!CHAPTER 3

RELATIONAL INVERSES¡

! In this chapter relational inverses of (two-place) predicates are introduced. The relational inverse of **R** is written ($\mathbf{R}^*$). By definition, **x** bears ($\mathbf{R}^*$) to **y** if and only if **y** bears **R** to **x**. ¡

! Relational inverses are important because they facilitate the proofs of certain dualities, most notably between domains and images. Chapter 6 of this section will provide several examples of this technique. ¡

! **1.** * represents relational inverse (of dyadic predicates). ¡

𝔻 * ; ($\mathbf{R}^*$) ; ; {a,b : **R**[b,a]} ¡

! **2. Fundamental Proposition of Relational Inverses.** ¡

$\vdash \forall R\forall x\forall y\ (\ (R^*)[x,y] \Leftrightarrow R[y,x]\ )$ ¡

R	,! 1 (Prem)	¡
$\forall x\forall y\ (\ \{a,b : \mathbf{R}[b,a]\}[x,y] \Leftrightarrow \mathbf{R}[y,x]\ )$	,! 2 (Pred)	¡
$\forall x\forall y\ (\ (\mathbf{R}^*)[x,y] \Leftrightarrow \mathbf{R}[y,x]\ )$	,! 3 (𝔻I: P1,2)	¡
$\forall R\forall x\forall y\ (\ (R^*)[x,y] \Leftrightarrow R[y,x]\ )$	! 4 (∀I: 1,3)	¡

▯

! **3. Fundamental Proposition of Relational Inverses, First Half.** ¡

$\vdash \forall R\forall x\forall y\ (\ (R^*)[x,y] \Rightarrow R[y,x]\ )$ ¡

R,**x**,**y**	,! 1 (Prem)	¡
$(\ (\mathbf{R}^*)[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Leftrightarrow \mathbf{R}[\mathbf{y},\mathbf{x}]\ )$	,! 2 (∀E: P2)	¡
$(\mathbf{R}^*)[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Leftrightarrow \mathbf{R}[\mathbf{y},\mathbf{x}]$	,! 3 (()E: 2)	¡
$(\mathbf{R}^*)[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow \mathbf{R}[\mathbf{y},\mathbf{x}]$	,! 4 (⇔E: 3)	¡
$(\ (\mathbf{R}^*)[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow \mathbf{R}[\mathbf{y},\mathbf{x}]\ )$	,! 5 (()I: 4)	¡
$\forall R\forall x\forall y\ (\ (R^*)[x,y] \Rightarrow R[y,x]\ )$	! 6 (∀I: 1,5)	¡

▯

! **4. Fundamental Proposition of Relational Inverses, Second Half.** ¡

$\vdash \forall R\forall x\forall y\ (\ R[y,x] \Rightarrow (R^*)[x,y]\ )$ ¡

R,**x**,**y**	,! 1 (Prem)	¡

((**R***)[**x**,**y**] ⇔ **R**[**y**,**x**]) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**R***)[**x**,**y**] ⇔ **R**[**y**,**x**] ,! 3 (()E: 2) ¡

R[**y**,**x**] ⇒ (**R***)[**x**,**y**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(**R**[**y**,**x**] ⇒ (**R***)[**x**,**y**]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀R∀x∀y (R[y,x] ⇒ (R*)[x,y]) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **5.** ¡

⊢ ∀R∀z (∃x R[x,y] ⇔ ∃y (R*)[z,y]) ¡

R,**z** ,! 1 (Prem) ¡

∃x **R**[x,**z**] ,! 2 (Prem) ¡

R[**x**,**z**] ,! 3 (∃E: 2) ¡

(**R**[**x**,**z**] ⇒ (**R***)[**z**,**x**]) ,! 4 (∀E: P4) ¡

R[**x**,**z**] ⇒ (**R***)[**z**,**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

(**R***)[**z**,**x**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

∃y (**R***)[**z**,y] ,! 7 (∃I: 6) ¡

∃x **R**[x,**z**] ⇒ ∃y (**R***)[**z**,y] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

∃y (**R***)[**z**,y] ,! 9 (Prem) ¡

(**R***)[**z**,**y**] ,! 10 (∃E: 9) ¡

((**R***)[**z**,**y**] ⇒ **R**[**y**,**z**]) ,! 11 (∀E: P3) ¡

(**R***)[**z**,**y**] ⇒ **R**[**y**,**z**] ,! 12 (()E: 11) ¡

R[**y**,**z**] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

∃x **R**[x,**z**] ,! 14 (∃I: 13) ¡

∃y (**R***)[**z**,y] ⇒ ∃x **R**[x,**z**] ,! 15 (⇒I: 9,14) ¡

∃x **R**[x,**z**] ⇔ ∃y (**R***)[**z**,y] ,! 16 (⇔I: 8,15) ¡

(∃x **R**[x,**z**] ⇔ ∃y (**R***)[**z**,y]) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀R∀z (∃x R[x,y] ⇔ ∃y (R*)[z,y]) ! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! P6 and P7 are versions on the same theme. ¡

! 6. ¡

⊦ ∀R∀S∀x∀y ((R*) ⫅ S & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ¡

R,S,x,y ,! 1 (Prem) ¡

(R*) ⫅ S & R[x,y] ,! 2 (Prem) ¡

(R*) ⫅ S ,! 3 (&E: 2) ¡

R[x,y] ,! 4 (&E: 2) ¡

(R[x,y] ⇒ (R*)[y,x]) ,! 5 (∀E: P4) ¡

R[x,y] ⇒ (R*)[y,x] ,! 6 (()E: 5) ¡

(R*)[y,x] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(R*)[y,x] & (R*) ⫅ S ,! 8 (&I: 3,7) ¡

((R*)[y,x] & (R*) ⫅ S ⇒ S[y,x]) ,! 9 (∀E: C1.2) ¡

(R*)[y,x] & (R*) ⫅ S ⇒ S[y,x] ,! 10 (()E: 9) ¡

S[y,x] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(R*) ⫅ S & R[x,y] ⇒ S[y,x] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((R*) ⫅ S & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀x∀y ((R*) ⫅ S & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! 7. ¡

⊦ ∀R∀S∀x∀y (R ⫅ (S*) & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ¡

R,S,x,y ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ (S*) & R[x,y] ,! 2 (Prem) ¡

R ⫅ (S*) ,! 3 (&E: 2) ¡

R[x,y] ,! 4 (&E: 2) ¡

R[x,y] & R ⫅ (S*) ,! 5 (&I: 3,4) ¡

(R[x,y] & R ⫅ (S*) ⇒ (S*)[x,y]) ,! 6 (∀E: C1.2) ¡

R[x,y] & R ⫅ (S*) ⇒ (S*)[x,y] ,! 7 (()E: 6) ¡

(**S***)[**x**,**y**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

((**S***)[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**]) ,! 9 (∀E: P3) ¡

(**S***)[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**] ,! 10 (()E: 9) ¡

S[**y**,**x**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

R ⫅ (**S***) & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**R** ⫅ (**S***) & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀x∀y (R ⫅ (S*) & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! P8 and P9 are important, and subsequent to P14 are the only propositions prior to P14 which are appealed to. ¡

! **8.** ¡

⊦ ∀R∀S ((R*) ⫅ S ⇒ R ⫅ (S*)) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

(**R***) ⫅ **S** ,! 2 (Prem) ¡

x,**y** ,! 3 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 4 (Prem) ¡

(**R***) ⫅ **S** & **R**[**x**,**y**] ,! 5 (&I: 2,4) ¡

((**R***) ⫅ **S** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**]) ,! 6 (∀E: P6) ¡

(**R***) ⫅ **S** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**] ,! 7 (()E: 6) ¡

S[**y**,**x**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**S**[**y**,**x**] ⇒ (**S***)[**x**,**y**]) ,! 9 (∀E: P4) ¡

S[**y**,**x**] ⇒ (**S***)[**x**,**y**] ,! 10 (()E: 9) ¡

(**S***)[**x**,**y**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ (**S***)[**x**,**y**] ,! 12 (⇒I: 4,11) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ (**S***)[**x**,**y**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀x∀y (**R**[x,y] ⇒ (**S***)[x,y]) ,! 14 (∀I: 3,13) ¡

R ⫅ (**S***) ,! 15 (𝕊I: C1.1,14) ¡

(**R***) ⫅ **S** ⇒ **R** ⫅ (**S***) ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

((R*) ⫅ S ⇒ R ⫅ (S*)) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀R∀S ((R*) ⫅ S ⇒ R ⫅ (S*)) ,! 18 (∀I: 1,17) ¡

□

! 9. ¡

⊢ ∀R∀S (R ⫅ (S*) ⇒ (R*) ⫅ S) ¡

R,S ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ (S*) ,! 2 (Prem) ¡

x,y ,! 3 (Prem) ¡

(R*)[x,y] ,! 4 (Prem) ¡

((R*)[x,y] ⇒ R[y,x]) ,! 5 (∀E: P3) ¡

(R*)[x,y] ⇒ R[y,x] ,! 6 (()E: 5) ¡

R[y,x] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R ⫅ (S*) & R[y,x] ,! 8 (&I: 2,7) ¡

(R ⫅ (S*) & R[y,x] ⇒ S[x,y]) ,! 9 (∀E: P6) ¡

R ⫅ (S*) & R[y,x] ⇒ S[x,y] ,! 10 (()E: 9) ¡

S[x,y] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(R*)[x,y] ⇒ S[x,y] ,! 12 (⇒I: 4,11) ¡

((R*)[x,y] ⇒ S[x,y]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀x∀y ((R*)[x,y] ⇒ S[x,y]) ,! 14 (∀I: 3,13) ¡

(R*) ⫅ S ,! 15 (𝕊I: C1.1,14) ¡

R ⫅ (S*) ⇒ (R*) ⫅ S ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(R ⫅ (S*) ⇒ (R*) ⫅ S) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀R∀S (R ⫅ (S*) ⇒ (R*) ⫅ S) ,! 18 (∀I: 1,17) ¡

□

! P10 through P13 are versions on the same theme. ¡

! 10. ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y ((R*) ≡ S & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ¡

R,S,x,y ,! 1 (Prem) ¡

(**R***) ≣ **S** & **R**[**x**,**y**] ,! 2 (Prem) ¡

(**R***) ≣ **S** ,! 3 (&E: 2) ¡

R[**x**,**y**] ,! 4 (&E: 2) ¡

((**R***) ≣ **S** ⇒ (**R***) ⫅ **S**) ,! 5 (∀E: C1.9) ¡

(**R***) ≣ **S** ⇒ (**R***) ⫅ **S** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**R***) ⫅ **S** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**R***) ⫅ **S** & **R**[**x**,**y**] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**R***) ⫅ **S** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**]) ,! 9 (∀E: P6) ¡

(**R***) ⫅ **S** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**] ,! 10 (()E: 9) ¡

S[**y**,**x**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(**R***) ≣ **S** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((**R***) ≣ **S** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀x∀y ((R*) ≣ S & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **11.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y (S ≣ (R*) & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ¡

R,**S**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

S ≣ (**R***) & **R**[**x**,**y**] ,! 2 (Prem) ¡

S ≣ (**R***) ,! 3 (&E: 2) ¡

R[**x**,**y**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(**S** ≣ (**R***) ⇒ (**R***) ≣ **S**) ,! 5 (∀E: C1.8) ¡

S ≣ (**R***) ⇒ (**R***) ≣ **S** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**R***) ≣ **S** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**R***) ≣ **S** & **R**[**x**,**y**] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**R***) ≣ **S** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**]) ,! 9 (∀E: P10) ¡

(**R***) ≣ **S** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**] ,! 10 (()E) ¡

S[**y**,**x**] ,! 11 (⇒E) ¡

S ≣ (R*) & R[x,y] ⇒ S[y,x] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(S ≣ (R*) & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀x∀y (S ≣ (R*) & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **12.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y ((S*) ≣ R & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ¡

R,S,x,y ,! 1 (Prem) ¡

(S*) ≣ R & R[x,y] ,! 2 (Prem) ¡

(S*) ≣ R ,! 3 (&E: 2) ¡

R[x,y] ,! 4 (&E: 2) ¡

((S*) ≣ R ⇒ R ⫅ (S*)) ,! 5 (∀E: C1.10) ¡

(S*) ≣ R ⇒ R ⫅ (S*) ,! 6 (()E: 5) ¡

R ⫅ (S*) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

R ⫅ (S*) & R[x,y] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(R ⫅ (S*) & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ,! 9 (∀E: P7) ¡

R ⫅ (S*) & R[x,y] ⇒ S[y,x] ,! 10 (()E: 9) ¡

S[y,x] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(S*) ≣ R & R[x,y] ⇒ S[y,x] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((S*) ≣ R & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀x∀y ((S*) ≣ R & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **13.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y (R ≣ (S*) & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ¡

R,S,x,y ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ (S*) & R[x,y] ,! 2 (Prem) ¡

R ≣ (S*) ,! 3 (&E: 2) ¡

R[x,y] ,! 4 (&E: 2) ¡

(R ≣ (S*) ⇒ (S*) ≣ R) ,! 5 (∀E: C1.8) ¡

R ≣ (**S***) ⇒ (**S***) ≣ **R** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**S***) ≣ **R** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**S***) ≣ **R** & **R**[**x**,**y**] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**S***) ≣ **R** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**]) ,! 9 (∀E: P12) ¡

(**S***) ≣ **R** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**] ,! 10 (()E: 9) ¡

S[**y**,**x**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

R ≣ (**S***) & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**R** ≣ (**S***) & **R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**y**,**x**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀x∀y (R ≣ (S*) & R[x,y] ⇒ S[y,x]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **14.** P14 effectively contains a proof that **R** ⫅ (**R***) implies **R** ≣ (**R***). ¡

⊢ ∀R (∀x∀y(R[x,y] ⇒ R[y,x]) ⇒ R ≣ (R*)) ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

∀x∀y(**R**[x,y] ⇒ **R**[y,x]) ,! 2 (Prem) ¡

x,**y** ,! 3 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 4 (Prem) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ **R**[**y**,**x**]) ,! 5 (∀E: 2) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ **R**[**y**,**x**] ,! 6 (()E: 5) ¡

R[**y**,**x**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**R**[**y**,**x**] ⇒ (**R***)[**x**,**y**]) ,! 8 (∀E: P4) ¡

R[**y**,**x**] ⇒ (**R***)[**x**,**y**] ,! 9 (()E: 8) ¡

(**R***)[**x**,**y**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ (**R***)[**x**,**y**] ,! 11 (⇒I: 4,10) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ (**R***)[**x**,**y**]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀x∀y (**R**[x,y] ⇒ (**R***)[x,y]) ,! 13 (∀I: 3,12) ¡

R ⫅ (**R***) ,! 14 (𝕊I: C1.1,13) ¡

(R ⫅ (R*) ⇒ (R*) ⫅ R) ,! 15 (∀E: P9) ¡

R ⫅ (R*) ⇒ (R*) ⫅ R ,! 16 (()E: 15) ¡

(R*) ⫅ R ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

R ⫅ (R*) & (R*) ⫅ R ,! 18 (&I: 14,17) ¡

(R ⫅ (R*) & (R*) ⫅ R ⇒ R ≣ (R*)) ,! 19 (∀E: C1.6) ¡

R ⫅ (R*) & (R*) ⫅ R ⇒ R ≣ (R*) ,! 20 (()E: 19) ¡

R ≣ (R*) ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

∀x∀y(R[x,y] ⇒ R[y,x]) ⇒ R ≣ (R*) ,! 22 (⇒I: 2,21) ¡

(∀x∀y(R[x,y] ⇒ R[y,x]) ⇒ R ≣ (R*)) ,! 23 (()I: 22) ¡

∀R (∀x∀y(R[x,y] ⇒ R[y,x]) ⇒ R ≣ (R*)) ! 24 (∀I: 1,23) ¡

▯

! **15.** ¡

⊦ ∀R ((R*)*) ⫅ R ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

(R*) ⫅ (R*) ,! 2 (∀E: C1.3) ¡

((R*) ⫅ (R*) ⇒ ((R*)*) ⫅ R) ,! 3 (∀E: P9) ¡

(R*) ⫅ (R*) ⇒ ((R*)*) ⫅ R ,! 4 (()E: 3) ¡

((R*)*) ⫅ R ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀R ((R*)*) ⫅ R ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **16.** ¡

⊦ ∀R R ⫅ ((R*)*) ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

(R*) ⫅ (R*) ,! 2 (∀E: C1.3) ¡

((R*) ⫅ (R*) ⇒ R ⫅ ((R*)*)) ,! 3 (∀E: P8) ¡

(R*) ⫅ (R*) ⇒ R ⫅ ((R*)*) ,! 4 (()E: 3) ¡

R ⫅ ((R*)*) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$\forall R\ R \subseteqq ((R^*)^*)$! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **17. Bipotency of Relational Inverses (Relative to Equivalence), n1.** ¡

$\vdash \forall R\ ((R^*)^*) \equiv R$ ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

$((\mathbf{R}^*)^*) \subseteqq \mathbf{R}$,! 2 (∀E: P15) ¡

$\mathbf{R} \subseteqq ((\mathbf{R}^*)^*)$,! 3 (∀E: P16) ¡

$((\mathbf{R}^*)^*) \subseteqq \mathbf{R}\ \&\ \mathbf{R} \subseteqq ((\mathbf{R}^*)^*)$,! 4 (&I: 2,3) ¡

$(\ ((\mathbf{R}^*)^*) \subseteqq \mathbf{R}\ \&\ \mathbf{R} \subseteqq ((\mathbf{R}^*)^*) \Rightarrow ((\mathbf{R}^*)^*) \equiv \mathbf{R}\ )$
,! 5 (∀E: C1.6) ¡

$((\mathbf{R}^*)^*) \subseteqq \mathbf{R}\ \&\ \mathbf{R} \subseteqq ((\mathbf{R}^*)^*) \Rightarrow ((\mathbf{R}^*)^*) \equiv \mathbf{R}$
,! 6 (()E: 5) ¡

$((\mathbf{R}^*)^*) \equiv \mathbf{R}$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$\forall R\ ((R^*)^*) \equiv R$! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **18. Bipotency of Relational Inverses (Relative to Equivalence), n2.** ¡

$\vdash \forall R\ R \equiv ((R^*)^*)$ ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

$((\mathbf{R}^*)^*) \equiv \mathbf{R}$,! 2 (∀E: P17) ¡

$(\ ((\mathbf{R}^*)^*) \equiv \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} \equiv ((\mathbf{R}^*)^*)\ )$,! 3 (∀E: C1.8) ¡

$((\mathbf{R}^*)^*) \equiv \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} \equiv ((\mathbf{R}^*)^*)$,! 4 (()E: 3) ¡

$\mathbf{R} \equiv ((\mathbf{R}^*)^*)$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$\forall R\ R \equiv ((R^*)^*)$! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **19.** Relational inverses maintain inclusion. ¡

$\vdash \forall R \forall S\ (\ R \subseteqq S \Rightarrow (R^*) \subseteqq (S^*)\ )$ ¡

R,S ,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteqq \mathbf{S}$,! 2 (Prem) ¡

S ≣ ((**S***)*) ,! 3 (∀E: P18) ¡

R ⫅ **S** & **S** ≣ ((**S***)*) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ⫅ **S** & **S** ≣ ((**S***)*) ⇒ **R** ⫅ ((**S***)*))
,! 5 (∀E: C1.13) ¡

R ⫅ **S** & **S** ≣ ((**S***)*) ⇒ **R** ⫅ ((**S***)*) ,! 6 (()E: 5) ¡

R ⫅ ((**S***)*) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**R** ⫅ ((**S***)*) ⇒ (**R***) ⫅ (**S***)) ,! 8 (∀E: P9) ¡

R ⫅ ((**S***)*) ⇒ (**R***) ⫅ (**S***) ,! 9 (()E: 8) ¡

(**R***) ⫅ (**S***) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

R ⫅ **S** ⇒ (**R***) ⫅ (**S***) ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(**R** ⫅ **S** ⇒ (**R***) ⫅ (**S***)) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀R∀S (R ⫅ S ⇒ (R*) ⫅ (S*)) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **20.** Relational inverses maintain equivalence. ¡

⊦ ∀R∀S (R ≣ S ⇒ (R*) ≣ (S*)) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ **S** ,! 2 (Prem) ¡

(**R** ≣ **S** ⇒ **R** ⫅ **S** & **S** ⫅ **R**) ,! 3 (∀E: C1.11) ¡

R ≣ **S** ⇒ **R** ⫅ **S** & **S** ⫅ **R** ,! 4 (()E: 3) ¡

R ⫅ **S** & **S** ⫅ **R** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

R ⫅ **S** ,! 6 (&E: 5) ¡

(**R** ⫅ **S** ⇒ (**R***) ⫅ (**S***)) ,! 7 (∀E: P19) ¡

R ⫅ **S** ⇒ (**R***) ⫅ (**S***) ,! 8 (()E: 7) ¡

(**R***) ⫅ (**S***) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

S ⫅ **R** ,! 10 (&E: 5) ¡

(**S** ⫅ **R** ⇒ (**S***) ⫅ (**R***)) ,! 11 (∀E: P19) ¡

S ⫅ **R** ⇒ (**S***) ⫅ (**R***) ,! 12 (()E: 11) ¡

$(\mathbf{S}^*) \subseteqq (\mathbf{R}^*)$,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

$(\mathbf{R}^*) \subseteqq (\mathbf{S}^*)\ \&\ (\mathbf{S}^*) \subseteqq (\mathbf{R}^*)$,! 14 (&I: 9,13) ¡

$(\ (\mathbf{R}^*) \subseteqq (\mathbf{S}^*)\ \&\ (\mathbf{S}^*) \subseteqq (\mathbf{R}^*) \Rightarrow (\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*)\ )$
,! 15 (∀E: C1.6) ¡

$(\mathbf{R}^*) \subseteqq (\mathbf{S}^*)\ \&\ (\mathbf{S}^*) \subseteqq (\mathbf{R}^*) \Rightarrow (\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$
,! 16 (()E: 15) ¡

$(\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

$\mathbf{R} \equiv \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

$(\ \mathbf{R} \equiv \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*)\ )$,! 19 (()I: 18) ¡

$\forall R \forall S\ (\ R \equiv S \Rightarrow (R^*) \equiv (S^*)\ )$! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **21.** The relational inverse cancels around equivalence. ¡

⊢ $\forall R \forall S\ (\ (R^*) \equiv (S^*) \Rightarrow R \equiv S\ )$ ¡

$\mathbf{R},\mathbf{S}$,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$,! 2 (Prem) ¡

$(\ (\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*) \Rightarrow ((\mathbf{R}^*)^*) \equiv ((\mathbf{S}^*)^*)\ )$,! 3 (∀E: P20) ¡

$(\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*) \Rightarrow ((\mathbf{R}^*)^*) \equiv ((\mathbf{S}^*)^*)$,! 4 (()E: 3) ¡

$((\mathbf{R}^*)^*) \equiv ((\mathbf{S}^*)^*)$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$\mathbf{R} \equiv ((\mathbf{R}^*)^*)$,! 6 (∀E: P18) ¡

$\mathbf{R} \equiv ((\mathbf{R}^*)^*)\ \&\ ((\mathbf{R}^*)^*) \equiv ((\mathbf{S}^*)^*)$,! 7 (&I: 5,6) ¡

$((\mathbf{S}^*)^*) \equiv \mathbf{S}$,! 8 (∀E: P17) ¡

$\mathbf{R} \equiv ((\mathbf{R}^*)^*)\ \&\ ((\mathbf{R}^*)^*) \equiv ((\mathbf{S}^*)^*)\ \&\ ((\mathbf{S}^*)^*) \equiv \mathbf{S}$
,! 9 (&I: 7,8) ¡

$(\ \mathbf{R} \equiv ((\mathbf{R}^*)^*)\ \&\ ((\mathbf{R}^*)^*) \equiv ((\mathbf{S}^*)^*)\ \&\ ((\mathbf{S}^*)^*) \equiv \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \mathbf{S}\ )$
,! 10 (∀E: C1.19) ¡

$\mathbf{R} \equiv ((\mathbf{R}^*)^*)\ \&\ ((\mathbf{R}^*)^*) \equiv ((\mathbf{S}^*)^*)\ \&\ ((\mathbf{S}^*)^*) \equiv \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \mathbf{S}$
,! 11 (()E: 10) ¡

$\mathbf{R} \equiv \mathbf{S}$,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

$(\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*) \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \mathbf{S}$,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

($(\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*) \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \mathbf{S}$) ,! 14 (()I: 13) ¡

$\forall R \forall S$ ($(R^*) \equiv (S^*) \Rightarrow R \equiv S$) ! 15 ($\forall$I: 1,14) ¡

▯

! **22.** ¡

$\vdash \forall R \forall S$ ($R \equiv S \Leftrightarrow (R^*) \equiv (S^*)$) ¡

R,S ,! 1 (Prem) ¡

($\mathbf{R} \equiv \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$) ,! 2 ($\forall$E: P20) ¡

$\mathbf{R} \equiv \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$,! 3 (()E: 2) ¡

($(\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*) \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \mathbf{S}$) ,! 4 ($\forall$E: P21) ¡

$(\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*) \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \mathbf{S}$,! 5 (()E: 4) ¡

$\mathbf{R} \equiv \mathbf{S} \Leftrightarrow (\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$,! 6 ($\Leftrightarrow$I: 3,5) ¡

($\mathbf{R} \equiv \mathbf{S} \Leftrightarrow (\mathbf{R}^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$) ,! 7 (()I: 6) ¡

$\forall R \forall S$ ($R \equiv S \Leftrightarrow (R^*) \equiv (S^*)$) ! 8 ($\forall$I: 1,7) ¡

▯

! P23 through P26 are permutations on the same theme. ¡

! **23.** ¡

$\vdash \forall R \forall S$ ($(R^*) \equiv S \Rightarrow (S^*) \equiv R$) ¡

R,S ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{R}^*) \equiv \mathbf{S}$,! 2 (Prem) ¡

($(\mathbf{R}^*) \equiv \mathbf{S} \Rightarrow ((\mathbf{R}^*)^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$) ,! 3 ($\forall$E: P20) ¡

$(\mathbf{R}^*) \equiv \mathbf{S} \Rightarrow ((\mathbf{R}^*)^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$,! 4 (()E: 3) ¡

$((\mathbf{R}^*)^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$((\mathbf{R}^*)^*) \equiv \mathbf{R}$,! 6 ($\forall$E: P17) ¡

$((\mathbf{R}^*)^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$ & $((\mathbf{R}^*)^*) \equiv \mathbf{R}$,! 7 (&I: 5,6) ¡

($((\mathbf{R}^*)^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$ & $((\mathbf{R}^*)^*) \equiv \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{S}^*) \equiv \mathbf{R}$)
,! 8 ($\forall$E: C1.18) ¡

$((\mathbf{R}^*)^*) \equiv (\mathbf{S}^*)$ & $((\mathbf{R}^*)^*) \equiv \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{S}^*) \equiv \mathbf{R}$
,! 9 (()E: 8) ¡

(**S***) ≣ **R** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(**R***) ≣ **S** ⇒ (**S***) ≣ **R** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

((**R***) ≣ **S** ⇒ (**S***) ≣ **R**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀R∀S ((R*) ≣ S ⇒ (S*) ≣ R) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **24.** ¡

⊦ ∀R∀S ((R*) ≣ S ⇒ R ≣ (S*)) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

(**R***) ≣ **S** ,! 2 (Prem) ¡

((**R***) ≣ **S** ⇒ (**S***) ≣ **R**) ,! 3 (∀E: P23) ¡

(**R***) ≣ **S** ⇒ (**S***) ≣ **R** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**S***) ≣ **R** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**S***) ≣ **R** ⇒ **R** ≣ (**S***)) ,! 6 (∀E: C1.8) ¡

(**S***) ≣ **R** ⇒ **R** ≣ (**S***) ,! 7 (()E: 6) ¡

R ≣ (**S***) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**R***) ≣ **S** ⇒ **R** ≣ (**S***) ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((**R***) ≣ **S** ⇒ **R** ≣ (**S***)) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀R∀S ((R*) ≣ S ⇒ R ≣ (S*)) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **25.** ¡

⊦ ∀R∀S (R ≣ (S*) ⇒ S ≣ (R*)) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ (**S***) ,! 2 (Prem) ¡

(**R** ≣ (**S***) ⇒ (**S***) ≣ **R**) ,! 3 (∀E: C1.8) ¡

R ≣ (**S***) ⇒ (**S***) ≣ **R** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**S***) ≣ **R** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**S***) ≣ **R** ⇒ **S** ≣ (**R***)) ,! 6 (∀E: P24) ¡

(**S***) ≣ **R** ⇒ **S** ≣ (**R***) ,! 7 (()E: 6) ¡

S ≣ (**R***) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

R ≣ (**S***) ⇒ **S** ≣ (**R***) ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**R** ≣ (**S***) ⇒ **S** ≣ (**R***)) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀R∀S (R ≣ (S*) ⇒ S ≣ (R*)) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **26.** ¡

⊦ ∀R∀S (R ≣ (S*) ⇒ (R*) ≣ S) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ (**S***) ,! 2 (Prem) ¡

(**R** ≣ (**S***) ⇒ (**S***) ≣ **R**) ,! 3 (∀E: C1.8) ¡

R ≣ (**S***) ⇒ (**S***) ≣ **R** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**S***) ≣ **R** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**S***) ≣ **R** ⇒ (**R***) ≣ **S**) ,! 6 (∀E: P23) ¡

(**S***) ≣ **R** ⇒ (**R***) ≣ **S** ,! 7 (()E: 6) ¡

(**R***) ≣ **S** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

R ≣ (**S***) ⇒ (**R***) ≣ **S** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**R** ≣ (**S***) ⇒ (**R***) ≣ **S**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀R∀S (R ≣ (S*) ⇒ (R*) ≣ S) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **27.** The relational inverse distributes over union. The proof of P27 is similar to the proofs of DeMorgan's Laws for Complements in II.4. ¡

⊦ ∀R∀S ((R ⊔ S)*) ≣ ((R*) ⊔ (S*)) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

! First, show: ((**R** ⊔ **S**)*) ⫅ ((**R***) ⊔ (**S***)) ¡

(**R***) ⫅ ((**R***) ⊔ (**S***)) ,! 2 (∀E: C2.7) ¡

((**R***) ⫅ ((**R***) ⊔ (**S***)) ⇒ **R** ⫅ (((**R***) ⊔ (**S***))*))
,! 3 (∀E: P8) ¡

$(\mathbf{R}^*) \subseteqq ((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*)) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)$
,! 4 (()E: 3) ¡

$\mathbf{R} \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\mathbf{S}^*) \subseteqq ((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))$,! 6 (∀E: C2.8) ¡

$(\ (\mathbf{S}^*) \subseteqq ((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*)) \Rightarrow \mathbf{S} \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)\ )$
,! 7 (∀E: P8) ¡

$(\mathbf{S}^*) \subseteqq ((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*)) \Rightarrow \mathbf{S} \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)$
,! 8 (()E: 7) ¡

$\mathbf{S} \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)$,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

$\mathbf{R} \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)\ \&\ \mathbf{S} \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)$
,! 10 (&I: 5,9) ¡

$(\ \mathbf{R} \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)\ \&\ \mathbf{S} \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)$
$\quad \Rightarrow (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S}) \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)\ )$
,! 11 (∀E: C2.9) ¡

$\mathbf{R} \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)\ \&\ \mathbf{S} \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)$
$\Rightarrow (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S}) \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)$
,! 12 (()E: 11) ¡

$(\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S}) \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)$,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

$(\ (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S}) \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)$
$\quad \Rightarrow ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^*) \subseteqq ((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))\ )$
,! 14 (∀E: P9) ¡

$(\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S}) \subseteqq (((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))^*)$
$\Rightarrow ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^*) \subseteqq ((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))$
,! 15 (()E: 14) ¡

$((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^*) \subseteqq ((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*))$,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

! Second, show: $((\mathbf{R}^*) \sqcup (\mathbf{S}^*)) \subseteqq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^*)$ ¡

$\mathbf{R} \subseteqq (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})$,! 17 (∀E: C2.7) ¡

$(\ \mathbf{R} \subseteqq (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S}) \Rightarrow (\mathbf{R}^*) \subseteqq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^*)\ )$,! 18 (∀E: P19) ¡

$\mathbf{R} \subseteqq (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S}) \Rightarrow (\mathbf{R}^*) \subseteqq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^*)$,! 19 (()E: 18) ¡

$(\mathbf{R}^*) \subseteqq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^*)$,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

$\mathbf{S} \subseteqq (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})$,! 21 (∀E C2.8) ¡

$(\ \mathbf{S} \subseteqq (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S}) \Rightarrow (\mathbf{S}^*) \subseteqq ((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})^*)\ )$,! 22 (∀E: P19) ¡

S ⫅ (**R** ⊔ **S**) ⇒ (**S***) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*) ,! 23 (()E: 22) ¡

(**S***) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*) ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

(**R***) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*) & (**S***) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*) ,! 25 (&I: 20,24) ¡

((**R***) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*) & (**S***) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*)
⇒ ((**R***) ⊔ (**S***)) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*))
,! 26 (∀E: C2.9) ¡

(**R***) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*) & (**S***) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*)
⇒ ((**R***) ⊔ (**S***)) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*)
,! 27 (()E: 26) ¡

((**R***) ⊔ (**S***)) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*) ,! 28 (⇒E: 25,27) ¡

! Conclusion ¡

((**R** ⊔ **S**)*) ⫅ ((**R***) ⊔ (**S***)) & ((**R***) ⊔ (**S***)) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*)
,! 29 (&I: 16,28) ¡

(((**R** ⊔ **S**)*) ⫅ ((**R***) ⊔ (**S***)) & ((**R***) ⊔ (**S***)) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*)
⇒ ((**R** ⊔ **S**)*) ≣ ((**R***) ⊔ (**S***)))
,! 30 (∀E: C1.6) ¡

((**R** ⊔ **S**)*) ⫅ ((**R***) ⊔ (**S***)) & ((**R***) ⊔ (**S***)) ⫅ ((**R** ⊔ **S**)*)
⇒ ((**R** ⊔ **S**)*) ≣ ((**R***) ⊔ (**S***))
,! 31 (()E; 30) ¡

((**R** ⊔ **S**)*) ≣ ((**R***) ⊔ (**S***)) ,! 32 (⇒E: 29,31) ¡

∀R∀S ((R ⊔ S)*) ≣ ((R*) ⊔ (S*)) ! 33 (∀I: 1,32) ¡

▯

! **28.** ¡

⊦ ∀R∀S ((R*) ⊔ (S*)) ≣ ((R ⊔ S)*) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** ⊔ **S**)*) ≣ ((**R***) ⊔ (**S***)) ,! 2 (∀E: P27) ¡

(((**R** ⊔ **S**)*) ≣ ((**R***) ⊔ (**S***)) ⇒ ((**R***) ⊔ (**S***)) ≣ ((**R** ⊔ **S**)*))
,! 3 (∀E: C1.8) ¡

((**R** ⊔ **S**)*) ≣ ((**R***) ⊔ (**S***)) ⇒ ((**R***) ⊔ (**S***)) ≣ ((**R** ⊔ **S**)*)
,! 4 (()E: 3) ¡

((**R***) ⊔ (**S***)) ≣ ((**R** ⊔ **S**)*) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀R∀S ((R*) ⊔ (S*)) ≣ ((R ⊔ S)*) ! 6 (∀I: 1,5) ¡