!CHAPTER 5

DOMAINS¡

! In this chapter relationship domains are introduced. The domain of **R**, written $(\mathbf{R}^{D})$, is satisfied by those things which bears **R** to something. ¡

! **1.** ^{D} represents domain. ¡

$\mathbb{D}$ ^{D} ; $(\mathbf{R}^{D})$; ; $\{a : \exists y\ \mathbf{R}[a,y]\}$ ¡

! **2. Fundamental Proposition of Domains.** ¡

$\vdash \forall R \forall x\ (\ (R^{D})[x] \Leftrightarrow \exists y\ R[x,y]\ )$ ¡

$\mathbf{R}$	,! 1 (Prem)	¡
$\forall x\ (\ \{a : \exists y\ \mathbf{R}[a,y]\}[x] \Leftrightarrow \exists y\ \mathbf{R}[x,y]\ )$	,! 2 (Pred)	¡
$\forall x\ (\ (\mathbf{R}^{D})[x] \Leftrightarrow \exists y\ \mathbf{R}[x,y]\ )$	,! 3 ($\mathbb{D}$I: P1,2)	¡
$\forall R \forall x\ (\ (R^{D})[x] \Leftrightarrow \exists y\ R[x,y]\ )$	! 4 (∀I: 1,3)	¡

□

! **3. Fundamental Proposition of Domains, First Half.** ¡

$\vdash \forall R \forall x\ (\ (R^{D})[x] \Rightarrow \exists y\ R[x,y]\ )$ ¡

$\mathbf{R},\mathbf{x}$	,! 1 (Prem)	¡
$(\ (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y]\ )$	,! 2 (∀E: P2)	¡
$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y]$	,! 3 (()E: 2)	¡
$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow \exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y]$	,! 4 (⇔E: 3)	¡
$(\ (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow \exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y]\ )$	,! 5 (()I: 4)	¡
$\forall R \forall x\ (\ (R^{D})[x] \Rightarrow \exists y\ R[x,y]\ )$	! 6 (∀I: 1,5)	¡

□

! **4. Fundamental Proposition of Domains, Second Half.** ¡

$\vdash \forall R \forall x\ (\ \exists y\ R[x,y] \Rightarrow (R^{D})[x]\ )$ ¡

$\mathbf{R},\mathbf{x}$	,! 1 (Prem)	¡
$(\ (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y]\ )$	,! 2 (∀E: P2)	¡
$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y]$	,! 3 (()E: 2)	¡
$\exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]$	,! 4 (⇔E: 3)	¡

$(\exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}])$,! 5 (()I: 4) ¡

$\forall R \forall x (\exists y\ R[x,y] \Rightarrow (R^{D})[x])$! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **5.** It is often more convenient to appeal to P5 than to P4. ¡

$\vdash \forall R \forall x \forall y (R[x,y] \Rightarrow (R^{D})[x])$ ¡

$\mathbf{R},\mathbf{x},\mathbf{y}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 2 (Prem) ¡

$\exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y]$,! 3 (∃I: 2) ¡

$(\exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}])$,! 4 (∀E: P4) ¡

$\exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]$,! 5 (()E: 4) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]$,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]$,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

$(\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}])$,! 8 (()I: 7) ¡

$\forall R \forall x \forall y (R[x,y] \Rightarrow (R^{D})[x])$! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **6.** ¡

$\vdash \forall R \forall A \forall x \forall y (R[x,y] \ \&\ (R^{D}) \subseteq A \Rightarrow A[x])$ ¡

$\mathbf{R},\mathbf{A},\mathbf{x},\mathbf{y}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \ \&\ (\mathbf{R}^{D}) \subseteq \mathbf{A}$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 3 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}])$,! 4 (∀E: P5) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]$,! 5 (()E: 4) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]$,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \subseteq \mathbf{A}$,! 7 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \ \&\ (\mathbf{R}^{D}) \subseteq \mathbf{A}$,! 8 (&I: 6,7) ¡

$((\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \ \&\ (\mathbf{R}^{D}) \subseteq \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{x}])$,! 9 (∀E: II1.2) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \ \&\ (\mathbf{R}^{D}) \subseteq \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{x}]$,! 10 (()E: 9) ¡

A[x] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

R[x,y] & (R^{D}) ⊆ A ⇒ A[x] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(R[x,y] & (R^{D}) ⊆ A ⇒ A[x]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀A∀x∀y (R[x,y] & (R^{D}) ⊆ A ⇒ A[x]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **7.** P7 is a corollary of P6. ¡

⊢ ∀R∀A∀x∀y (R[x,y] & (R^{D}) ≡ A ⇒ A[x]) ¡

R,A,x,y ,! 1 (Prem) ¡

R[x,y] & (R^{D}) ≡ A ,! 2 (Prem) ¡

(R^{D}) ≡ A ,! 3 (&E: 2) ¡

((R^{D}) ≡ A ⇒ (R^{D}) ⊆ A) ,! 4 (∀E: II1.11) ¡

(R^{D}) ≡ A ⇒ (R^{D}) ⊆ A ,! 5 (()E: 4) ¡

(R^{D}) ⊆ A ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

R[x,y] ,! 7 (&E: 2) ¡

R[x,y] & (R^{D}) ⊆ A ,! 8 (&I: 6,7) ¡

(R[x,y] & (R^{D}) ⊆ A ⇒ A[x]) ,! 9 (∀E: P6) ¡

R[x,y] & (R^{D}) ⊆ A ⇒ A[x] ,! 10 (()E: 9) ¡

A[x] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

R[x,y] & (R^{D}) ≡ A ⇒ A[x] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(R[x,y] & (R^{D}) ≡ A ⇒ A[x]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀A∀x∀y (R[x,y] & (R^{D}) ≡ A ⇒ A[x]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **8.** ¡

⊢ ∀R∀A∀x (A[x] & A ⊆ (R^{D}) ⇒ ∃y R[x,y]) ¡

R,A,x ,! 1 (Prem) ¡

A[x] & A ⊆ (R^{D}) ,! 2 (Prem) ¡

(A[x] & A ⊆ (R^{D}) ⇒ (R^{D})[x]) ,! 3 (∀E: II1.2) ¡

A[**x**] & **A** ⊆ (**R**^{D}) ⇒ (**R**^{D})[**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

(**R**^{D})[**x**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**R**^{D})[**x**] ⇒ ∃y **R**[**x**,y]) ,! 6 (∀E: P3) ¡

(**R**^{D})[**x**] ⇒ ∃y **R**[**x**,y] ,! 7 (()E: 6) ¡

∃y **R**[**x**,y] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

A[**x**] & **A** ⊆ (**R**^{D}) ⇒ ∃y **R**[**x**,y] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**A**[**x**] & **A** ⊆ (**R**^{D}) ⇒ ∃y **R**[**x**,y]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀R∀A∀x (A[x] & A ⊆ (R^D) ⇒ ∃y R[x,y]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **9.** P9 is a corollary of P8. ¡

⊢ ∀R∀A∀x (A[x] & (R^D) ≡ A ⇒ ∃y R[x,y]) ¡

R,**A**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

A[**x**] & (**R**^{D}) ≡ **A** ,! 2 (Prem) ¡

(**R**^{D}) ≡ **A** ,! 3 (&E: 2) ¡

((**R**^{D}) ≡ **A** ⇒ **A** ⊆ (**R**^{D})) ,! 4 (∀E II1.12) ¡

(**R**^{D}) ≡ **A** ⇒ **A** ⊆ (**R**^{D}) ,! 5 (()E: 4) ¡

A ⊆ (**R**^{D}) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

A[**x**] ,! 7 (&E: 2) ¡

A[**x**] & **A** ⊆ (**R**^{D}) ,! 8 (&I: 6,7) ¡

(**A**[**x**] & **A** ⊆ (**R**^{D}) ⇒ ∃y **R**[**x**,y]) ,! 9 (∀E: P8) ¡

A[**x**] & **A** ⊆ (**R**^{D}) ⇒ ∃y **R**[**x**,y] ,! 10 (()E: 9) ¡

∃y **R**[**x**,y] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

A[**x**] & (**R**^{D}) ≡ **A** ⇒ ∃y **R**[**x**,y] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**A**[**x**] & (**R**^{D}) ≡ **A** ⇒ ∃y **R**[**x**,y]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀A∀x (A[x] & (R^D) ≡ A ⇒ ∃y R[x,y]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! When it is necessary to prove (R^D) ⊆ A, preference will be given to using P10 or P11, rather than appealing to the definition of inclusion. One advantage is that this publicizes what is about to happen (without adding a comment line). Another is that, appeals are to propositions in the current, or at least a more recent, section. ¡

! **10.** ¡

$\vdash \forall R \forall A \; (\; \forall x(\exists y \; R[x,y] \Rightarrow A[x]) \Rightarrow (R^{D}) \subseteq A \;)$ ¡

$\mathbf{R},\mathbf{A}$,! 1 (Prem) ¡

$\forall x(\exists y \; \mathbf{R}[x,y] \Rightarrow \mathbf{A}[x])$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{x}$,! 3 (Prem) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]$,! 4 (Prem) ¡

$(\; (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow \exists y \; \mathbf{R}[\mathbf{x},y] \;)$,! 5 (∀E: P3) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow \exists y \; \mathbf{R}[\mathbf{x},y]$,! 6 (()E: 5) ¡

$\exists y \; \mathbf{R}[\mathbf{x},y]$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$(\; \exists y \; \mathbf{R}[\mathbf{x},y] \Rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{x}] \;)$,! 8 (∀E: 2) ¡

$\exists y \; \mathbf{R}[\mathbf{x},y] \Rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{x}]$,! 9 (()E: 8) ¡

$\mathbf{A}[\mathbf{x}]$,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{x}]$,! 11 (⇒I: 4,10) ¡

$(\; (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{x}] \;)$,! 12 (()I: 11) ¡

$\forall x \; (\; (\mathbf{R}^{D})[x] \Rightarrow \mathbf{A}[x] \;)$,! 13 (∀I: 3,12) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \subseteq \mathbf{A}$,! 14 (𝕊I: II1.1,13) ¡

$\forall x(\exists y \; \mathbf{R}[x,y] \Rightarrow \mathbf{A}[x]) \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \subseteq \mathbf{A}$,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

$(\; \forall x(\exists y \; \mathbf{R}[x,y] \Rightarrow \mathbf{A}[x]) \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \subseteq \mathbf{A} \;)$,! 16 (()I: 15) ¡

$\forall R \forall A \; (\; \forall x(\exists y \; R[x,y] \Rightarrow A[x]) \Rightarrow (R^{D}) \subseteq A \;)$
! 17 (∀I: 1,16) ¡

□

! **11.** ¡

$\vdash \forall R \forall A \; (\; \forall x \forall y(R[x,y] \Rightarrow A[x]) \Rightarrow (R^{D}) \subseteq A \;)$ ¡

$\mathbf{R},\mathbf{A}$,! 1 (Prem) ¡

$(\; \forall x(\exists y \; \mathbf{R}[x,y] \Rightarrow \mathbf{A}[x]) \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \subseteq \mathbf{A} \;)$,! 2 (∀E: P10) ¡

$\forall x(\exists y\ \mathbf{R}[x,y] \Rightarrow \mathbf{A}[x]) \Rightarrow (\mathbf{R}^D) \subseteq \mathbf{A}$,! 3 (()E: 2) ¡

$\forall x\forall y(\mathbf{R}[x,y] \Rightarrow \mathbf{A}[x])$,! 4 (Prem) ¡

$\mathbf{x}$,! 5 (Prem) ¡

$\exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y]$,! 6 (Prem) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 7 (∃E: 6) ¡

$(\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{x}])$,! 8 (∀E: 4) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{x}]$,! 9 (()E: 8) ¡

$\mathbf{A}[\mathbf{x}]$,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

$\exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y] \Rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{x}]$,! 11 (⇒I: 6,10) ¡

$(\exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y] \Rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{x}])$,! 12 (()I: 11) ¡

$\forall x(\exists y\ \mathbf{R}[x,y] \Rightarrow \mathbf{A}[x])$,! 13 (∀I: 5,12) ¡

$(\mathbf{R}^D) \subseteq \mathbf{A}$,! 14 (⇒E: 3,13) ¡

$\forall x\forall y(\mathbf{R}[x,y] \Rightarrow \mathbf{A}[x]) \Rightarrow (\mathbf{R}^D) \subseteq \mathbf{A}$,! 15 (⇒I: 4,14) ¡

$(\ \forall x\forall y(\mathbf{R}[x,y] \Rightarrow \mathbf{A}[x]) \Rightarrow (\mathbf{R}^D) \subseteq \mathbf{A}\ )$,! 16 (()I: 15) ¡

$\forall R\forall A\ (\ \forall x\forall y(R[x,y] \Rightarrow A[x]) \Rightarrow (R^D) \subseteq A\ )$! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **12.** ¡

$\vdash \forall R\forall A\ (\ \forall x(A[x] \Rightarrow \exists y\ R[x,y]) \Rightarrow A \subseteq (R^D)\ )$ ¡

$\mathbf{R},\mathbf{A}$,! 1 (Prem) ¡

$\forall x(\mathbf{A}[x] \Rightarrow \exists y\ \mathbf{R}[x,y])$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{x}$,! 3 (Prem) ¡

$\mathbf{A}[\mathbf{x}]$,! 4 (Prem) ¡

$(\mathbf{A}[\mathbf{x}] \Rightarrow \exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y])$,! 5 (∀E: 2) ¡

$\mathbf{A}[\mathbf{x}] \Rightarrow \exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y]$,! 6 (()E: 5) ¡

$\exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y]$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$(\ \exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y] \Rightarrow (\mathbf{R}^D)[\mathbf{x}]\ )$,! 8 (∀E: P4) ¡

$\exists y\ \mathbf{R}[\mathbf{x},y] \Rightarrow (\mathbf{R}^D)[\mathbf{x}]$,! 9 (()E: 8) ¡

$(\mathbf{R}^D)[\mathbf{x}]$,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

A[x] ⇒ (R^D)[x] ,! 11 (⇒I: 4,10) ¡

(A[x] ⇒ (R^D)[x]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀x (A[x] ⇒ (R^D)[x]) ,! 13 (∀I: 3,12) ¡

A ⊆ (R^D) ,! 14 ($I: II1.1,13) ¡

∀x(A[x] ⇒ ∃y R[x,y]) ⇒ A ⊆ (R^D) ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(∀x(A[x] ⇒ ∃y R[x,y]) ⇒ A ⊆ (R^D)) ,! 16 (()I: 15) ¡

∀R∀A (∀x(A[x] ⇒ ∃y R[x,y]) ⇒ A ⊆ (R^D))
! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **13.** Remark the rare appeal to P10, rather than to P11. ¡

⊢ ∀R∀A (∀x(∃y R[x,y] ⇔ A[x]) ⇒ (R^D) ≡ A) ¡

R,**A** ,! 1 (Prem) ¡

∀x(∃y **R**[x,y] ⇔ **A**[x]) ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

(∃y **R**[**x**,y] ⇔ **A**[**x**]) ,! 4 (∀E: 2) ¡

∃y **R**[**x**,y] ⇔ **A**[**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

∃y **R**[**x**,y] ⇒ **A**[**x**] ,! 6 (⇔E: 5) ¡

(∃y **R**[**x**,y] ⇒ **A**[**x**]) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀x(∃y **R**[x,y] ⇒ **A**[x]) ,! 8 (∀I: 3,7) ¡

(∀x(∃y **R**[x,y] ⇒ **A**[x]) ⇒ (**R**^D) ⊆ **A**) ,! 9 (∀E: P10) ¡

∀x(∃y **R**[x,y] ⇒ **A**[x]) ⇒ (**R**^D) ⊆ **A** ,! 10 (()E: 9) ¡

(**R**^D) ⊆ **A** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

x ,! 12 (Prem) ¡

(∃y **R**[**x**,y] ⇔ **A**[**x**]) ,! 13 (∀E: 2) ¡

∃y **R**[**x**,y] ⇔ **A**[**x**] ,! 14 (()E: 13) ¡

A[**x**] ⇒ ∃y **R**[**x**,y] ,! 15 (⇔E: 14) ¡

(**A**[**x**] ⇒ ∃y **R**[**x**,y]) ,! 16 (()I: 15) ¡

$\forall x(\mathbf{A}[x] \Rightarrow \exists y\ \mathbf{R}[x,y])$,! 17 (∀I: 12,16) ¡

$(\ \forall x(\mathbf{A}[x] \Rightarrow \exists y\ \mathbf{R}[x,y]) \Rightarrow \mathbf{A} \subseteq (\mathbf{R}^D)\ )$,! 18 (∀E: P12) ¡

$\forall x(\mathbf{A}[x] \Rightarrow \exists y\ \mathbf{R}[x,y]) \Rightarrow \mathbf{A} \subseteq (\mathbf{R}^D)$,! 19 (()E: 18) ¡

$\mathbf{A} \subseteq (\mathbf{R}^D)$,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

$(\mathbf{R}^D) \subseteq \mathbf{A}\ \&\ \mathbf{A} \subseteq (\mathbf{R}^D)$,! 21 (&I: 11,20) ¡

$(\ (\mathbf{R}^D) \subseteq \mathbf{A}\ \&\ \mathbf{A} \subseteq (\mathbf{R}^D) \Rightarrow (\mathbf{R}^D) \equiv \mathbf{A}\ )$,! 22 (∀E: II1.8) ¡

$(\mathbf{R}^D) \subseteq \mathbf{A}\ \&\ \mathbf{A} \subseteq (\mathbf{R}^D) \Rightarrow (\mathbf{R}^D) \equiv \mathbf{A}$,! 23 (()E: 22) ¡

$(\mathbf{R}^D) \equiv \mathbf{A}$,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

$\forall x(\exists y\ \mathbf{R}[x,y] \Leftrightarrow \mathbf{A}[x]) \Rightarrow (\mathbf{R}^D) \equiv \mathbf{A}$,! 25 (⇒I: 2,24) ¡

$(\ \forall x(\exists y\ \mathbf{R}[x,y] \Leftrightarrow \mathbf{A}[x]) \Rightarrow (\mathbf{R}^D) \equiv \mathbf{A}\ )$,! 26 (()I: 25) ¡

$\forall R \forall A\ (\ \forall x(\exists y\ R[x,y] \Leftrightarrow A[x]) \Rightarrow (R^D) \equiv A\ )$
! 27 (∀I: 1,26) ¡

□

! **14.** The domain operation maintains inclusion. Remark the appeal to P11. It is positioned early in the proof to indicate how the proof will proceed. ¡

$\vdash \forall R \forall S\ (\ R \subseteqq S \Rightarrow (R^D) \subseteq (S^D)\ )$ ¡

$\mathbf{R},\mathbf{S}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S}$,! 2 (Prem) ¡

$(\ \forall x \forall y(\mathbf{R}[x,y] \Rightarrow (\mathbf{S}^D)[x]) \Rightarrow (\mathbf{R}^D) \subseteq (\mathbf{S}^D)\ )$
,! 3 (∀E: P11) ¡

$\forall x \forall y(\mathbf{R}[x,y] \Rightarrow (\mathbf{S}^D)[x]) \Rightarrow (\mathbf{R}^D) \subseteq (\mathbf{S}^D)$
,! 4 (()E: 3) ¡

$\mathbf{x},\mathbf{y}$,! 5 (Prem) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 6 (Prem) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]\ \&\ \mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S}$,! 7 (&I: 2,6) ¡

$(\ \mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]\ \&\ \mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}]\ )$,! 8 (∀E: C1.2) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]\ \&\ \mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 9 (()E: 8) ¡

$\mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

$(\ \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{S}^D)[\mathbf{x}]\ )$,! 11 (∀E: P5) ¡

$\mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}]$,! 12 (()E: 11) ¡

$(\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}]$,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}]$,! 14 (⇒I: 6,13) ¡

$(\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}])$,! 15 (()I: 14) ¡

$\forall x \forall y(\mathbf{R}[x,y] \Rightarrow (\mathbf{S}^{D})[x])$,! 16 (∀I: 5,15) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \subseteq (\mathbf{S}^{D})$,! 17 (⇒E: 4,16) ¡

$\mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \subseteq (\mathbf{S}^{D})$,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

$(\mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \subseteq (\mathbf{S}^{D}))$,! 19 (()I: 18) ¡

$\forall R \forall S (R \subseteqq S \Rightarrow (R^{D}) \subseteq (S^{D}))$! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **15.** The domain operation maintains equivalence. An alternative proof would follow P14's, but appeal to P13 instead of P11. ¡

$\vdash \forall R \forall S (R \equiv S \Rightarrow (R^{D}) \equiv (S^{D}))$ ¡

$\mathbf{R},\mathbf{S}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \equiv \mathbf{S}$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{R} \equiv \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S} \ \& \ \mathbf{S} \subseteqq \mathbf{R})$,! 3 (∀E: C1.11) ¡

$\mathbf{R} \equiv \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S} \ \& \ \mathbf{S} \subseteqq \mathbf{R}$,! 4 (()E: 3) ¡

$\mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S} \ \& \ \mathbf{S} \subseteqq \mathbf{R}$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$\mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S}$,! 6 (&E: 5) ¡

$(\mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \subseteq (\mathbf{S}^{D}))$,! 7 (∀E: P14) ¡

$\mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \subseteq (\mathbf{S}^{D})$,! 8 (()E: 7) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \subseteq (\mathbf{S}^{D})$,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

$\mathbf{S} \subseteqq \mathbf{R}$,! 10 (&E: 5) ¡

$(\mathbf{S} \subseteqq \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{S}^{D}) \subseteq (\mathbf{R}^{D}))$,! 11 (∀E: P14) ¡

$\mathbf{S} \subseteqq \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{S}^{D}) \subseteq (\mathbf{R}^{D})$,! 12 (()E: 11) ¡

$(\mathbf{S}^{D}) \subseteq (\mathbf{R}^{D})$,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \subseteq (\mathbf{S}^{D}) \ \& \ (\mathbf{S}^{D}) \subseteq (\mathbf{R}^{D})$,! 14 (&I: 9,13) ¡

$((\mathbf{R}^{D}) \subseteq (\mathbf{S}^{D}) \ \& \ (\mathbf{S}^{D}) \subseteq (\mathbf{R}^{D}) \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \equiv (\mathbf{S}^{D}))$

,! 15 (∀E: II1.8) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \subseteq (\mathbf{S}^{D})$ & $(\mathbf{S}^{D}) \subseteq (\mathbf{R}^{D}) \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \equiv (\mathbf{S}^{D})$
,! 16 (()E: 15) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv (\mathbf{S}^{D})$,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

$\mathbf{R}$ ≣ $\mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \equiv (\mathbf{S}^{D})$,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

($\mathbf{R}$ ≣ $\mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \equiv (\mathbf{S}^{D})$) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀R∀S (R ≣ S $\Rightarrow (R^{D}) \equiv (S^{D})$) ! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **16.** ¡

⊢ ∀R∀S∀A ($(R^{D}) \equiv A$ & R ≣ S $\Rightarrow (S^{D}) \equiv A$) ¡

R,S,A ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A}$ & $\mathbf{R}$ ≣ $\mathbf{S}$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A}$,! 3 (&E: 2) ¡

$\mathbf{R}$ ≣ $\mathbf{S}$,! 4 (&E: 2) ¡

($\mathbf{R}$ ≣ $\mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \equiv (\mathbf{S}^{D})$) ,! 5 (∀E: P15) ¡

$\mathbf{R}$ ≣ $\mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \equiv (\mathbf{S}^{D})$,! 6 (()E: 5) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv (\mathbf{S}^{D})$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv (\mathbf{S}^{D})$ & $(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A}$,! 8 (&I: 3,7) ¡

($(\mathbf{R}^{D}) \equiv (\mathbf{S}^{D})$ & $(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{A}$)
,! 9 (∀E: II1.19) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv (\mathbf{S}^{D})$ & $(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{A}$,! 10 (()E: 9) ¡

$(\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{A}$,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A}$ & $\mathbf{R}$ ≣ $\mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{A}$,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

($(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A}$ & $\mathbf{R}$ ≣ $\mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{A}$) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀A ($(R^{D}) \equiv A$ & R ≣ S $\Rightarrow (S^{D}) \equiv A$) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **17.** ¡

⊢ ∀R∀S∀A∀B ($(R^{D}) \equiv A$ & R ≣ S & $A \equiv B \Rightarrow (S^{D}) \equiv B$) ¡

R,**S**,**A**,**B** ,! 1 (Prem) ¡

(**R**^{D}) ≡ **A** & **R** ≣ **S** & **A** ≡ **B** ,! 2 (Prem) ¡

(**R**^{D}) ≡ **A** & **R** ≣ **S** ,! 3 (&E: 2) ¡

A ≡ **B** ,! 4 (&E) ¡

((**R**^{D}) ≡ **A** & **R** ≣ **S** ⇒ (**S**^{D}) ≡ **A**) ,! 5 (∀E: P16) ¡

(**R**^{D}) ≡ **A** & **R** ≣ **S** ⇒ (**S**^{D}) ≡ **A** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**S**^{D}) ≡ **A** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**S**^{D}) ≡ **A** & **A** ≡ **B** ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**S**^{D}) ≡ **A** & **A** ≡ **B** ⇒ (**S**^{D}) ≡ **B**) ,! 9 (∀E: II1.15) ¡

(**S**^{D}) ≡ **A** & **A** ≡ **B** ⇒ (**S**^{D}) ≡ **B** ,! 10 (()E: 9) ¡

(**S**^{D}) ≡ **B** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(**R**^{D}) ≡ **A** & **R** ≣ **S** & **A** ≡ **B** ⇒ (**S**^{D}) ≡ **B** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((**R**^{D}) ≡ **A** & **R** ≣ **S** & **A** ≡ **B** ⇒ (**S**^{D}) ≡ **B**)
,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀A∀B ((R^{D}) ≡ A & R ≣ S & A ≡ B ⇒ (S^{D}) ≡ B)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **18.** P18 is a lemma for P19. ¡

⊢ ∀R∀S∀x (((R ⊔ S)^{D})[x] ⇒ (R^{D})[x] ∨ (S^{D})[x]) ¡

R,**S**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** ⊔ **S**)^{D})[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

(((**R** ⊔ **S**)^{D})[**x**] ⇒ ∃y (**R** ⊔ **S**)[**x**,y]) ,! 3 (∀E: P3) ¡

((**R** ⊔ **S**)^{D})[**x**] ⇒ ∃y (**R** ⊔ **S**)[**x**,y] ,! 4 (()E: 3) ¡

∃y (**R** ⊔ **S**)[**x**,y] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ,! 6 (∃E: 5) ¡

((**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**]) ,! 7 (∀E: C2.3) ¡

(**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**] ,! 8 (()E: 7) ¡

R[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

$R[x,y]$,! 10 (Prem) ¡

$(R[x,y] \Rightarrow (R^D)[x])$,! 11 (∀E: P5) ¡

$R[x,y] \Rightarrow (R^D)[x]$,! 12 (()E: 11) ¡

$(R^D)[x]$,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

$(R^D)[x] \vee (S^D)[x]$,! 14 (∨I: 13) ¡

$R[x,y] \Rightarrow (R^D)[x] \vee (S^D)[x]$,! 15 (⇒I: 10,14) ¡

$S[x,y]$,! 16 (Prem) ¡

$(S[x,y] \Rightarrow (S^D)[x])$,! 17 (∀E: P5) ¡

$S[x,y] \Rightarrow (S^D)[x]$,! 18 (()E: 17) ¡

$(S^D)[x]$,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

$(R^D)[x] \vee (S^D)[x]$,! 20 (∨I: 19) ¡

$S[x,y] \Rightarrow (R^D)[x] \vee (S^D)[x]$,! 21 (⇒I: 16,20) ¡

$(R^D)[x] \vee (S^D)[x]$,! 22 (∨E: 9,15,21) ¡

$((R \sqcup S)^D)[x] \Rightarrow (R^D)[x] \vee (S^D)[x]$,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

$(((R \sqcup S)^D)[x] \Rightarrow (R^D)[x] \vee (S^D)[x])$,! 24 (()I: 23) ¡

$\forall R \forall S \forall x\ (((R \sqcup S)^D)[x] \Rightarrow (R^D)[x] \vee (S^D)[x])$
! 25 (∀I: 1,24) ¡

▯

! **19.** ¡

$\vdash \forall R \forall S\ ((R \sqcup S)^D) \equiv ((R^D) \cup (S^D))$ ¡

R,S ,! 1 (Prem) ¡

! To show: $((R^D) \cup (S^D)) \subseteq ((R \sqcup S)^D)$ ¡

$R \subseteqq (R \sqcup S)$,! 2 (∀E: C2.7) ¡

$(R \subseteqq (R \sqcup S) \Rightarrow (R^D) \subseteq ((R \sqcup S)^D))$,! 3 (∀E: P14) ¡

$R \subseteqq (R \sqcup S) \Rightarrow (R^D) \subseteq ((R \sqcup S)^D)$,! 4 (()E: 3) ¡

$(R^D) \subseteq ((R \sqcup S)^D)$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$S \subseteqq (R \sqcup S)$,! 6 (∀E: C2.8) ¡

$(\mathbf{S} \subseteqq (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S}) \Rightarrow (\mathbf{S}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}))$,! 7 (∀E: P14) ¡

$\mathbf{S} \subseteqq (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S}) \Rightarrow (\mathbf{S}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})$,! 8 (()E: 7) ¡

$(\mathbf{S}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})$,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \;\&\; (\mathbf{S}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})$,! 10 (&I: 5,9) ¡

$((\mathbf{R}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \;\&\; (\mathbf{S}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})$
$\Rightarrow ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D})) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}))$
,! 11 (∀E: II2.14) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \;\&\; (\mathbf{S}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})$
$\Rightarrow ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D})) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})$
,! 12 (()E: 11) ¡

$((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D})) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})$,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

! To show: $((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \subseteq ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))$ ¡

$\mathbf{x}$,! 14 (Prem) ¡

$((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}]$,! 15 (Prem) ¡

$(((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}])$
,! 16 (∀E: P18) ¡

$((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}]$,! 17 (()E: 16) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}]$,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

$((\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))[\mathbf{x}])$
,! 19 (∀E: II2.4) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))[\mathbf{x}]$
,! 20 (()E: 19) ¡

$((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))[\mathbf{x}]$,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

$((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))[\mathbf{x}]$,! 22 (⇒I: 15,21) ¡

$(((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))[\mathbf{x}])$,! 23 (()I: 22) ¡

$\forall x (((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})[x] \Rightarrow ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))[x])$
,! 24 (∀I: 14,23) ¡

$((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \subseteq ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))$,! 25 (𝕊I: II1.1,24)
¡

! Conclusion ¡

$((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \subseteq ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D})) \;\&\; ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D})) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})$
,! 26 (&I: 13,25) ¡

$(((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \subseteq ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D})) \;\&\; ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D})) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})$
$\Rightarrow ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \equiv ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D})))$
,! 27 (∀E: II1.8) ¡

$((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \subseteq ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D})) \;\&\; ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D})) \subseteq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D})$
$\Rightarrow ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \equiv ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))$
,! 28 (()E: 27) ¡

$((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \equiv ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))$,! 29 (⇒E: 26,28) ¡

$\forall R \forall S \; ((R \sqcup S)^{D}) \equiv ((R^{D}) \cup (S^{D}))$! 30 (∀I: 1,29) ¡

□

! **20.** ¡

$\vdash \forall R \forall S \forall A \forall B \; ((R^{D}) \equiv A \;\&\; (S^{D}) \equiv B \Rightarrow ((R \sqcup S)^{D}) \equiv (A \cup B))$ ¡

R,S,A,B ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A} \;\&\; (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B}$,! 2 (Prem) ¡

$((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \equiv ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))$,! 3 (∀E: P19) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A} \;\&\; (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B} \;\&\; ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \equiv ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))$
,! 4 (&I: 2,3) ¡

$((\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A} \;\&\; (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B} \;\&\; ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \equiv ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))$
$\Rightarrow ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}))$
,! 5 (∀E: II2.40) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A} \;\&\; (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B} \;\&\; ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \equiv ((\mathbf{R}^{D}) \cup (\mathbf{S}^{D}))$
$\Rightarrow ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$
,! 6 (()E: 5) ¡

$((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A} \;\&\; (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B} \Rightarrow ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$
,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

$((\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A} \;\&\; (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B} \Rightarrow ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}))$
,! 9 (()I: 8) ¡

$\forall R \forall S \forall A \forall B \; ((R^{D}) \equiv A \;\&\; (S^{D}) \equiv B \Rightarrow ((R \sqcup S)^{D}) \equiv (A \cup B))$
! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **21.** ¡

$\vdash (\Phi^{D}) \subseteq \phi$ ¡

$(\forall x\forall y(\Phi[x,y] \Rightarrow \phi[x]) \Rightarrow (\Phi^{D}) \subseteq \phi)$,! 1 (∀E: P10) ¡

$\forall x\forall y(\Phi[x,y] \Rightarrow \phi[x]) \Rightarrow (\Phi^{D}) \subseteq \phi$,! 2 (()E: 1) ¡

  $\mathbf{x}$,! 3 (Prem) ¡

    $\Phi[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 4 (Prem) ¡

      $\neg\ \phi[\mathbf{x}]$,! 5 (Prem) ¡

      $\neg\ \Phi[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 6 (∀E: C4.3) ¡

      $\mathfrak{F}$,! 7 ($\mathfrak{F}$I: 4,6) ¡

    $\neg\ \phi[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathfrak{F}$,! 8 (⇒I: 5,7) ¡

    $\neg\neg\ \phi[\mathbf{x}]$,! 9 (¬I: 8) ¡

    $\phi[\mathbf{x}]$,! 10 (¬E: 9) ¡

  $\Phi[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow \phi[\mathbf{x}]$,! 11 (⇒I: 4,10) ¡

  $(\Phi[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow \phi[\mathbf{x}])$,! 12 (()I: 11) ¡

$\forall x\forall y(\Phi[x,y] \Rightarrow \phi[x])$,! 13 (∀I: 3,12) ¡

$(\Phi^{D}) \subseteq \phi$! 14 (⇒E: 2,13) ¡

▯

! **22.** ¡

$\vdash (\Phi^{D}) \equiv \phi$ ¡

$((\Phi^{D}) \subseteq \phi \Rightarrow (\Phi^{D}) \equiv \phi)$,! 1 (∀E: II5.10) ¡

$(\Phi^{D}) \subseteq \phi \Rightarrow (\Phi^{D}) \equiv \phi$,! 2 (()E: 1) ¡

$(\Phi^{D}) \equiv \phi$! 3 (⇒E: P21,2) ¡

▯

! **23.** An alternative approach (expending the same number of steps) would be to apply P16 after first showing that Φ ≣ **R**. ¡

$\vdash \forall R\ (R$ ≣ $\Phi \Rightarrow (R^{D}) \equiv \phi)$ ¡

  $\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

    $\mathbf{R}$ ≣ Φ ,! 2 (Prem) ¡

    $(\mathbf{R}$ ≣ $\Phi \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \equiv (\Phi^{D}))$,! 3 (∀E: P15) ¡

    $\mathbf{R}$ ≣ $\Phi \Rightarrow (\mathbf{R}^{D}) \equiv (\Phi^{D})$,! 4 (()E: 3) ¡

(**R**^{D}) ≡ (Φ^{D}) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**R**^{D}) ≡ (Φ^{D}) & (Φ^{D}) ≡ φ ,! 6 (&I: P22,5) ¡

((**R**^{D}) ≡ (Φ^{D}) & (Φ^{D}) ≡ φ ⇒ (**R**^{D}) ≡ φ)
,! 7 (∀E: II1.15) ¡

(**R**^{D}) ≡ (Φ^{D}) & (Φ^{D}) ≡ φ ⇒ (**R**^{D}) ≡ φ ,! 8 (()E: 7) ¡

(**R**^{D}) ≡ φ ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

R ≣ Φ ⇒ (**R**^{D}) ≡ φ ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(**R** ≣ Φ ⇒ (**R**^{D}) ≡ φ) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀R (R ≣ Φ ⇒ (R^{D}) ≡ φ) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **24.** ¡

⊢ ∀R ((R^{D}) ≡ φ ⇒ R ≣ Φ) ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

(**R**^{D}) ≡ φ ,! 2 (Prem) ¡

(¬ ∃x∃y **R**[x,y] ⇒ **R** ≣ Φ) ,! 3 (∀E: C4.9) ¡

¬ ∃x∃y **R**[x,y] ⇒ **R** ≣ Φ ,! 4 (()E: 3) ¡

∃x∃y **R**[x,y] ,! 5 (Prem) ¡

∃y **R**[**x**,y] ,! 6 (∃E: 5) ¡

(∃y **R**[**x**,y] ⇒ (**R**^{D})[**x**]) ,! 7 (∀E: P4) ¡

∃y **R**[**x**,y] ⇒ (**R**^{D})[**x**] ,! 8 (()E: 7) ¡

(**R**^{D})[**x**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

((**R**^{D}) ≡ φ ⇒ ∀x ¬ (**R**^{D})[x]) ,! 10 (∀E II5.5) ¡

(**R**^{D}) ≡ φ ⇒ ∀x ¬ (**R**^{D})[x] ,! 11 (()E: 10) ¡

∀x ¬ (**R**^{D})[x] ,! 12 (⇒E: 2,11) ¡

¬ (**R**^{D})[**x**] ,! 13 (∀E: 12) ¡

𝔉 ,! 14 (𝔉I: 9,13) ¡

∃x∃y **R**[x,y] ⇒ 𝔉 ,! 15 (⇒I: 5,14) ¡

¬ ∃x∃y **R**[x,y] ,! 16 (¬I: 15) ¡

R ≣ Φ ,! 17 (⇒E: 4,16) ¡

($\mathbf{R}^{D}$) ≡ ϕ ⇒ **R** ≣ Φ ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(($\mathbf{R}^{D}$) ≡ ϕ ⇒ **R** ≣ Φ) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀R ((R^{D}) ≡ ϕ ⇒ R ≣ Φ) ! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **25.** The alternative proof, which appeals to P13, is longer. ¡

⊢ ∀R (∀x∃y R[x,y] ⇒ (R^{D}) ≡ $\mathbb{U}$) ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

∀x∃y **R**[x,y] ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

∃y **R**[**x**,y] ,! 4 (∀E: 2) ¡

(∃y **R**[**x**,y] ⇒ ($\mathbf{R}^{D}$)[**x**]) ,! 5 (∀E: P4) ¡

∃y **R**[**x**,y] ⇒ ($\mathbf{R}^{D}$)[**x**] ,! 6 (()E: 5) ¡

($\mathbf{R}^{D}$)[**x**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀x ($\mathbf{R}^{D}$)[x] ,! 8 (∀I: 3,7) ¡

(∀x ($\mathbf{R}^{D}$)[x] ⇒ ($\mathbf{R}^{D}$) ≡ $\mathbb{U}$) ,! 9 (∀E: II6.9) ¡

∀x ($\mathbf{R}^{D}$)[x] ⇒ ($\mathbf{R}^{D}$) ≡ $\mathbb{U}$,! 10 (()E: 9) ¡

($\mathbf{R}^{D}$) ≡ $\mathbb{U}$,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

∀x∃y **R**[x,y] ⇒ ($\mathbf{R}^{D}$) ≡ $\mathbb{U}$,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(∀x∃y **R**[x,y] ⇒ ($\mathbf{R}^{D}$) ≡ $\mathbb{U}$) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R (∀x∃y R[x,y] ⇒ (R^{D}) ≡ $\mathbb{U}$) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯