \mathfrak{C}[m,D])$) ¡

$\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{n}] \& \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}] \& \neg (\mathbf{C}^{I})[\mathbf{a}] \& \mathbf{D} \equiv (\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))$
,! 2 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{n}] \& \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]$,! 3 (&E: 2) ¡

$\neg (\mathbf{C}^{I})[\mathbf{a}]$,! 4 (&E: 2) ¡

$\mathbf{D} \equiv (\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))$,! 5 (&E: 2) ¡

($\neg (\mathbf{C}^{I})[\mathbf{a}] \Rightarrow \neg \exists x\, \mathbf{C}[x,\mathbf{a}]$) ,! 6 (∀E: III6.6) ¡

$\neg (\mathbf{C}^{I})[\mathbf{a}] \Rightarrow \neg \exists x\, \mathbf{C}[x,\mathbf{a}]$,! 7 (()E: 6) ¡

¬ ∃x **C**[x,**a**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ ∃x **C**[x,**a**] ,! 9 (&I: 3,8) ¡

(**D** ≣ (**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))
⇒ ∀x∀y (**D**[x,y] ⇔ **C**[x,y] ∨ (x = **m** & y = **a**)))
,! 10 (∀E: III12.14)
¡

D ≣ (**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))
⇒ ∀x∀y (**D**[x,y] ⇔ **C**[x,y] ∨ (x = **m** & y = **a**))
,! 11 (()E: 10) ¡

∀x∀y (**D**[x,y] ⇔ **C**[x,y] ∨ (x = **m** & y = **a**))
,! 12 (⇒E: 5,11) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ ∃x **C**[x,**a**]
& ∀x∀y (**D**[x,y] ⇔ **C**[x,y] ∨ (x = **m** & y = **a**))
,! 13 (&I: 9,12) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ ∃x **C**[x,**a**]
& ∀x∀y (**D**[x,y] ⇔ **C**[x,y] ∨ (x = **m** & y = **a**))
⇒ (ℭ[**n**,**C**] ⇔ ℭ[**m**,**D**]))
,! 14 (∀E: Count3) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ ∃x **C**[x,**a**]
& ∀x∀y (**D**[x,y] ⇔ **C**[x,y] ∨ (x = **m** & y = **a**))
⇒ (ℭ[**n**,**C**] ⇔ ℭ[**m**,**D**])
,! 15 (()E: 14) ¡

(ℭ[**n**,**C**] ⇔ ℭ[**m**,**D**]) ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ ($\mathbf{C}^{\mathrm{I}}$)[**a**] & **D** ≣ (**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))
⇒ (ℭ[**n**,**C**] ⇔ ℭ[**m**,**D**])
,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ ($\mathbf{C}^{\mathrm{I}}$)[**a**] & **D** ≣ (**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))
⇒ (ℭ[**n**,**C**] ⇔ ℭ[**m**,**D**]))
,! 18 (()I: 17) ¡

∀n∀m∀C∀D∀a (ω[n] & σ[n,m] & ¬ (C^{I})[a] & D ≣ (C ⊔ (m ▪ a))
⇒ (ℭ[n,C] ⇔ ℭ[m,D]))
! 19 (∀I: 1,18) ¡

□

! **10.** ¡

⊢ ∀n∀m∀C∀D∀a (ω[n] & σ[n,m] & ¬ (C^{I})[a] & D ≣ (C ⊔ (m ▪ a))
& ℭ[n,C]
⇒ ℭ[m,D]) ¡

n,**m**,**C**,**D**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (**C**^{I})[**a**] & **D** ≣ (**C** ⊔ (**m** ▪ **a**)) & ℭ[**n**,**C**]
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (**C**^{I})[**a**] & **D** ≣ (**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))
,! 3 (&E: 2) ¡

ℭ[**n**,**C**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (**C**^{I})[**a**] & **D** ≣ (**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))
⇒ (ℭ[**n**,**C**] ⇔ ℭ[**m**,**D**]))
,! 5 (∀E: P9) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (**C**^{I})[**a**] & **D** ≣ (**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))
⇒ (ℭ[**n**,**C**] ⇔ ℭ[**m**,**D**])
,! 6 (()E: 5) ¡

(ℭ[**n**,**C**] ⇔ ℭ[**m**,**D**]) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ℭ[**n**,**C**] ⇔ ℭ[**m**,**D**] ,! 8 (()E: 7) ¡

ℭ[**n**,**C**] ⇒ ℭ[**m**,**D**] ,! 9 (⇔E: 8) ¡

ℭ[**m**,**D**] ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (**C**^{I})[**a**] & **D** ≣ (**C** ⊔ (**m** ▪ **a**)) & ℭ[**n**,**C**]
⇒ ℭ[**m**,**D**]
,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (**C**^{I})[**a**] & **D** ≣ (**C** ⊔ (**m** ▪ **a**)) & ℭ[**n**,**C**]
⇒ ℭ[**m**,**D**])
,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀C∀D∀a (ω[n] & σ[n,m] & ¬ (C^{I})[a] & D ≣ (C ⊔ (m ▪ a))
& ℭ[n,C]
⇒ ℭ[m,D])
! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **11.** ¡

⊢ ∀n∀m∀C∀D∀a (ω[n] & σ[n,m] & ¬ (C^{I})[a] & D ≣ (C ⊔ (m ▪ a))
& ℭ[m,D]
⇒ ℭ[n,C]) ¡

n,**m**,**C**,**D**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (**C**^{I})[**a**] & **D** ≣ (**C** ⊔ (**m** ▪ **a**)) & ℭ[**m**,**D**]
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (**C**^{I})[**a**] & **D** ≣ (**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))

,! 3 (&E: 2) ¡

$\mathcal{C}[\mathbf{m},\mathbf{D}]$,! 4 (&E: 2) ¡

$(\omega[\mathbf{n}] \,\&\, \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}] \,\&\, \neg\, (\mathbf{C}^{\mathrm{I}})[\mathbf{a}] \,\&\, \mathbf{D} \equiv (\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))$
$\Rightarrow (\mathcal{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}] \Leftrightarrow \mathcal{C}[\mathbf{m},\mathbf{D}]))$
,! 5 (∀E: P9) ¡

$\omega[\mathbf{n}] \,\&\, \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}] \,\&\, \neg\, (\mathbf{C}^{\mathrm{I}})[\mathbf{a}] \,\&\, \mathbf{D} \equiv (\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))$
$\Rightarrow (\mathcal{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}] \Leftrightarrow \mathcal{C}[\mathbf{m},\mathbf{D}])$
,! 6 (()E: 5) ¡

$(\mathcal{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}] \Leftrightarrow \mathcal{C}[\mathbf{m},\mathbf{D}])$,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

$\mathcal{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}] \Leftrightarrow \mathcal{C}[\mathbf{m},\mathbf{D}]$,! 8 (()E: 7) ¡

$\mathcal{C}[\mathbf{m},\mathbf{D}] \Rightarrow \mathcal{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}]$,! 9 (⇔E: 8) ¡

$\mathcal{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}]$,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

$\omega[\mathbf{n}] \,\&\, \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}] \,\&\, \neg\, (\mathbf{C}^{\mathrm{I}})[\mathbf{a}] \,\&\, \mathbf{D} \equiv (\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a})) \,\&\, \mathcal{C}[\mathbf{m},\mathbf{D}]$
$\Rightarrow \mathcal{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}]$
,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

$(\omega[\mathbf{n}] \,\&\, \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}] \,\&\, \neg\, (\mathbf{C}^{\mathrm{I}})[\mathbf{a}] \,\&\, \mathbf{D} \equiv (\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a})) \,\&\, \mathcal{C}[\mathbf{m},\mathbf{D}]$
$\Rightarrow \mathcal{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}])$
,! 12 (()I: 11) ¡

$\forall n \forall m \forall C \forall D \forall a \,(\omega[n] \,\&\, \sigma[n,m] \,\&\, \neg\, (C^{\mathrm{I}})[a] \,\&\, D \equiv (C \sqcup (m \blacksquare a))$
$\&\, \mathcal{C}[m,D]$
$\Rightarrow \mathcal{C}[n,C])$
! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **12.** ¡

$\vdash \forall n \forall m \forall C \forall a \,(\omega[n] \,\&\, \sigma[n,m] \,\&\, \mathcal{C}[m,C] \,\&\, C[m,a]$
$\Rightarrow \mathcal{C}[n,(C \iota m a)] \,\&\, \neg\, ((C \iota m a)^{\mathrm{I}})[a])$
¡

$\mathbf{n},\mathbf{m},\mathbf{C},\mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{n}] \,\&\, \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}] \,\&\, \mathcal{C}[\mathbf{m},\mathbf{C}] \,\&\, \mathbf{C}[\mathbf{m},\mathbf{a}]$,! 2 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{n}] \,\&\, \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}] \,\&\, \mathcal{C}[\mathbf{m},\mathbf{C}]$,! 3 (&E: 2) ¡

$\omega[\mathbf{n}] \,\&\, \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]$,! 4 (&E: 2) ¡

$\mathcal{C}[\mathbf{m},\mathbf{C}]$,! 5 (&E: 2) ¡

$\mathbf{C}[\mathbf{m},\mathbf{a}]$,! 6 (&E: 2) ¡

(ℭ[**m**,**C**] ⇒ **1 C**) ,! 7 (∀E: P1) ¡

ℭ[**m**,**C**] ⇒ **1 C** ,! 8 (()E: 7) ¡

1 C ,! 9 (⇒E: 5,8) ¡

1 C & **C**[**m**,**a**] ,! 10 (&I: 6,9) ¡

(**1 C** & **C**[**m**,**a**] ⇒ ¬ ((**C** ι **m a**)^{I})[**a**]) ,! 11 (∀E: III14.13) ¡

1 C & **C**[**m**,**a**] ⇒ ¬ ((**C** ι **m a**)^{I})[**a**] ,! 12 (()E: 11) ¡

¬ ((**C** ι **m a**)^{I})[**a**] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ ((**C** ι **m a**)^{I})[**a**] & ℭ[**m**,**C**] ,! 14 (&I: 3,13) ¡

(**C**[**m**,**a**] ⇒ **C** ≣ ((**C** ι **m a**) ⊔ (**m** ▪ **a**))) ,! 15 (∀E: III14.12) ¡

C[**m**,**a**] ⇒ **C** ≣ ((**C** ι **m a**) ⊔ (**m** ▪ **a**)) ,! 16 (()E: 15) ¡

C ≣ ((**C** ι **m a**) ⊔ (**m** ▪ **a**)) ,! 17 (⇒E: 6,16) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ ((**C** ι **m a**)^{I})[**a**] & **C** ≣ ((**C** ι **m a**) ⊔ (**m** ▪ **a**)) & ℭ[**m**,**C**] ,! 18 (&I: 14,17) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ ((**C** ι **m a**)^{I})[**a**] & **C** ≣ ((**C** ι **m a**) ⊔ (**m** ▪ **a**)) & ℭ[**m**,**C**] ⇒ ℭ[**n**,(**C** ι **m a**)]) ,! 19 (∀E: P11) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ ((**C** ι **m a**)^{I})[**a**] & **C** ≣ ((**C** ι **m a**) ⊔ (**m** ▪ **a**)) & ℭ[**m**,**C**] ⇒ ℭ[**n**,(**C** ι **m a**)] ,! 20 (()E: 19) ¡

ℭ[**n**,(**C** ι **m a**)] ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

ℭ[**n**,(**C** ι **m a**)] & ¬ ((**C** ι **m a**)^{I})[**a**] ,! 22 (&I: 13,21) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,**C**] & **C**[**m**,**a**] ⇒ ℭ[**n**,(**C** ι **m a**)] & ¬ ((**C** ι **m a**)^{I})[**a**] ,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,**C**] & **C**[**m**,**a**] ⇒ ℭ[**n**,(**C** ι **m a**)] & ¬ ((**C** ι **m a**)^{I})[**a**]) ,! 24 (()I: 23) ¡

∀n∀m∀C∀a (ω[n] & σ[n,m] & ℭ[m,C] & C[m,a]
⇒ ℭ[n,(C ι m a)] & ¬ ((C ι m a)^{I})[a])
! 25 (∀I: 1,24) ¡

□

! **13.** ¡

⊢ ∀n∀m∀C∀a (ω[n] & σ[n,m] & ℭ[m,C] & C[m,a] ⇒ ℭ[n,(C ι m a)])
¡

n,**m**,**C**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,**C**] & **C**[**m**,**a**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,**C**] & **C**[**m**,**a**]
⇒ ℭ[**n**,(**C** ι **m** **a**)] & ¬ ((**C** ι **m** **a**)^{I})[**a**])
,! 3 (∀E: P12) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,**C**] & **C**[**m**,**a**]
⇒ ℭ[**n**,(**C** ι **m** **a**)] & ¬ ((**C** ι **m** **a**)^{I})[**a**]
,! 4 ()E: 3) ¡

ℭ[**n**,(**C** ι **m** **a**)] & ¬ ((**C** ι **m** **a**)^{I})[**a**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ℭ[**n**,(**C** ι **m** **a**)] ,! 6 (&E: 5) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,**C**] & **C**[**m**,**a**] ⇒ ℭ[**n**,(**C** ι **m** **a**)]
,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,**C**] & **C**[**m**,**a**] ⇒ ℭ[**n**,(**C** ι **m** **a**)])
,! 8 ()I: 7) ¡

∀n∀m∀C∀a (ω[n] & σ[n,m] & ℭ[m,C] & C[m,a] ⇒ ℭ[n,(C ι m a)])
! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **14.** At this point we need ¬ m = 0 as one of the antecedents, since we have not shown that 0 cannot be a successor of a natural number. ¡

⊢ ∀n∀m∀C (ω[n] & σ[n,m] & ℭ[m,C] & ¬ m = 0
⇒ ∃a (C[m,a] & ℭ[n,(C ι m a)] & ¬ ((C ι m a)^{I})[a]))
¡

n,**m**,**C** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,**C**] & ¬ **m** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,**C**] ,! 3 (Prem) ¡

ℭ[**m**,**C**] & ¬ **m** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

(𝔠[**m**,**C**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ∃a **C**[**m**,a]) ,! 5 (∀E: Count1a) ¡

𝔠[**m**,**C**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ∃a **C**[**m**,a] ,! 6 (()E: 5) ¡

∃a **C**[**m**,a] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

C[**m**,**a**] ,! 8 (∃E: 7) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & 𝔠[**m**,**C**] & **C**[**m**,**a**] ,! 9 (&I: 3,8) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & 𝔠[**m**,**C**] & **C**[**m**,**a**]
⇒ 𝔠[**n**,(**C** ι **m** **a**)] & ¬ ((**C** ι **m** **a**)^{I})[**a**])
,! 10 (∀E: P12) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & 𝔠[**m**,**C**] & **C**[**m**,**a**]
⇒ 𝔠[**n**,(**C** ι **m** **a**)] & ¬ ((**C** ι **m** **a**)^{I})[**a**]
,! 11 (()E: 10) ¡

𝔠[**n**,(**C** ι **m** **a**)] & ¬ ((**C** ι **m** **a**)^{I})[**a**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

C[**m**,**a**] & 𝔠[**n**,(**C** ι **m** **a**)] & ¬ ((**C** ι **m** **a**)^{I})[**a**]
,! 13 (&I: 8,12) ¡

(**C**[**m**,**a**] & 𝔠[**n**,(**C** ι **m** **a**)] & ¬ ((**C** ι **m** **a**)^{I})[**a**])
,! 14 (()I: 13) ¡

∃a (**C**[**m**,a] & 𝔠[**n**,(**C** ι **m** a)] & ¬ ((**C** ι **m** a)^{I})[a])
,! 15 (∃I: 14) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & 𝔠[**m**,**C**] & ¬ **m** = 0
⇒ ∃a (**C**[**m**,a] & 𝔠[**n**,(**C** ι **m** a)] & ¬ ((**C** ι **m** a)^{I})[a])
,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & 𝔠[**m**,**C**] & ¬ **m** = 0
⇒ ∃a (**C**[**m**,a] & 𝔠[**n**,(**C** ι **m** a)] & ¬ ((**C** ι **m** a)^{I})[a]))
,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m∀C (ω[n] & σ[n,m] & 𝔠[m,C] & ¬ m = 0
⇒ ∃a (C[m,a] & 𝔠[n,(C ι m a)] & ¬ ((C ι m a)^{I})[a]))
! 18 (∀I: 1,17) ¡

□

! **15.** As P15 is used in subsequent proofs, it is placed here, even though it does not directly have anything to do with counting.
¡

⊢ ∀n (ω[n] & ¬ n = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,n])) ¡

! We prove first:
∀n (ω[n] & ⇒ (¬ n = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,n])))

We use induction, taking ϕ to be

(¬ n = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,n]))

We must prove

(¬ 0 = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,0]))

and

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & (¬ n = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,n]))
⇒ (¬ m = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,m]))).

! To prove:
(¬ 0 = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,0]))

¬ 0 = 0 ,! 1 (Prem)

0 = 0 ,! 2 (=I)

¬ ∃p(ω[p] & σ[p,0]) ,! 3 (Prem)

ℱ ,! 4 (ℱI: 1,2)

¬ ∃p(ω[p] & σ[p,0]) ⇒ ℱ ,! 5 (⇒I: 3,4)

¬¬ ∃p(ω[p] & σ[p,0]) ,! 6 (¬I: 5)

∃p(ω[p] & σ[p,0]) ,! 7 (¬E: 6)

¬ 0 = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,0]) ,! 8 (⇒I: 1,7)

(¬ 0 = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,0])) ,! 9 (()I: 8)

! To prove:
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & (¬ n = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,n]))
⇒ (¬ m = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,m])))

n,**m** ,! 10 (Prem)

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & (¬ **n** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**n**]))
,! 11 (Prem)

¬ **m** = 0 ,! 12 (Prem)

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 13 (&E: 11)

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**]) ,! 14 (()I: 13)

∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) ,! 15 (∃I: 14)

¬ **m** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) ,! 16 (⇒I: 12,15)

(¬ **m** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**m**])) ,! 17 (()I: 16)

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & (¬ **n** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**n**]))
⇒ (¬ **m** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]))
,! 18 (⇒I: 11,17)

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & (¬ **n** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**n**]))
⇒ (¬ **m** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**m**])))
,! 19 (()I: 18) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & (¬ n = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,n]))
⇒ (¬ m = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,m])))
,! 20 (∀I: 10,19) ¡

∀n (ω[n] ⇒ (¬ n = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,n])))
,! 21 (Induct: 9,20) ¡

n ,! 22 (Prem) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ,! 23 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 24 (&E: 23) ¡

¬ **n** = 0 ,! 25 (&E: 23) ¡

(ω[**n**] ⇒ (¬ **n** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**n**])))
,! 26 (∀E: 21) ¡

ω[**n**] ⇒ (¬ **n** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**n**]))
,! 27 (()E: 26) ¡

(¬ **n** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**n**])) ,! 28 (⇒E: 24,27) ¡

¬ **n** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**n**]) ,! 29 (()E: 28) ¡

∃p(ω[p] & σ[p,**n**]) ,! 30 (⇒E: 25,29) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**n**]) ,! 31 (⇒I: 23,30) ¡

(ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**n**])) ,! 32 (()I: 31) ¡

∀n (ω[n] & ¬ n = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,n])), 33 (∀I: 22,32) ¡

□

! **16.** P16 is a very important lemma. ¡

⊢ ∀n∀C∀D∀a∀b (ω[n] & 𝔊[n,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ 𝔊[n,D]) ¡

! We prove first
∀n (ω[n]
⇒ (ω[n] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (𝔊[n,C] & D ≣ (C α a b)
⇒ 𝔊[n,D])))
by induction, taking ϕ to be
(ω[n] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (𝔊[n,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ 𝔊[n,D]))
We must prove
(ω[0] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (𝔊[0,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ 𝔊[0,D]))
and

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& (ω[n] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[n,C] & D ≣ (C α a b)
⇒ ℭ[n,D]))
⇒ (ω[m] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[m,C] & D ≣ (C α a b)
⇒ ℭ[m,D]))).

! To prove:
(ω[0] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[0,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ ℭ[0,D]))

ω[0] ,! 1 (Prem)

C,**D**,**a**,**b** ,! 2 (Prem)

ℭ[0,**C**] & **D** ≣ (**C** α **a** **b**) ,! 3 (Prem)

ℭ[0,**C**] ,! 4 (&E: 3)

D ≣ (**C** α **a** **b**) ,! 5 (&E: 3)

(ℭ[0,**C**] ⇒ **C** ≣ Φ) ,! 6 (∀E: P3)

ℭ[0,**C**] ⇒ **C** ≣ Φ ,! 7 (()E: 6)

C ≣ Φ ,! 8 (⇒E: 4,7)

(**C** ≣ Φ ⇒ (**C** α **a** **b**) ≣ (Φ α **a** **b**)) ,! 9 (∀E: III15.14)

C ≣ Φ ⇒ (**C** α **a** **b**) ≣ (Φ α **a** **b**) ,! 10 (()E: 9)

(**C** α **a** **b**) ≣ (Φ α **a** **b**) ,! 11 (⇒E: 8,10)

D ≣ (**C** α **a** **b**) & (**C** α **a** **b**) ≣ (Φ α **a** **b**)
,! 12 (&I: 5,11)

(Φ α **a** **b**) ≣ Φ ,! 13 (∀E: III15.30)

D ≣ (**C** α **a** **b**) & (**C** α **a** **b**) ≣ (Φ α **a** **b**) & (Φ α **a** **b**) ≣ Φ
,! 14 (&I: 12,13)

(**D** ≣ (**C** α **a** **b**) & (**C** α **a** **b**) ≣ (Φ α **a** **b**) & (Φ α **a** **b**) ≣ Φ
⇒ **D** ≣ Φ) ,! 15 (∀E: III1.19)

D ≣ (**C** α **a** **b**) & (**C** α **a** **b**) ≣ (Φ α **a** **b**) & (Φ α **a** **b**) ≣ Φ
⇒ **D** ≣ Φ
,! 16 (()E: 15)

D ≣ Φ ,! 17 (⇒E: 14,16)

(**D** ≣ Φ ⇒ ℭ[0,**D**]) ,! 18 (∀E: P4)

D ≣ Φ ⇒ ℭ[0,**D**] ,! 19 (()E: 18)

```
      𝕮[0,D]                                  ,! 20 (⇒E: 17,19)  ¡

    𝕮[0,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ 𝕮[0,D]           ,! 21 (⇒I: 3,20)   ¡

    ( 𝕮[0,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ 𝕮[0,D] )       ,! 22 (()I: 21)    ¡

  ∀C∀D∀a∀b ( 𝕮[0,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ 𝕮[0,D] )
                                              ,! 23 (∀I: 2,22)   ¡

ω[0] ⇒ ∀C∀D∀a∀b ( 𝕮[0,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ 𝕮[0,D] )
                                              ,! 24 (⇒I: 1,23)   ¡

( ω[0] ⇒ ∀C∀D∀a∀b ( 𝕮[0,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ 𝕮[0,D] ) )
                                              ,! 25 (()I: 24)    ¡

! To prove:
        ∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m]
        &  ( ω[n] ⇒ ∀C∀D∀a∀b ( 𝕮[n,C] & D ≣ (C α a b)
                              ⇒ 𝕮[n,D] ) )
        ⇒  ( ω[m] ⇒ ∀C∀D∀a∀b ( 𝕮[m,C] & D ≣ (C α a b)
                              ⇒ 𝕮[m,D] ) ) ).      ¡

  n,m                                         ,! 26 (Prem)       ¡

    ω[n] & σ[n,m]
    & ( ω[n] ⇒ ∀C∀D∀a∀b ( 𝕮[n,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ 𝕮[n,D] ) )
                                              ,! 27 (Prem)       ¡

    ω[n]                                      ,! 28 (&E: 27)     ¡

    ω[n] & σ[n,m]                             ,! 29 (&E: 27)     ¡

    ( ω[n] ⇒ ∀C∀D∀a∀b ( 𝕮[n,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ 𝕮[n,D] ) )
                                              ,! 30 (&E: 27)     ¡

    ω[n] ⇒ ∀C∀D∀a∀b ( 𝕮[n,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ 𝕮[n,D] )
                                              ,! 31 (()E: 30)    ¡

    ∀C∀D∀a∀b ( 𝕮[n,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ 𝕮[n,D] )
                                              ,! 32 (⇒E: 28,31)  ¡

      ω[m]                                    ,! 33 (Prem)       ¡

        C,D,a,b                               ,! 34 (Prem)       ¡

          𝕮[m,C] & D ≣ (C α a b)              ,! 35 (Prem)       ¡

          𝕮[m,C]                              ,! 36 (&E: 35)     ¡

          D ≣ (C α a b)                       ,! 37 (&E: 35)     ¡

          ( m = 0 ∨ ¬ m = 0 )                 ,! 38 (∀E: I3.4)   ¡
```

$\mathbf{m} = 0 \vee \neg\, \mathbf{m} = 0$,! 39 (()E: 38) ¡

$\mathbf{m} = 0$,! 40 (Prem) ¡

$\omega[0]$,! 41 (=E: 33,40) ¡

$\forall C \forall D \forall a \forall b\ (\ \mathfrak{C}[0,C]\ \&\ D \equiv (C\ \alpha\ a\ b) \Rightarrow \mathfrak{C}[0,D]\ )$
,! 42 (⇒E: 24,41) ¡

$(\ \mathfrak{C}[0,\mathbf{C}]\ \&\ \mathbf{D} \equiv (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}) \Rightarrow \mathfrak{C}[0,\mathbf{D}]\ )$
,! 43 (∀E: 42) ¡

$\mathfrak{C}[0,\mathbf{C}]\ \&\ \mathbf{D} \equiv (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})$,! 44 (=E: 35,40) ¡

$\mathfrak{C}[0,\mathbf{C}]\ \&\ \mathbf{D} \equiv (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}) \Rightarrow \mathfrak{C}[0,\mathbf{D}]$
,! 45 (()E: 43) ¡

$\mathfrak{C}[0,\mathbf{D}]$,! 46 (⇒E: 44,45) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{m},\mathbf{D}]$,! 47 (=E: 40,46) ¡

$\mathbf{m} = 0 \Rightarrow \mathfrak{C}[\mathbf{m},\mathbf{D}]$,! 48 (⇒I: 40,47) ¡

$\neg\, \mathbf{m} = 0$,! 49 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{m},\mathbf{C}]$,! 50 (&I: 29,36) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{m},\mathbf{C}]\ \&\ \neg\, \mathbf{m} = 0$
,! 51 (&I: 49,50) ¡

$(\ \omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{m},\mathbf{C}]\ \&\ \neg\, \mathbf{m} = 0$
$\quad \Rightarrow \exists a\ (\mathbf{C}[\mathbf{m},a]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},(\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ a)]$
$\qquad \&\ \neg\, ((\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ a)^{I})[a])\ )$
,! 52 (∀E: P14) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{m},\mathbf{C}]\ \&\ \neg\, \mathbf{m} = 0$
$\Rightarrow \exists a\ (\mathbf{C}[\mathbf{m},a]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},(\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ a)]\ \&\ \neg\, ((\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ a)^{I})[a])$
,! 53 (()E: 52) ¡

$\exists a\ (\mathbf{C}[\mathbf{m},a]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},(\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ a)]\ \&\ \neg\, ((\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ a)^{I})[a])$
,! 54 (⇒E: 51,53) ¡

$(\mathbf{C}[\mathbf{m},\mathbf{c}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},(\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ c)]\ \&\ \neg\, ((\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{c})^{I})[\mathbf{c}])$
,! 55 (∃E: 54) ¡

$\mathbf{C}[\mathbf{m},\mathbf{c}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},(\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ c)]\ \&\ \neg\, ((\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{c})^{I})[\mathbf{c}]$
,! 56 (()E: 55) ¡

$\mathbf{C}[\mathbf{m},\mathbf{c}]$,! 57 (&E: 56) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{n},(\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{c})]$,! 58 (&E: 56) ¡

¬ ((**C** ι **m** **c**)^{I})[**c**] ,! 59 (&E: 56) ¡

((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ≣ ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)
,! 60 (∀E: III1.7) ¡

𝔊[**n**,(**C** ι **m** **c**)]
& ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ≣ ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)
,! 61 (&I: 58,60) ¡

(ω[**n**] & 𝔊[**n**,(**C** ι **m** **c**)]
& ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ≣ ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)
⇒ 𝔊[**n**,((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)])
,! 62 (∀E: 32) ¡

𝔊[**n**,(**C** ι **m** **c**)]
& ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ≣ ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)
⇒ 𝔊[**n**,((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)]
,! 63 (()E: 62) ¡

𝔊[**n**,((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)] ,! 64 (⇒E: 61,63) ¡

! To show:
∃a (¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[a] & ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ a))
¡

(**c** = **a** ∨ ¬ **c** = **a**) ,! 65 (∀E: I3.4) ¡

c = **a** ∨ ¬ **c** = **a** ,! 66 (()E: 65) ¡

c = **a** ,! 67 (Prem) ¡

¬ ((**C** ι **m** **c**)^{I})[**a**] ,! 68 (=E: 59,67) ¡

(¬ ((**C** ι **m** **c**)^{I})[**a**] ⇒ ¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**b**])
,! 69 (∀E: III15.35)
¡

¬ ((**C** ι **m** **c**)^{I})[**a**] ⇒ ¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**b**]
,! 70 (()E: 69) ¡

¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**b**] ,! 71 (⇒E: 68,70) ¡

((**m** ▪ **a**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **b**) ,! 72 (∀E: III15.41)
¡

((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **b**) ,! 73 (=E: 67,72) ¡

¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**b**]
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **b**)
,! 74 (&I: 71,73) ¡

(¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**b**]

& ((**m** ▪ **c**) α **a b**) ≣ (**m** ▪ **b**))
,! 75 (()I: 74) ¡

∃a (¬ (((**C** ι **m c**) α **a b**)^{I})[a]
& ((**m** ▪ **c**) α **a b**) ≣ (**m** ▪ a))
,! 76 (∃I: 75) ¡

c = **a**
⇒ ∃a (¬ (((**C** ι **m c**) α **a b**)^{I})[a]
& ((**m** ▪ **c**) α **a b**) ≣ (**m** ▪ a))
,! 77 (⇒I: 67,76) ¡

¬ **c** = **a** ,! 78 (Prem) ¡

(**c** = **b** ∨ ¬ **c** = **b**) ,! 79 (∀E: I3.4) ¡

c = **b** ∨ ¬ **c** = **b** ,! 80 (()E: 79) ¡

c = **b** ,! 81 (Prem) ¡

¬ ((**C** ι **m c**)^{I})[**b**] ,! 82 (=E: 59,81) ¡

(¬ ((**C** ι **m c**)^{I})[**b**]
⇒ ¬ (((**C** ι **m c**) α **a b**)^{I})[**a**])
,! 83 (∀E: III15.36)
¡

¬ ((**C** ι **m c**)^{I})[**b**] ⇒ ¬ (((**C** ι **m c**) α **a b**)^{I})[**a**]
,! 84 (()E: 83) ¡

¬ (((**C** ι **m c**) α **a b**)^{I})[**a**] ,! 85 (⇒E: 82,84) ¡

((**m** ▪ **b**) α **a b**) ≣ (**m** ▪ **a**) ,! 86 (∀E: III15.40)
¡

((**m** ▪ **c**) α **a b**) ≣ (**m** ▪ **a**) ,! 87 (=E: 81,86) ¡

¬ (((**C** ι **m c**) α **a b**)^{I})[**a**]
& ((**m** ▪ **c**) α **a b**) ≣ (**m** ▪ **a**)
,! 88 (&I: 85,87) ¡

(¬ (((**C** ι **m c**) α **a b**)^{I})[**a**]
& ((**m** ▪ **c**) α **a b**) ≣ (**m** ▪ **a**))
,! 89 (()I: 88) ¡

∃a (¬ (((**C** ι **m c**) α **a b**)^{I})[a]
& ((**m** ▪ **c**) α **a b**) ≣ (**m** ▪ a))
,! 90 (∃I: 89) ¡

c = **b**
⇒ ∃a (¬ (((**C** ι **m c**) α **a b**)^{I})[a]
& ((**m** ▪ **c**) α **a b**) ≣ (**m** ▪ a))

,! 91 (⇒I: 81,90) ¡

¬ **c** = **b** ,! 92 (Prem) ¡

¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** ,! 93 (&I: 78,92) ¡

¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** & ¬ ((**C** ι **m** **c**)^{I})[**c**]
,! 94 (&I: 59,93) ¡

(¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** & ¬ ((**C** ι **m** **c**)^{I})[**c**]
⇒ ¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**c**])
,! 95 (∀E: III15.34)
¡

¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** & ¬ ((**C** ι **m** **c**)^{I})[**c**]
⇒ ¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**c**]
,! 96 ()E: 95) ¡

¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**c**] ,! 97 (⇒E: 94,96) ¡

(¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b**
⇒ ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **c**))
,! 98 (∀E: III15.43)
¡

¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** ⇒ ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **c**)
,! 99 ()E: 98) ¡

((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **c**),! 100 (⇒E: 93,99) ¡

¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**c**]
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **c**)
,! 101 (&I: 97,100) ¡

(¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**c**]
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **c**))
,! 102 ()I: 101) ¡

∃a (¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[a]
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ a))
,! 103 (∃I: 102) ¡

¬ **c** = **b**
⇒ ∃a (¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[a]
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ a))
,! 104 (⇒I: 92,103)
¡

∃a (¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[a]
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ a))
,! 105 (∨E: 80,91,
104) ¡

¬ **c** = **a**
⇒ ∃a (¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[a]
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ a))
,! 106 (⇒I: 78,105) ¡

∃a (¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[a]
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ a))
,! 107 (∨E: 66,77, 106) ¡

(¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**x**]
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **x**))
,! 108 (∃E: 107) ¡

¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**x**]
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **x**)
,! 109 ()E: 108) ¡

¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**x**] ,! 110 (&E: 109) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**x**]
,! 111 (&I: 29,110) ¡

(**C**[**m**,**c**] ⇒ **C** ≣ ((**C** ι **m** **c**) ⊔ (**m** ▪ **c**)))
,! 112 (∀E: III14.12) ¡

C[**m**,**c**] ⇒ **C** ≣ ((**C** ι **m** **c**) ⊔ (**m** ▪ **c**))
,! 113 ()E: 112) ¡

C ≣ ((**C** ι **m** **c**) ⊔ (**m** ▪ **c**)) ,! 114 (⇒E: 57,113) ¡

C ≣ ((**C** ι **m** **c**) ⊔ (**m** ▪ **c**))
& ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ≣ ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)
,! 115 (&I: 60,114) ¡

((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **x**) ,! 116 (&E: 108) ¡

C ≣ ((**C** ι **m** **c**) ⊔ (**m** ▪ **c**))
& ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ≣ ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **x**)
,! 117 (&I: 115,116) ¡

(**C** ≣ ((**C** ι **m** **c**) ⊔ (**m** ▪ **c**))
& ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ≣ ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **x**)
⇒ (**C** α **a** **b**) ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**)))
,! 118 (∀E: III15.29) ¡

C ≣ ((**C** ι **m** **c**) ⊔ (**m** ▪ **c**))
& ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ≣ ((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)
& ((**m** ▪ **c**) α **a** **b**) ≣ (**m** ▪ **x**)
⇒ (**C** α **a** **b**) ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**))
,! 119 (()E: 118) ¡

(**C** α **a** **b**) ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**))
,! 120 (⇒E: 117,119)
¡

D ≣ (**C** α **a** **b**)
& (**C** α **a** **b**) ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**))
,! 121 (&I: 37,120) ¡

(**D** ≣ (**C** α **a** **b**)
& (**C** α **a** **b**) ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**))
⇒ **D** ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**)))
,! 122 (∀E: III1.15)
¡

D ≣ (**C** α **a** **b**)
& (**C** α **a** **b**) ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**))
⇒ **D** ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**))
,! 123 (()E: 122) ¡

D ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**))
,! 124 (⇒E: 121,123)
¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**x**]
& **D** ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**))
,! 125 (&I: 111,124)
¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**x**]
& **D** ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**))
& ℭ[**n**,((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)]
,! 126 (&I: 64,125) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**x**]
& **D** ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**))
& ℭ[**n**,((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)]
⇒ ℭ[**m**,**D**])
,! 127 (∀E: P10) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)^{I})[**x**]
& **D** ≣ (((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**) ⊔ (**m** ▪ **x**))
& ℭ[**n**,((**C** ι **m** **c**) α **a** **b**)]
⇒ ℭ[**m**,**D**]
,! 128 (()E: 127) ¡

ℭ[**m**,**D**] ,! 129 (⇒E: 126,128)
¡

¬ **m** = 0 ⇒ ℭ[**m**,**D**] ,! 130 (⇒I: 49,129)
¡

ℭ[**m**,**D**] ,! 131 (∨E: 39,48, 130)
¡

ℭ[**m**,**C**] & **D** ≣ (**C** α **a b**) ⇒ ℭ[**m**,**D**] ,! 132 (⇒I: 35,131)
¡

(ℭ[**m**,**C**] & **D** ≣ (**C** α **a b**) ⇒ ℭ[**m**,**D**])
,! 133 (()I: 132)
¡

∀C∀D∀a∀b (ℭ[**m**,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ ℭ[**m**,D])
,! 134 (∀I: 34,133)
¡

ω[**m**] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[**m**,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ ℭ[**m**,D])
,! 135 (⇒I: 33,134)
¡

(ω[**m**] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[**m**,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ ℭ[**m**,D]))
,! 136 (()I: 135)
¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& (ω[**n**] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[**n**,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ ℭ[**n**,D]))
⇒ (ω[**m**] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[**m**,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ ℭ[**m**,D]))
,! 137 (⇒I: 27,136)
¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& (ω[**n**] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[**n**,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ ℭ[**n**,D]))
⇒ (ω[**m**] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[**m**,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ ℭ[**m**,D])))
,! 138 (()I: 137)
¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& (ω[n] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[n,C] & D ≣ (C α a b)
⇒ ℭ[n,D]))
⇒ (ω[m] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[m,C] & D ≣ (C α a b)
⇒ ℭ[m,D])))
,! 139 (∀I: 26,138)
¡

∀n (ω[n] ⇒ (ω[n] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[n,C] & D ≣ (C α a b)
⇒ ℭ[n,D])))
,! 140 (Induct: 25,139)
¡

n,**C**,**D**,**a**,**b** ,! 141 (Prem)
¡

ω[**n**] & ℭ[**n**,**C**] & **D** ≣ (**C** α **a b**) ,! 142 (Prem)
¡

ω[**n**] ,! 143 (&E: 142) ¡

ℭ[**n**,**C**] & **D** ≣ (**C** α **a** **b**) ,! 144 (&E: 142) ¡

(ω[**n**] ⇒ (ω[**n**] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[**n**,C] & D ≣ (C α a b)
⇒ ℭ[**n**,D])))
,! 145 (∀E: 140) ¡

ω[**n**] ⇒ (ω[**n**] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[**n**,C] & D ≣ (C α a b)
⇒ ℭ[**n**,D]))
,! 146 (()E: 145) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[**n**,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ ℭ[**n**,D]))
,! 147 (⇒E: 143,146)
¡

ω[**n**] ⇒ ∀C∀D∀a∀b (ℭ[**n**,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ ℭ[**n**,D])
,! 148 (()E: 147) ¡

∀C∀D∀a∀b (ℭ[**n**,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ ℭ[**n**,D])
,! 149 (⇒E: 143,148)
¡

(ℭ[**n**,**C**] & **D** ≣ (**C** α **a** **b**) ⇒ ℭ[**n**,**D**]) ,! 150 (∀E: 149) ¡

ℭ[**n**,**C**] & **D** ≣ (**C** α **a** **b**) ⇒ ℭ[**n**,**D**] ,! 151 (()E: 150) ¡

ℭ[**n**,**D**] ,! 152 (⇒E: 144,151)
¡

ω[**n**] & ℭ[**n**,**C**] & **D** ≣ (**C** α **a** **b**) ⇒ ℭ[**n**,**D**]
,! 153 (⇒I: 142,152)
¡

(ω[**n**] & ℭ[**n**,**C**] & **D** ≣ (**C** α **a** **b**) ⇒ ℭ[**n**,**D**])
,! 154 (()I: 153) ¡

∀n∀C∀D∀a∀b (ω[n] & ℭ[n,C] & D ≣ (C α a b) ⇒ ℭ[n,D])
! 155 (∀I: 141,154)
¡

□

! **17.** Equivalent predicates count with the same numbers. ¡

⊢ ∀n∀C∀D (ω[n] & ℭ[n,C] & C ≣ D ⇒ ℭ[n,D]) ¡

n,**C**,**D** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℭ[**n**,**C**] & **C** ≣ **D** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℭ[**n**,**C**] ,! 3 (&E: 2) ¡

C ≣ **D** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**C** α **n n**) ≣ **C** ,! 5 (∀E: III15.25) ¡

(**C** α **n n**) ≣ **C** & **C** ≣ **D** ,! 6 (&I: 4,5) ¡

((**C** α **n n**) ≣ **C** & **C** ≣ **D** ⇒ **D** ≣ (**C** α **n n**))
,! 7 (∀E: III1.16) ¡

(**C** α **n n**) ≣ **C** & **C** ≣ **D** ⇒ **D** ≣ (**C** α **n n**)
,! 8 (()E: 7) ¡

D ≣ (**C** α **n n**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[**n**] & ℂ[**n**,**C**] & **D** ≣ (**C** α **n n**) ,! 10 (&E: 3,9) ¡

(ω[**n**] & ℂ[**n**,**C**] & **D** ≣ (**C** α **n n**) ⇒ ℂ[**n**,**D**])
,! 11 (∀E: P16)
¡

ω[**n**] & ℂ[**n**,**C**] & **D** ≣ (**C** α **n n**) ⇒ ℂ[**n**,**D**]
,! 12 (()E: 11) ¡

ℂ[**n**,**D**] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

ω[**n**] & ℂ[**n**,**C**] & **C** ≣ **D** ⇒ ℂ[**n**,**D**] ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(ω[**n**] & ℂ[**n**,**C**] & **C** ≣ **D** ⇒ ℂ[**n**,**D**]) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀C∀D (ω[n] & ℂ[n,C] & C ≣ D ⇒ ℂ[n,D])
! 16 (∀I: 1,15) ¡

□

! Reformulation of CountExist. It appears here, since an appeal to P17 is necessary. ¡

! **18.** ¡

⊢ ∀n∀C∀a (ω[n] & ℂ[n,C] & ¬ ∃x C[x,a]
⇒ ∃m (ω[m] & ℂ[m,(C ⊔ (m ▪ a))])) ¡

n,**C**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ℂ[**n**,**C**] & ¬ ∃x **C**[x,**a**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ℂ[**n**,**C**] & ¬ ∃x **C**[x,**a**]
⇒ ∃m (ω[m] & ℂ[m,{x,y : **C**[x,y] ∨ (x = **m** & y = **a**)}]))
,! 3 (∀E: CountExist)
¡

ω[**n**] & ℂ[**n**,**C**] & ¬ ∃x **C**[x,**a**]
⇒ ∃m (ω[m] & ℂ[m,{x,y : **C**[x,y] ∨ (x = **m** & y = **a**)}])
,! 4 (()E: 3) ¡

$\exists m\ (\ \omega[m]\ \&\ \mathfrak{C}[m,\{x,y : \mathbf{C}[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{a})\}]\ )$
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\ \omega[\mathbf{m}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{m},\{x,y : \mathbf{C}[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{a})\}]\ )$
,! 6 (∃E: 5) ¡

$\omega[\mathbf{m}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{m},\{x,y : \mathbf{C}[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{a})\}]$
,! 7 (()E: 6) ¡

$\{x,y : \mathbf{C}[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{a})\} \equiv (\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))$
,! 8 (∀E: III12.16) ¡

$\omega[\mathbf{m}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{m},\{x,y : \mathbf{C}[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{a})\}]$
$\&\ \{x,y : \mathbf{C}[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{a})\} \equiv (\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))$
,! 9 (&I: 7,8) ¡

$(\ \omega[\mathbf{m}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{m},\{x,y : \mathbf{C}[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{a})\}]$
$\quad \&\ \{x,y : \mathbf{C}[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{a})\} \equiv (\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))$
$\quad \Rightarrow \mathfrak{C}[\mathbf{m},(\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))]\ )$
,! 10 (∀E: P17) ¡

$\omega[\mathbf{m}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{m},\{x,y : \mathbf{C}[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{a})\}]$
$\&\ \{x,y : \mathbf{C}[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{a})\} \equiv (\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))$
$\Rightarrow \mathfrak{C}[\mathbf{m},(\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))]$
,! 11 (()E: 10) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{m},(\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))]$,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

$\omega[\mathbf{m}]$,! 13 (&E: 7) ¡

$\omega[\mathbf{m}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{m},(\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))]$,! 14 (&I: 12,13) ¡

$(\ \omega[\mathbf{m}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{m},(\mathbf{C} \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{a}))]\ )$,! 15 (()I: 14) ¡

$\exists m\ (\ \omega[m]\ \&\ \mathfrak{C}[m,(\mathbf{C} \sqcup (m \blacksquare \mathbf{a}))]\ )$,! 16 (∃I: 15) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}]\ \&\ \neg\ \exists x\ \mathbf{C}[x,\mathbf{a}]$
$\Rightarrow \exists m\ (\ \omega[m]\ \&\ \mathfrak{C}[m,(\mathbf{C} \sqcup (m \blacksquare \mathbf{a}))]\ )$
,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

$(\ \omega[\mathbf{n}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}]\ \&\ \neg\ \exists x\ \mathbf{C}[x,\mathbf{a}]$
$\quad \Rightarrow \exists m\ (\ \omega[m]\ \&\ \mathfrak{C}[m,(\mathbf{C} \sqcup (m \blacksquare \mathbf{a}))]\ )\ )$
,! 18 (()I: 17) ¡

$\forall n \forall C \forall a\ (\ \omega[n]\ \&\ \mathfrak{C}[n,C]\ \&\ \neg\ \exists x\ C[x,a]$
$\qquad \Rightarrow \exists m\ (\ \omega[m]\ \&\ \mathfrak{C}[m,(C \sqcup (m \blacksquare a))]\ )\ )$
! 19 (∀I: 1,18) ¡

□

! **19. The Theorem of Unique Counting.** ¡

⊢ ∀n∀k∀C∀D (ω[n] & ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[n,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I) ⇒ n = k) ¡

! We prove first
∀n (ω[n]
⇒ (ω[n] ⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[n,C]
& ℭ[k,D] & (C^I) ≡ (D^I)
⇒ n = k)))
by induction, taking ϕ to be
(ω[n]
⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[n,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I) ⇒ n = k))
We must prove
(ω[0]
⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[0,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I) ⇒ 0 = k))
and
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& (ω[n]
⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[n,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I) ⇒ n = k))
⇒ (ω[m]
⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[m,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I) ⇒ m = k))) ¡

! To prove:
(ω[0]
⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[0,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I) ⇒ 0 = k)) ¡

ω[0] ,! 1 (Prem) ¡

k,**C**,**D** ,! 2 (Prem) ¡

∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & ℭ[0,**C**] & ℭ[**k**,**D**] & ($\mathbf{C}^I$) ≡ ($\mathbf{D}^I$)
,! 3 (Prem) ¡

ℭ[0,**C**] ,! 4 (&E: 3) ¡

ℭ[**k**,**D**] ,! 5 (&E: 3) ¡

($\mathbf{C}^I$) ≡ ($\mathbf{D}^I$) ,! 6 (&E: 3) ¡

(($\mathbf{C}^I$) ≡ ($\mathbf{D}^I$) ⇒ ($\mathbf{D}^I$) ≡ ($\mathbf{C}^I$)) ,! 7 (∀E: II1.10) ¡

($\mathbf{C}^I$) ≡ ($\mathbf{D}^I$) ⇒ ($\mathbf{D}^I$) ≡ ($\mathbf{C}^I$) ,! 8 (()E: 7) ¡

($\mathbf{D}^I$) ≡ ($\mathbf{C}^I$) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

```
      ℭ[k,D] & ℭ[0,C]                          ,! 10 (&I: 4,5)     ¡

      ℭ[k,D] & ℭ[0,C] & (D^I) ≡ (C^I)          ,! 11 (&I: 9,10)    ¡

      ( ℭ[k,D] & ℭ[0,C] & (D^I) ≡ (C^I) ⇒ k = 0 )
                                               ,! 12 (∀E: P8)      ¡

      ℭ[k,D] & ℭ[0,C] & (D^I) ≡ (C^I) ⇒ k = 0
                                               ,! 13 (()E: 12)     ¡

      k = 0                                    ,! 14 (⇒E: 11,13)   ¡

      k = k                                    ,! 15 (=I)          ¡

      0 = k                                    ,! 16 (=E: 14,15)   ¡

    ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[0,C] & ℭ[k,D] & (C^I) ≡ (D^I) ⇒ 0 = k
                                               ,! 17 (⇒I: 3,16)    ¡

    ( ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[0,C] & ℭ[k,D] & (C^I) ≡ (D^I)
      ⇒ 0 = k )
                                               ,! 18 (()I: 17)     ¡

  ∀k∀C∀D ( ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[0,C] & ℭ[k,D] & (C^I) ≡ (D^I)
           ⇒ 0 = k)
                                               ,! 19 (∀I: 2,18)    ¡

ω[0]
⇒ ∀k∀C∀D ( ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[0,C] & ℭ[k,D] & (C^I) ≡ (D^I)
            ⇒ 0 = k)
                                               ,! 20 (⇒I: 1,19)    ¡

( ω[0]
  ⇒ ∀k∀C∀D ( ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[0,C] & ℭ[k,D] & (C^I) ≡ (D^I)
              ⇒ 0 = k) )
                                               ,! 21 (()I: 20)     ¡

! To prove:
   ∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m]
          & ( ω[n]
              ⇒ ∀k∀C∀D ( ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[n,C] & ℭ[k,D]
                         & (C^I) ≡ (D^I) ⇒ n = k ) )
          ⇒ ( ω[m]
               ⇒ ∀k∀C∀D ( ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[m,C] & ℭ[k,D]
                          & (C^I) ≡ (D^I) ⇒ m = k ) ) )     ¡

  n,m                                          ,! 22 (Prem)        ¡

    ω[n] & σ[n,m]
    & ( ω[n]
        ⇒ ∀k∀C∀D ( ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[n,C] & ℭ[k,D]
```

& $(C^{\mathbf{I}}) \equiv (D^{\mathbf{I}}) \Rightarrow \mathbf{n} = k$))
,! 23 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{n}]$
,! 24 (&E: 23) ¡

$\omega[\mathbf{n}] \;\&\; \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]$
,! 25 (&E: 23) ¡

($\omega[\mathbf{n}]$
$\Rightarrow \forall k \forall C \forall D$ ($\exists p(\omega[p] \;\&\; \sigma[p,k]) \;\&\; \mathfrak{C}[\mathbf{n},C] \;\&\; \mathfrak{C}[k,D]$
& $(C^{\mathbf{I}}) \equiv (D^{\mathbf{I}}) \Rightarrow \mathbf{n} = k$))
,! 26 (&E: 23) ¡

$\omega[\mathbf{n}]$
$\Rightarrow \forall k \forall C \forall D$ ($\exists p(\omega[p] \;\&\; \sigma[p,k]) \;\&\; \mathfrak{C}[\mathbf{n},C] \;\&\; \mathfrak{C}[k,D]$
& $(C^{\mathbf{I}}) \equiv (D^{\mathbf{I}}) \Rightarrow \mathbf{n} = k$)
,! 27 (()E: 26) ¡

$\forall k \forall C \forall D$ ($\exists p(\omega[p] \;\&\; \sigma[p,k]) \;\&\; \mathfrak{C}[\mathbf{n},C] \;\&\; \mathfrak{C}[k,D] \;\&\; (C^{\mathbf{I}}) \equiv (D^{\mathbf{I}})$
$\Rightarrow \mathbf{n} = k$)
,! 28 (⇒E: 24,27) ¡

$\omega[\mathbf{m}]$
,! 29 (Prem) ¡

$\mathbf{k},\mathbf{C},\mathbf{D}$
,! 30 (Prem) ¡

$\exists p(\omega[p] \;\&\; \sigma[p,\mathbf{k}]) \;\&\; \mathfrak{C}[\mathbf{m},\mathbf{C}] \;\&\; \mathfrak{C}[\mathbf{k},\mathbf{D}] \;\&\; (\mathbf{C}^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathbf{I}})$
,! 31 (Prem) ¡

$\exists p(\omega[p] \;\&\; \sigma[p,\mathbf{k}])$
,! 32 (&E: 31) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{m},\mathbf{C}]$
,! 33 (&E: 31) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{k},\mathbf{D}]$
,! 34 (&E: 31) ¡

$(\mathbf{C}^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathbf{I}})$
,! 35 (&E: 31) ¡

$(\omega[\mathbf{p}] \;\&\; \sigma[\mathbf{p},\mathbf{k}])$
,! 36 (∃E: 32) ¡

$\omega[\mathbf{p}] \;\&\; \sigma[\mathbf{p},\mathbf{k}]$
,! 37 (()E: 36) ¡

($(\mathbf{C}^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathbf{I}}) \Rightarrow (\mathbf{D}^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{C}^{\mathbf{I}})$)
,! 38 (∀E: II1.10) ¡

$(\mathbf{C}^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathbf{I}}) \Rightarrow (\mathbf{D}^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{C}^{\mathbf{I}})$
,! 39 (()E: 38) ¡

$(\mathbf{D}^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{C}^{\mathbf{I}})$
,! 40 (⇒E: 35,39) ¡

($\mathbf{k} = 0 \vee \neg\, \mathbf{k} = 0$)
,! 41 (∀E: I3.4) ¡

$\mathbf{k} = 0 \vee \neg\, \mathbf{k} = 0$
,! 42 (()E: 41) ¡

$\mathbf{k} = 0$
,! 43 (Prem) ¡

$\mathfrak{C}[0,\mathbf{D}]$
,! 44 (=E: 34,43) ¡

```
                ℂ[m,C] & ℂ[0,D]                  ,! 45 (&I: 33,44)   ¡

                ℂ[m,C] & ℂ[0,D] & (C^I) ≡ (D^I)
                                                 ,! 46 (&I: 35,45)   ¡

                ( ℂ[m,C] & ℂ[0,D] & (C^I) ≡ (D^I) ⇒ m = 0 )
                                                 ,! 47 (∀E: P8)      ¡

                ℂ[m,C] & ℂ[0,D] & (C^I) ≡ (D^I) ⇒ m = 0
                                                 ,! 48 (()E: 47)     ¡

                m = 0                            ,! 49 (⇒E: 46,48)   ¡

                m = k                            ,! 50 (=E: 43,49)   ¡

              k = 0 ⇒ m = k                      ,! 51 (⇒I: 43,50)   ¡

                ¬ k = 0                          ,! 52 (Prem)        ¡

! Our aim is to show that n = p, by using the induction hypothesis.
                                                                     ¡

                  m = 0                          ,! 53 (Prem)        ¡

                  ℂ[0,C]                         ,! 54 (=E: 33,53)   ¡

                  ℂ[k,D] & ℂ[0,C]                ,! 55 (&I: 34,54)   ¡

                  ℂ[k,D] & ℂ[0,C] & (D^I) ≡ (C^I)
                                                 ,! 56 (&I: 40,55)   ¡

                  ( ℂ[k,D] & ℂ[0,C] & (D^I) ≡ (C^I) ⇒ k = 0 )
                                                 ,! 57 (∀E: P8)      ¡

                  ℂ[k,D] & ℂ[0,C] & (D^I) ≡ (C^I) ⇒ k = 0
                                                 ,! 58 (()E: 57)     ¡

                  k = 0                          ,! 59 (⇒E: 56,58)   ¡

                  ℱ                              ,! 60 (ℱI: 52,59)   ¡

                m = 0 ⇒ ℱ                        ,! 61 (⇒I: 53,60)   ¡

                ¬ m = 0                          ,! 62 (¬I: 61)      ¡

                ℂ[m,C] & ¬ m = 0                 ,! 63 (&I: 33,62)   ¡

                ( ℂ[m,C] & ¬ m = 0 ⇒ ∃a C[m,a] )
                                                 ,! 64 (∀E: Count1a) ¡

                ℂ[m,C] & ¬ m = 0 ⇒ ∃a C[m,a]     ,! 65 (()E: 64)     ¡

                ∃a C[m,a]                        ,! 66 (⇒E: 63,65)   ¡
```

C[**m**,**c**] ,! 67 (∃E: 66) ¡

ℭ[**k**,**D**] & ¬ **k** = 0 ,! 68 (&I: 34,52) ¡

! Instead of Count1a and a subsequent appeal to P12 on line 89, P14 could have been used. ¡

(ℭ[**k**,**D**] & ¬ **k** = 0 ⇒ ∃a **D**[**k**,a])
,! 69 (∀E: Count1a) ¡

ℭ[**k**,**D**] & ¬ **k** = 0 ⇒ ∃a **D**[**k**,a] ,! 70 (()E: 69) ¡

∃a **D**[**k**,a] ,! 71 (⇒E: 68,70) ¡

D[**k**,**d**] ,! 72 (∃E: 71) ¡

ω[**m**] & ℭ[**m**,**C**] ,! 73 (&I: 29,33) ¡

(**C** α **c** **d**) ≣ (**C** α **c** **d**) ,! 74 (∀E: III1.7) ¡

ω[**m**] & ℭ[**m**,**C**] & (**C** α **c** **d**) ≣ (**C** α **c** **d**)
,! 75 (&I: 73,74) ¡

(ω[**m**] & ℭ[**m**,**C**] & (**C** α **c** **d**) ≣ (**C** α **c** **d**)
⇒ ℭ[**m**,(**C** α **c** **d**)])
,! 76 (∀E: P16) ¡

ω[**m**] & ℭ[**m**,**C**] & (**C** α **c** **d**) ≣ (**C** α **c** **d**)
⇒ ℭ[**m**,(**C** α **c** **d**)]
,! 77 (()E: 76) ¡

ℭ[**m**,(**C** α **c** **d**)] ,! 78 (⇒E: 75,77) ¡

! To show: ℭ[**n**,((**C** α **c** **d**) ι **m** **d**)]. ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,(**C** α **c** **d**)]
,! 79 (&I: 25,78) ¡

(**C**[**m**,**c**] ⇒ (**C** α **c** **d**)[**m**,**d**]) ,! 80 (∀E: III15.8) ¡

C[**m**,**c**] ⇒ (**C** α **c** **d**)[**m**,**d**] ,! 81 (()E: 80) ¡

(**C** α **c** **d**)[**m**,**d**] ,! 82 (⇒E: 67,81) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,(**C** α **c** **d**)] & (**C** α **c** **d**)[**m**,**d**]
,! 83 (&I: 79,82) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,(**C** α **c** **d**)] & (**C** α **c** **d**)[**m**,**d**]
⇒ ℭ[**n**,((**C** α **c** **d**) ι **m** **d**)])
,! 84 (∀E: P13) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,(**C** α **c** **d**)] & (**C** α **c** **d**)[**m**,**d**]
⇒ ℭ[**n**,((**C** α **c** **d**) ι **m** **d**)]

,! 85 (()E: 84) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{n},((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{d})]$,! 86 (⇒E: 83,85) ¡

! To show: $\mathfrak{C}[\mathbf{p},(\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})]$ ¡

$\omega[\mathbf{p}]\ \&\ \sigma[\mathbf{p},\mathbf{k}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{k},\mathbf{D}]$,! 87 (&I: 34,37) ¡

$\omega[\mathbf{p}]\ \&\ \sigma[\mathbf{p},\mathbf{k}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{k},\mathbf{D}]\ \&\ \mathbf{D}[\mathbf{k},\mathbf{d}]$
,! 88 (&I: 72,87) ¡

$(\ \omega[\mathbf{p}]\ \&\ \sigma[\mathbf{p},\mathbf{k}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{k},\mathbf{D}]\ \&\ \mathbf{D}[\mathbf{k},\mathbf{d}]$
$\Rightarrow\ \mathfrak{C}[\mathbf{p},(\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})]\ \&\ \neg\ ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})^{\mathbf{I}})[\mathbf{d}]\ )$
,! 89 (∀E: P12) ¡

$\omega[\mathbf{p}]\ \&\ \sigma[\mathbf{p},\mathbf{k}]\ \&\ \mathfrak{C}[\mathbf{k},\mathbf{D}]\ \&\ \mathbf{D}[\mathbf{k},\mathbf{d}]$
$\Rightarrow\ \mathfrak{C}[\mathbf{p},(\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})]\ \&\ \neg\ ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})^{\mathbf{I}})[\mathbf{d}]$
,! 90 (()E: 89) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{p},(\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})]\ \&\ \neg\ ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})^{\mathbf{I}})[\mathbf{d}]$
,! 91 (⇒E: 88,90) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{p},(\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})]$,! 92 (&E: 91) ¡

! To show: $((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathbf{I}})$ ¡

$(\ \mathbf{D}[\mathbf{k},\mathbf{d}] \Rightarrow (\mathbf{D}^{\mathbf{I}})[\mathbf{d}]\ )$,! 93 (∀E: III6.5) ¡

$\mathbf{D}[\mathbf{k},\mathbf{d}] \Rightarrow (\mathbf{D}^{\mathbf{I}})[\mathbf{d}]$,! 94 (()E: 93) ¡

$(\mathbf{D}^{\mathbf{I}})[\mathbf{d}]$,! 95 (⇒E: 72,94) ¡

$(\mathbf{D}^{\mathbf{I}})[\mathbf{d}]\ \&\ (\mathbf{C}^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathbf{I}})$,! 96 (&I: 35,95) ¡

$(\ (\mathbf{D}^{\mathbf{I}})[\mathbf{d}]\ \&\ (\mathbf{C}^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathbf{I}}) \Rightarrow \exists x\ \mathbf{C}[x,\mathbf{d}]\ )$
,! 97 (∀E: III6.11) ¡

$(\mathbf{D}^{\mathbf{I}})[\mathbf{d}]\ \&\ (\mathbf{C}^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathbf{I}}) \Rightarrow \exists x\ \mathbf{C}[x,\mathbf{d}]$
,! 98 (()E: 97) ¡

$\exists x\ \mathbf{C}[x,\mathbf{d}]$,! 99 (⇒E: 96,98) ¡

$\mathbf{C}[\mathbf{x},\mathbf{d}]$,! 100 (∃E: 99) ¡

$\mathbf{C}[\mathbf{m},\mathbf{c}]\ \&\ \mathbf{C}[\mathbf{x},\mathbf{d}]$,! 101 (&I: 67,100) ¡

$(\ \mathbf{C}[\mathbf{m},\mathbf{c}]\ \&\ \mathbf{C}[\mathbf{x},\mathbf{d}] \Rightarrow ((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{C}^{\mathbf{I}})\ )$
,! 102 (∀E: III15.37)
¡

$\mathbf{C}[\mathbf{m},\mathbf{c}]\ \&\ \mathbf{C}[\mathbf{x},\mathbf{d}] \Rightarrow ((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})^{\mathbf{I}}) \equiv (\mathbf{C}^{\mathbf{I}})$
,! 103 (()E: 102) ¡

$((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}}) \equiv (\mathbf{C}^{\mathrm{I}})$,! 104 (⇒E: 101,103) ¡

$((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}}) \equiv (\mathbf{C}^{\mathrm{I}})\ \&\ (\mathbf{C}^{\mathrm{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathrm{I}})$,! 105 (&I: 35,104) ¡

$(\ ((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}}) \equiv (\mathbf{C}^{\mathrm{I}})\ \&\ (\mathbf{C}^{\mathrm{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathrm{I}})$
$\Rightarrow ((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathrm{I}})\ )$,! 106 (∀E: II1.15) ¡

$((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}}) \equiv (\mathbf{C}^{\mathrm{I}})\ \&\ (\mathbf{C}^{\mathrm{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathrm{I}})$
$\Rightarrow ((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathrm{I}})$,! 107 ()E: 106) ¡

$((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathrm{I}})$,! 108 (⇒E: 105,107) ¡

! To show: $(((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}}) \equiv ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}})$ ¡

$(\ \mathfrak{C}[\mathbf{m},(\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})] \Rightarrow \mathbf{1}\ (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})\ )$,! 109 (∀E: P1) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{m},(\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})] \Rightarrow \mathbf{1}\ (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})$,! 110 ()E: 109) ¡

$\mathbf{1}\ (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})$,! 111 (⇒E: 78,110) ¡

$(\ \mathfrak{C}[\mathbf{k},\mathbf{D}] \Rightarrow \mathbf{1}\ \mathbf{D}\ )$,! 112 (∀E: P1) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{k},\mathbf{D}] \Rightarrow \mathbf{1}\ \mathbf{D}$,! 113 ()E: 112) ¡

$\mathbf{1}\ \mathbf{D}$,! 114 (⇒E: 34,113) ¡

$\mathbf{1}\ (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})\ \&\ \mathbf{1}\ \mathbf{D}$,! 115 (&I: 111,114) ¡

$\mathbf{1}\ (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})\ \&\ \mathbf{1}\ \mathbf{D}\ \&\ (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})[\mathbf{m},\mathbf{d}]$,! 116 (&I: 82,115) ¡

$\mathbf{1}\ (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})\ \&\ \mathbf{1}\ \mathbf{D}\ \&\ (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})[\mathbf{m},\mathbf{d}]\ \&\ \mathbf{D}[\mathbf{k},\mathbf{d}]$,! 117 (&I: 72,116) ¡

$\mathbf{1}\ (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})\ \&\ \mathbf{1}\ \mathbf{D}\ \&\ (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})[\mathbf{m},\mathbf{d}]\ \&\ \mathbf{D}[\mathbf{k},\mathbf{d}]$
$\&\ ((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathrm{I}})$,! 118 (&I: 108,117) ¡

$(\ \mathbf{1}\ (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})\ \&\ \mathbf{1}\ \mathbf{D}\ \&\ (\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})[\mathbf{m},\mathbf{d}]\ \&\ \mathbf{D}[\mathbf{k},\mathbf{d}]$
$\&\ ((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}}) \equiv (\mathbf{D}^{\mathrm{I}})$
$\Rightarrow (((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}}) \equiv ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})^{\mathrm{I}})\ )$,! 119 (∀E: III14.16)

¡

1 (**C** α **c** **d**) & **1** **D** & (**C** α **c** **d**)[**m**,**d**] & **D**[**k**,**d**]
& ((**C** α **c** **d**)^{I}) ≡ (**D**^{I})
⇒ (((**C** α **c** **d**) ι **m** **d**)^{I}) ≡ ((**D** ι **k** **d**)^{I})
,! 120 (()E: 119) ¡

(((**C** α **c** **d**) ι **m** **d**)^{I}) ≡ ((**D** ι **k** **d**)^{I})
,! 121 (⇒E: 118,120)
¡

! To show: **n** = **p** ¡

(**p** = 0 ∨ ¬ **p** = 0) ,! 122 (∀E: I3.4) ¡

p = 0 ∨ ¬ **p** = 0 ,! 123 ()E: 122) ¡

p = 0 ,! 124 (Prem) ¡

ℭ[0,(**D** ι **k** **d**)] ,! 125 (=E: 92,124) ¡

ℭ[**n**,((**C** α **c** **d**) ι **m** **d**)] & ℭ[0,(**D** ι **k** **d**)]
,! 126 (&I: 86,125) ¡

ℭ[**n**,((**C** α **c** **d**) ι **m** **d**)] & ℭ[0,(**D** ι **k** **d**)]
& (((**C** α **c** **d**) ι **m** **d**)^{I}) ≡ ((**D** ι **k** **d**)^{I})
,! 127 (&I: 121,126)
¡

(ℭ[**n**,((**C** α **c** **d**) ι **m** **d**)] & ℭ[0,(**D** ι **k** **d**)]
& (((**C** α **c** **d**) ι **m** **d**)^{I}) ≡ ((**D** ι **k** **d**)^{I})
⇒ **n** = 0)
,! 128 (∀E: P8) ¡

ℭ[**n**,((**C** α **c** **d**) ι **m** **d**)] & ℭ[0,(**D** ι **k** **d**)]
& (((**C** α **c** **d**) ι **m** **d**)^{I}) ≡ ((**D** ι **k** **d**)^{I})
⇒ **n** = 0
,! 129 ()E: 128) ¡

n = 0 ,! 130 (⇒E: 127,129)
¡

n = **p** ,! 131 (=E: 124,130)
¡

p = 0 ⇒ **n** = **p** ,! 132 (⇒I: 124,131)
¡

¬ **p** = 0 ,! 133 (Prem) ¡

ω[**p**] ,! 134 (&E: 37) ¡

ω[**p**] & ¬ **p** = 0 ,! 135 (&I: 133,134)
¡

(ω[**p**] & ¬ **p** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**p**]))
,! 136 (∀E: P15)

ω[**p**] & ¬ **p** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**p**])
,! 137 (()E: 136)

∃p(ω[p] & σ[p,**p**]) ,! 138 (⇒E: 135,137)

! Now apply the induction hypothesis.

∃p(ω[p] & σ[p,**p**]) & ℭ[**n**,((**C** α **c d**) ι **m d**)]
,! 139 (&I: 86,138)

∃p(ω[p] & σ[p,**p**]) & ℭ[**n**,((**C** α **c d**) ι **m d**)]
& ℭ[**p**,(**D** ι **k d**)]
,! 140 (&I: 92,139)

∃p(ω[p] & σ[p,**p**]) & ℭ[**n**,((**C** α **c d**) ι **m d**)]
& ℭ[**p**,(**D** ι **k d**)]
& (((**C** α **c d**) ι **m d**)^{I}) ≡⊏((**D** ι **k d**)^{I})
,! 141 (&I: 121,140)

(∃p(ω[p] & σ[p,**p**]) & ℭ[**n**,((**C** α **c d**) ι **m d**)]
& ℭ[**p**,(**D** ι **k d**)]
& (((**C** α **c d**) ι **m d**)^{I}) ≡⊏((**D** ι **k d**)^{I})
⇒ **n** = **p**)
,! 142 (∀E: 28)

∃p(ω[p] & σ[p,**p**]) & ℭ[**n**,((**C** α **c d**) ι **m d**)]
& ℭ[**p**,(**D** ι **k d**)]
& (((**C** α **c d**) ι **m d**)^{I}) ≡⊏((**D** ι **k d**)^{I})
⇒ **n** = **p**
,! 143 (()E: 142)

n = **p** ,! 144 (⇒E: 141,143)

¬ **p** = 0 ⇒ **n** = **p** ,! 145 (⇒I: 133,144)

n = **p** ,! 146 (∨E: 123,132, 145)

! Now show: ℭ[**m**,{x,y : (**D** ι **k d**)[x,y] ∨ (x = **m** & y = **d**)}]

¬ ((**D** ι **k d**)^{I})[**d**] ,! 147 (&E: 91)

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ ((**D** ι **k d**)^{I})[**d**]
,! 148 (&I: 25,147)

$\{x,y : (\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{d})\}$
$\equiv ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d}) \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{d}))$
,! 149 (∀E: III12.16)
¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]\ \&\ \neg\ ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})^{I})[\mathbf{d}]$
$\&\ \{x,y : (\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{d})\}$
$\equiv ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d}) \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{d}))$
,! 150 (&I: 148,149)
¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{n},(\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})]$,! 151 (=E: 92,146) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]\ \&\ \neg\ ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})^{I})[\mathbf{d}]$
$\&\ \{x,y : (\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{d})\}$
$\equiv ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d}) \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{d}))$
$\&\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},(\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})]$
,! 152 (&I: 150,151)
¡

$(\ \omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]\ \&\ \neg\ ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})^{I})[\mathbf{d}]$
$\&\ \{x,y : (\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{d})\}$
$\equiv ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d}) \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{d}))$
$\&\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},(\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})]$
$\Rightarrow \mathfrak{C}[\mathbf{m},\{x,y : (\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{d})\}]\ )$
,! 153 (∀E: P10) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]\ \&\ \neg\ ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})^{I})[\mathbf{d}]$
$\&\ \{x,y : (\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{d})\}$
$\equiv ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d}) \sqcup (\mathbf{m} \blacksquare \mathbf{d}))$
$\&\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},(\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})]$
$\Rightarrow \mathfrak{C}[\mathbf{m},\{x,y : (\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{d})\}]$
,! 154 ()E: 153) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{m},\{x,y : (\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})[x,y] \vee (x = \mathbf{m}\ \&\ y = \mathbf{d})\}]$
,! 155 (⇒E: 152,154)
¡

! To show: $\mathfrak{C}[\mathbf{k},\{x,y : (\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})[x,y] \vee (x = \mathbf{k}\ \&\ y = \mathbf{d})\}]$ ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{k}]$,! 156 (=E: 37,146) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{k}]\ \&\ \neg\ ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})^{I})[\mathbf{d}]$
,! 157 (&I: 147,156)
¡

$\{x,y : (\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d})[x,y] \vee (x = \mathbf{k}\ \&\ y = \mathbf{d})\}$
$\equiv ((\mathbf{D}\ \iota\ \mathbf{k}\ \mathbf{d}) \sqcup (\mathbf{k} \blacksquare \mathbf{d}))$
,! 158 (∀E: III12.16)
¡

```
ω[n] & σ[n,k] & ¬ ((D ι k d)^I)[d]
& {x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = k & y = d)}
  ≣ ((D ι k d) ⊔ (k ▪ d))
                                  ,! 159 (&I: 157,158)
                                                      ¡

ω[n] & σ[n,k] & ¬ ((D ι k d)^I)[d]
& {x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = k & y = d)}
  ≣ ((D ι k d) ⊔ (k ▪ d))
& ℭ[n,(D ι k d)]
                                  ,! 160 (&I: 151,159)
                                                      ¡

( ω[n] & σ[n,k] & ¬ ((D ι k d)^I)[d]
  & {x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = k & y = d)}
    ≣ ((D ι k d) ⊔ (k ▪ d))
  & ℭ[n,(D ι k d)]
  ⇒ ℭ[k,{x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = k & y = d)}] )
                                  ,! 161 (∀E: P10)    ¡

ω[n] & σ[n,k] & ¬ ((D ι k d)^I)[d]
& {x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = k & y = d)}
  ≣ ((D ι k d) ⊔ (k ▪ d))
& ℭ[n,(D ι k d)]
⇒ ℭ[k,{x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = k & y = d)}]
                                  ,! 162 (()E: 161)   ¡

ℭ[k,{x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = k & y = d)}]
                                  ,! 163 (⇒E: 160,162)
                                                      ¡

! Finally, apply Count1b                              ¡

ω[n] & ω[m]                       ,! 164 (&I: 24,29)  ¡

ω[n] & ω[m] & ℭ[n,(D ι k d)]       ,! 165 (&I: 151,164)
                                                      ¡

( ¬ ((D ι k d)^I)[d] ⇒ ¬ ∃x (D ι k d)[x,d] )
                                  ,! 166 (∀E: III6.6) ¡

¬ ((D ι k d)^I)[d] ⇒ ¬ ∃x (D ι k d)[x,d]
                                  ,! 167 (()E: 166)   ¡

¬ ∃x (D ι k d)[x,d]               ,! 168 (⇒E: 147,167)
                                                      ¡

ω[n] & ω[m] & ℭ[n,(D ι k d)] & ¬ ∃x (D ι k d)[x,d]
                                  ,! 169 (&I: 165,168)
                                                      ¡

ω[n] & ω[m] & ℭ[n,(D ι k d)] & ¬ ∃x (D ι k d)[x,d]
```

```
        & ℭ[m,{x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = m & y = d)}]
                                    ,! 170 (&I: 155,169)
                                                        ¡

        ω[n] & ω[m] & ℭ[n,(D ι k d)] & ¬ ∃x (D ι k d)[x,d]
        & ℭ[m,{x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = m & y = d)}]
        & ℭ[k,{x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = k & y = d)}]
                                    ,! 171 (&I: 163,170)
                                                        ¡

        ( ω[n] & ω[m] & ℭ[n,(D ι k d)] & ¬ ∃x (D ι k d)[x,d]
          & ℭ[m,{x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = m & y = d)}]
          & ℭ[k,{x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = k & y = d)}]
          ⇒ m = k )
                                    ,! 172 (∀E: Count1b)
                                                        ¡

        ω[n] & ω[m] & ℭ[n,(D ι k d)] & ¬ ∃x (D ι k d)[x,d]
        & ℭ[m,{x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = m & y = d)}]
        & ℭ[k,{x,y : (D ι k d)[x,y] ∨ (x = k & y = d)}]
        ⇒ m = k
                                    ,! 173 ()E: 172)    ¡

        m = k                       ,! 174 (⇒E: 171,173)
                                                        ¡

      ¬ k = 0 ⇒ m = k               ,! 175 (⇒I: 52,174)
                                                        ¡

      m = k                         ,! 176 (∨E: 42,51,175)
                                                        ¡

    ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[m,C] & ℭ[k,D] & (C^I) ≡ (D^I)
    ⇒ m = k
                                    ,! 177 (⇒I: 31,176)
                                                        ¡

    ( ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[m,C] & ℭ[k,D] & (C^I) ≡ (D^I)
      ⇒ m = k )
                                    ,! 178 ()I: 177)    ¡

  ∀k∀C∀D ( ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[m,C] & ℭ[k,D] & (C^I) ≡ (D^I)
           ⇒ m = k )
                                    ,! 179 (∀I: 30,178) ¡

ω[m]
⇒ ∀k∀C∀D ( ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[m,C] & ℭ[k,D] & (C^I) ≡ (D^I)
           ⇒ m = k )
                                    ,! 180 (⇒I: 29,179)
                                                        ¡

( ω[m]
```

⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[**m**,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I)
⇒ **m** = k))
,! 181 (()I: 180) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& (ω[**n**]
⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[**n**,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I)
⇒ **n** = k))
⇒ (ω[**m**]
⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[**m**,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I) ⇒ **m** = k))
,! 182 (⇒I: 23,181)
¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& (ω[**n**]
⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[**n**,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I) ⇒ **n** = k))
⇒ (ω[**m**]
⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[**m**,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I) ⇒ **m** = k)))
,! 183 (()I: 182) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& (ω[n]
⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[n,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I) ⇒ n = k))
⇒ (ω[m]
⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[m,C] & ℭ[k,D]
& (C^I) ≡ (D^I) ⇒ m = k)))
,! 184 (∀I: 22,183) ¡

∀n (ω[n]
⇒ (ω[n] ⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[n,C]
& ℭ[k,D] & (C^I) ≡ (D^I)
⇒ n = k)))
,! 185 (Induct: 21,184)
¡

n,**k**,**C**,**D** ,! 186 (Prem) ¡

ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & ℭ[**n**,**C**] & ℭ[**k**,**D**] & ($\mathbf{C}^I$) ≡ ($\mathbf{D}^I$)
,! 187 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 188 (&E: 187) ¡

∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & ℭ[**n**,**C**] & ℭ[**k**,**D**] & ($\mathbf{C}^I$) ≡ ($\mathbf{D}^I$)

,! 189 (&E: 187) ¡

(ω[**n**]
⇒ (ω[**n**] ⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[**n**,C]
& ℭ[k,D] & (C^{I}) ≡ (D^{I})
⇒ **n** = k)))
,! 190 (∀E: 185) ¡

ω[**n**]
⇒ (ω[**n**] ⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[**n**,C]
& ℭ[k,D] & (C^{I}) ≡ (D^{I})
⇒ **n** = k))
,! 191 (()E: 190) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[**n**,C]
& ℭ[k,D] & (C^{I}) ≡ (D^{I})
⇒ **n** = k))
,! 192 (⇒E: 188,191)
¡

ω[**n**] ⇒ ∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[**n**,C]
& ℭ[k,D] & (C^{I}) ≡ (D^{I})
⇒ **n** = k)
,! 193 (()E: 192) ¡

∀k∀C∀D (∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[**n**,C] & ℭ[k,D] & (C^{I}) ≡ (D^{I})
⇒ **n** = k)
,! 194 (⇒E: 188,193)
¡

(∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & ℭ[**n**,**C**] & ℭ[**k**,**D**] & (**C^{I}**) ≡ (**D^{I}**)
⇒ **n** = **k**)
,! 195 (∀E: 194) ¡

∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & ℭ[**n**,**C**] & ℭ[**k**,**D**] & (**C^{I}**) ≡ (**D^{I}**) ⇒ **n** = **k**
,! 196 (()E: 195) ¡

n = **k** ,! 197 (⇒E: 189,196)
¡

ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & ℭ[**n**,**C**] & ℭ[**k**,**D**] & (**C^{I}**) ≡ (**D^{I}**)
⇒ **n** = **k**
,! 198 (⇒I: 187,197)
¡

(ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & ℭ[**n**,**C**] & ℭ[**k**,**D**] & (**C^{I}**) ≡ (**D^{I}**)
⇒ **n** = **k**)
,! 199 (()I: 198) ¡

∀n∀k∀C∀D (ω[n] & ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & ℭ[n,C] & ℭ[k,D]

& (C^I) ≡ (D^I) ⇒ n = k)

,! 200 (∀I: 186,199)

i

□