!**CHAPTER 4**

A DYADIC EMPTY PREDICATE¡

! The purpose of this chapter is to introduce an empty two-place predicate, Φ, which nothing bears to anything. ¡

! **1.** Φ is chosen as a representation of an empty two-place predicate. ¡

𝔻 Φ ; Φ ; ; {a,b : ¬ a = a} ¡

! **2.** ¡

⊢ ∀x∀y (Φ[x,y] ⇔ ¬ x = x) ¡

∀x∀y({a,b : ¬ a = a}[x,y] ⇔ ¬ x = x) ,! 1 (Pred) ¡

∀x∀y (Φ[x,y] ⇔ ¬ x = x) ! 2 (𝔻I: P1,1) ¡

▯

! **3.** P3 asserts that in fact nothing bears Φ to anything. ¡

⊢ ∀x∀y ¬ Φ[x,y] ¡

x,**y** ,! 1 (Prem) ¡

Φ[**x**,**y**] ,! 2 (Prem) ¡

(Φ[**x**,**y**] ⇔ ¬ **x** = **x**) ,! 3 (∀E: P2) ¡

Φ[**x**,**y**] ⇔ ¬ **x** = **x** ,! 4 (()E: 3) ¡

Φ[**x**,**y**] ⇒ ¬ **x** = **x** ,! 5 (⇔E: 4) ¡

¬ **x** = **x** ,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

x = **x** ,! 7 (=I) ¡

ℑ ,! 8 (ℑI: 6,7) ¡

Φ[**x**,**y**] ⇒ ℑ ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

¬ Φ[**x**,**y**] ,! 10 (¬I: 9) ¡

∀x∀y ¬ Φ[x,y] ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **4.** ¡

⊢ ∀R (R ≣ Φ ⇒ ∀x∀y ¬ R[x,y]) ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ Φ ,! 2 (Prem) ¡

x, **y** ,! 3 (Prem) ¡

R[**x**, **y**] ,! 4 (Prem) ¡

R[**x**, **y**] & **R** ≣ Φ ,! 5 (&I: 2,4) ¡

(**R**[**x**, **y**] & **R** ≣ Φ ⇒ Φ[**x**, **y**]) ,! 6 (∀E: C1.20) ¡

R[**x**, **y**] & **R** ≣ Φ ⇒ Φ[**x**, **y**] ,! 7 (()E: 6) ¡

Φ[**x**, **y**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

¬ Φ[**x**, **y**] ,! 9 (∀E: P3) ¡

ℑ ,! 10 (ℑI: 8,9) ¡

R[**x**, **y**] ⇒ ℑ ,! 11 (⇒I: 4,10) ¡

¬ **R**[**x**, **y**] ,! 12 (¬I: 11) ¡

∀x∀y ¬ **R**[x, y] ,! 13 (∀I: 3,12) ¡

R ≣ Φ ⇒ ∀x∀y ¬ **R**[x, y] ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(**R** ≣ Φ ⇒ ∀x∀y ¬ **R**[x, y]) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀R (R ≣ Φ ⇒ ∀x∀y ¬ R[x, y]) ! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **5.** ¡

⊦ ∀R (R ≣ Φ ⇒ ¬ ∃x∃y R[x, y]) ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ Φ ,! 2 (Prem) ¡

(**R** ≣ Φ ⇒ ∀x∀y ¬ **R**[x, y]) ,! 3 (∀E: P4) ¡

R ≣ Φ ⇒ ∀x∀y ¬ **R**[x, y] ,! 4 (()E: 3) ¡

∀x∀y ¬ **R**[x, y] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃x∃y **R**[x, y] ,! 6 (Prem) ¡

∃y **R**[**x**, y] ,! 7 (∃E: 6) ¡

R[**x**, **y**] ,! 8 (∃E: 7) ¡

¬ **R**[**x**, **y**] ,! 9 (∀E: 5) ¡

ℑ ,! 10 (ℑI: 8,9) ¡

∃x∃y **R**[x, y] ⇒ ℑ ,! 11 (⇒I: 6,10) ¡

¬ ∃x∃y **R**[x,y] ,! 12 (¬I: 11) ¡

R ≡ Φ ⇒ ¬ ∃x∃y **R**[x,y] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(**R** ≡ Φ ⇒ ¬ ∃x∃y **R**[x,y]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀R (R ≡ Φ ⇒ ¬ ∃x∃y R[x,y]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **6.** ¡

⊢ ∀R Φ ⊆ R ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

x,**y** ,! 2 (Prem) ¡

Φ[**x**,**y**] ,! 3 (Prem) ¡

¬ **R**[**x**,**y**] ,! 4 (Prem) ¡

¬ Φ[**x**,**y**] ,! 5 (∀E: P3) ¡

𝔉 ,! 6 (𝔉I: 4,5) ¡

¬ **R**[**x**,**y**] ⇒ 𝔉 ,! 7 (⇒I: 4,6) ¡

¬¬ **R**[**x**,**y**] ,! 8 (¬I: 7) ¡

R[**x**,**y**] ,! 9 (¬E: 8) ¡

Φ[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ,! 10 (⇒I: 3,9) ¡

(Φ[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀x,y (Φ[x,y] ⇒ **R**[x,y]) ,! 12 (∀I: 2,11) ¡

Φ ⊆ **R** ,! 13 (𝕊I: C1.1,12) ¡

∀R Φ ⊆ R ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **7.** ¡

⊢ ∀R (R ⊆ Φ ⇒ R ≡ Φ) ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

R ⊆ Φ ,! 2 (Prem) ¡

Φ ⊆ **R** ,! 3 (∀E: P6) ¡

R ⊆ Φ & Φ ⊆ **R** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ⊆ Φ & Φ ⊆ **R** ⇒ **R** ≡ Φ) ,! 5 (∀E: C1.6) ¡

R ⊆ Φ & Φ ⊆ **R** ⇒ **R** ≡ Φ ,! 6 (()E: 5) ¡

R ≡ Φ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R ⊆ Φ ⇒ **R** ≡ Φ ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**R** ⊆ Φ ⇒ **R** ≡ Φ) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R (R ⊆ Φ ⇒ R ≡ Φ) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **8.** ¡

⊢ ∀R (∀x∀y ¬ R[x,y] ⇒ R ≡ Φ) ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

∀x∀y ¬ **R**[x,y] ,! 2 (Prem) ¡

x,**y** ,! 3 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 4 (Prem) ¡

¬ Φ[**x**,**y**] ,! 5 (Prem) ¡

¬ **R**[**x**,**y**] ,! 6 (∀E: 2) ¡

ℱ ,! 7 (ℱI: 4,6) ¡

¬ Φ[**x**,**y**] ⇒ ℱ ,! 8 (⇒I: 5,7) ¡

¬¬ Φ[**x**,**y**] ,! 9 (¬I: 8) ¡

Φ[**x**,**y**] ,! 10 (¬E: 9) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ Φ[**x**,**y**] ,! 11 (⇒I: 4,10) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ Φ[**x**,**y**]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀x∀y (**R**[x,y] ⇒ Φ[x,y]) ,! 13 (∀I: 3,12) ¡

R ⊆ Φ ,! 14 (𝕊I: C1.1,13) ¡

(**R** ⊆ Φ ⇒ **R** ≡ Φ) ,! 15 (∀E: P7) ¡

R ⊆ Φ ⇒ **R** ≡ Φ ,! 16 (()E: 15) ¡

R ≡ Φ ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

∀x∀y ¬ **R**[x,y] ⇒ **R** ≡ Φ ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(∀x∀y ¬ **R**[x,y] ⇒ **R** ≡ Φ) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀R (∀x∀y ¬ R[x,y] ⇒ R ≣ Φ) ! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **9.** ¡

⊦ ∀R (¬ ∃x∃y R[x,y] ⇒ R ≣ Φ) ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

¬ ∃x∃y **R**[x,y] ,! 2 (Prem) ¡

x,**y** ,! 3 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 4 (Prem) ¡

∃y **R**[**x**,y] ,! 5 (∃I: 4) ¡

∃x∃y **R**[x,y] ,! 6 (∃I: 5) ¡

ℱ ,! 7 (ℱI: 2,6) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ ℱ ,! 8 (⇒I: 4,7) ¡

¬ **R**[**x**,**y**] ,! 9 (¬I: 8) ¡

∀x∀y ¬ **R**[x,y] ,! 10 (∀I: 3,9) ¡

(∀x∀y ¬ **R**[x,y] ⇒ **R** ≣ Φ) ,! 11 (∀E: P8) ¡

∀x∀y ¬ **R**[x,y] ⇒ **R** ≣ Φ ,! 12 (()E: 11) ¡

R ≣ Φ ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

¬ ∃x∃y **R**[x,y] ⇒ **R** ≣ Φ ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(¬ ∃x∃y **R**[x,y] ⇒ **R** ≣ Φ) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀R (¬ ∃x∃y R[x,y] ⇒ R ≣ Φ) ! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **10.** ¡

⊦ ∀R (R ⊔ Φ) ≣ R ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ (**R** ⊔ Φ) ,! 2 (∀E: C2.7) ¡

(**R** ⫅ **R** & Φ ⫅ **R** ⇒ (**R** ⊔ Φ) ⫅ **R**) ,! 3 (∀E: C2.9) ¡

R ⫅ **R** & Φ ⫅ **R** ⇒ (**R** ⊔ Φ) ⫅ **R** ,! 4 (()E: 3) ¡

R ⫅ **R** ,! 5 (∀E: C1.3) ¡

Φ ⊆ **R** ,! 6 (∀E: P6) ¡

R ⊆ **R** & Φ ⊆ **R** ,! 7 (&I: 5,6) ¡

(**R** ⊔ Φ) ⊆ **R** ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

(**R** ⊔ Φ) ⊆ **R** & **R** ⊆ (**R** ⊔ Φ) ,! 9 (&I: 2,8) ¡

((**R** ⊔ Φ) ⊆ **R** & **R** ⊆ (**R** ⊔ Φ) ⇒ (**R** ⊔ Φ) ≡ **R**)
,! 10 (∀E: C1.6) ¡

(**R** ⊔ Φ) ⊆ **R** & **R** ⊆ (**R** ⊔ Φ) ⇒ (**R** ⊔ Φ) ≡ **R**
,! 11 (()E: 10) ¡

(**R** ⊔ Φ) ≡ **R** ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

∀R (R ⊔ Φ) ≡ R ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **11.** ¡

⊢ ∀R (Φ ⊔ R) ≡ R ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

(**R** ⊔ Φ) ≡ **R** ,! 2 (∀E: P10) ¡

(**R** ⊔ Φ) ≡ (Φ ⊔ **R**) ,! 3 (∀E: C2.6) ¡

(**R** ⊔ Φ) ≡ (Φ ⊔ **R**) & (**R** ⊔ Φ) ≡ **R** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**R** ⊔ Φ) ≡ (Φ ⊔ **R**) & (**R** ⊔ Φ) ≡ **R** ⇒ (Φ ⊔ **R**) ≡ **R**)
,! 5 (∀E: C1.18) ¡

(**R** ⊔ Φ) ≡ (Φ ⊔ **R**) & (**R** ⊔ Φ) ≡ **R** ⇒ (Φ ⊔ **R**) ≡ **R**
,! 6 (()E: 5) ¡

(Φ ⊔ **R**) ≡ **R** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀R (Φ ⊔ R) ≡ R ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **12.** ¡

⊢ ∀R∀S (S ≡ Φ ⇒ (R ⊔ S) ≡ R) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

S ≡ Φ ,! 2 (Prem) ¡

(**S** ≡ Φ ⇒ (**R** ⊔ **S**) ≡ (**R** ⊔ Φ)) ,! 3 (∀E: C2.14) ¡

S ≣ Φ ⇒ (**R** ⊔ **S**) ≣ (**R** ⊔ Φ) ,! 4 (()E: 3) ¡

(**R** ⊔ **S**) ≣ (**R** ⊔ Φ) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**R** ⊔ Φ) ≣ **R** ,! 6 (∀E: P10) ¡

(**R** ⊔ **S**) ≣ (**R** ⊔ Φ) & (**R** ⊔ Φ) ≣ **R** ,! 7 (&I: 5,6) ¡

((**R** ⊔ **S**) ≣ (**R** ⊔ Φ) & (**R** ⊔ Φ) ≣ **R** ⇒ (**R** ⊔ **S**) ≣ **R**)
,! 8 (∀E: C1.15) ¡

(**R** ⊔ **S**) ≣ (**R** ⊔ Φ) & (**R** ⊔ Φ) ≣ **R** ⇒ (**R** ⊔ **S**) ≣ **R**
,! 9 (()E: 8) ¡

(**R** ⊔ **S**) ≣ **R** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

S ≣ Φ ⇒ (**R** ⊔ **S**) ≣ **R** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(**S** ≣ Φ ⇒ (**R** ⊔ **S**) ≣ **R**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀R∀S (S ≣ Φ ⇒ (R ⊔ S) ≣ R) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **13.** ¡

⊦ ∀R∀S (S ≣ Φ ⇒ (S ⊔ R) ≣ R) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

S ≣ Φ ,! 2 (Prem) ¡

(**S** ≣ Φ ⇒ (**R** ⊔ **S**) ≣ **R**) ,! 3 (∀E: P12) ¡

S ≣ Φ ⇒ (**R** ⊔ **S**) ≣ **R** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**R** ⊔ **S**) ≣ **R** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**R** ⊔ **S**) ≣ (**S** ⊔ **R**) ,! 6 (∀E: C2.6) ¡

(**R** ⊔ **S**) ≣ (**S** ⊔ **R**) & (**R** ⊔ **S**) ≣ **R** ,! 7 (&I: 5,6) ¡

((**R** ⊔ **S**) ≣ (**S** ⊔ **R**) & (**R** ⊔ **S**) ≣ **R** ⇒ (**S** ⊔ **R**) ≣ **R**)
,! 8 (∀E: C1.18) ¡

(**R** ⊔ **S**) ≣ (**S** ⊔ **R**) & (**R** ⊔ **S**) ≣ **R** ⇒ (**S** ⊔ **R**) ≣ **R**
,! 9 (()E: 8) ¡

(**S** ⊔ **R**) ≣ **R** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

S ≣ Φ ⇒ (**S** ⊔ **R**) ≣ **R** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(**S** ≣ Φ ⇒ (**S** ⊔ **R**) ≣ **R**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀R∀S (S ≣ Φ ⇒ (S ⊔ R) ≣ R) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **14.** ¡

⊢ Φ ≣ (Φ*) ¡

(∀x∀y(Φ[x,y] ⇒ Φ[y,x]) ⇒ Φ ≣ (Φ*)) ,! 1 (∀E: C3.14) ¡

∀x∀y(Φ[x,y] ⇒ Φ[y,x]) ⇒ Φ ≣ (Φ*) ,! 2 (()E: 1) ¡

x,**y** ,! 3 (Prem) ¡

Φ[**x**,**y**] ,! 4 (Prem) ¡

¬ Φ[**y**,**x**] ,! 5 (Prem) ¡

¬ Φ[**x**,**y**] ,! 6 (∀E: P3) ¡

ℑ ,! 7 (ℑI: 4,6) ¡

¬ Φ[**y**,**x**] ⇒ ℑ ,! 8 (⇒I: 5,7) ¡

¬¬ Φ[**y**,**x**] ,! 9 (¬I: 8) ¡

Φ[**y**,**x**] ,! 10 (¬E: 9) ¡

Φ[**x**,**y**] ⇒ Φ[**y**,**x**] ,! 11 (⇒I: 4,10) ¡

(Φ[**x**,**y**] ⇒ Φ[**y**,**x**]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀x∀y(Φ[x,y] ⇒ Φ[y,x]) ,! 13 (∀I: 3,12) ¡

Φ ≣ (Φ*) ! 14 (⇒E: 2,13) ¡

▯

! **15.** ¡

⊢ ∀R ((R*) ≣ Φ ⇒ R ≣ Φ) ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

(**R***) ≣ Φ ,! 2 (Prem) ¡

((**R***) ≣ Φ ⇒ (Φ*) ≣ **R**) ,! 3 (∀E: C3.23) ¡

(**R***) ≣ Φ ⇒ (Φ*) ≣ **R** ,! 4 (()E: 3) ¡

(Φ*) ≣ **R** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

Φ ≣ (Φ*) & (Φ*) ≣ **R** ,! 6 (&I: P14,5) ¡

(Φ ≣ (Φ*) & (Φ*) ≣ **R** ⇒ **R** ≣ Φ) ,! 7 (∀E: C1.16) ¡

$\Phi \equiv (\Phi^*)\ \&\ (\Phi^*) \equiv \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \Phi$,! 8 (()E: 7) ¡

$\mathbf{R} \equiv \Phi$,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

$(\mathbf{R}^*) \equiv \Phi \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \Phi$,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

$(\ (\mathbf{R}^*) \equiv \Phi \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \Phi\ )$,! 11 (()I: 10) ¡

$\forall R\ (\ (R^*) \equiv \Phi \Rightarrow R \equiv \Phi\ )$! 12 (∀I: 1,11) ¡

□