!**CHAPTER 2**

DYADIC UNIONS¡

! This chapter introduces the notion of dyadic union (of those things satisfying one of two predicates).

! As in the first chapter, not all variations or permutations of a similar theme are asserted, the propositions which appear being restricted to those which will actually be used later. ¡

! Analogous to C2.12, C2.13, and C2.13,the crucial propositions here are P7, P8, and P9. However, an alternative development has been employed: P8 is proven using P5, whereas the proof of C2.15 (which corresponds to P5) appeals to C2.12, C2.13, and C2.14. ¡

! **1.** ⊔ represents union (of two-place predicates). ¡

𝔻 ⊔ ; (**R** ⊔ **S**) ; ; {a,b : **R**[a,b] ∨ **S**[a,b]} ¡

! **2. Fundamental Proposition of Dyadic Unions.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y ((R ⊔ S)[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ S[x,y]) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

∀x∀y ({a,b : **R**[a,b] ∨ **S**[a,b]}[x,y] ⇔ **R**[x,y] ∨ **S**[x,y])
,! 2 (Pred) ¡

∀x∀y ((**R** ⊔ **S**)[x,y] ⇔ **R**[x,y] ∨ **S**[x,y])
,! 3 (𝔻I: P1,2) ¡

∀R∀S∀x∀y ((R ⊔ S)[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ S[x,y])
! 4 (∀I: 1,3) ¡

□

! **3. Fundamental Proposition of Dyadic Unions, First Half.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y ((R ⊔ S)[x,y] ⇒ R[x,y] ∨ S[x,y]) ¡

R,**S**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ⇔ **R**[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**]) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ⇔ **R**[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**] ,! 3 (()E: 2) ¡

(**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

((**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀R∀S∀x∀y ((R ⊔ S)[x,y] ⇒ R[x,y] ∨ S[x,y])
! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! 4. Fundamental Proposition of Dyadic Unions, Second Half. ¡

⊦ ∀R∀S∀x∀y (R[x,y] ∨ S[x,y] ⇒ (R ⊔ S)[x,y]) ¡

R,**S**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ⇔ **R**[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**]) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ⇔ **R**[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**] ,! 3 (()E: 2) ¡

R[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**] ⇒ (**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(**R**[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**] ⇒ (**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀R∀S∀x∀y (R[x,y] ∨ S[x,y] ⇒ (R ⊔ S)[x,y])
! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! 5. Commutative Law of Dyadic Union Around Inclusion. ¡

⊦ ∀R∀S (R ⊔ S) ⫅ (S ⊔ R) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

x,**y** ,! 2 (Prem) ¡

(**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ,! 3 (Prem) ¡

((**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**]) ,! 4 (∀E: P3) ¡

(**R** ⊔ **S**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**] ,! 5 (()E: 4) ¡

R[**x**,**y**] ∨ **S**[**x**,**y**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

R[**x**,**y**] ,! 7 (Prem) ¡

S[**x**,**y**] ∨ **R**[**x**,**y**] ,! 8 (∨I: 7) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**] ∨ **R**[**x**,**y**] ,! 9 (⇒I: 7,8) ¡

S[**x**,**y**] ,! 10 (Prem) ¡

S[**x**,**y**] ∨ **R**[**x**,**y**] ,! 11 (∨I: 10) ¡

S[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**] ∨ **R**[**x**,**y**] ,! 12 (⇒I: 10,11) ¡

S[**x**,**y**] ∨ **R**[**x**,**y**] ,! 13 (∨E: 6,9,12) ¡

(**S**[**x**,**y**] ∨ **R**[**x**,**y**] ⇒ (**S** ⊔ **R**)[**x**,**y**]) ,! 14 (∀E: P4) ¡

S[**x**,**y**] ∨ **R**[**x**,**y**] ⇒ (**S** ⊔ **R**)[**x**,**y**] ,! 15 (()E: 14) ¡

(**S** ⊔ **R**)[**x**,**y**] ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

(R ⊔ S)[x,y] ⇒ (S ⊔ R)[x,y] ,! 17 (⇒I: 3,16) ¡

((R ⊔ S)[x,y] ⇒ (S ⊔ R)[x,y]) ,! 18 (()I: 17) ¡

∀x∀y ((R ⊔ S)[x,y] ⇒ (S ⊔ R)[x,y]) ,! 19 (∀I: 1,18) ¡

(R ⊔ S) ⫅ (S ⊔ R) ,! 20 (⫅I: C1.1,19) ¡

∀R∀S (R ⊔ S) ⫅ (S ⊔ R) ! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! 6. Commutative Law of Dyadic Union Around Equivalence. ¡

⊦ ∀R∀S (R ⊔ S) ≡ (S ⊔ R) ¡

R,S ,! 1 (Prem) ¡

(R ⊔ S) ⫅ (S ⊔ R) ,! 2 (∀E: P5) ¡

(S ⊔ R) ⫅ (R ⊔ S) ,! 3 (∀E: P5) ¡

(R ⊔ S) ⫅ (S ⊔ R) & (S ⊔ R) ⫅ (R ⊔ S),! 4 (&I: 2,3) ¡

((R ⊔ S) ⫅ (S ⊔ R) & (S ⊔ R) ⫅ (R ⊔ S)
⇒ (R ⊔ S) ≡ (S ⊔ R))
,! 5 (∀E: C1.6) ¡

(R ⊔ S) ⫅ (S ⊔ R) & (S ⊔ R) ⫅ (R ⊔ S)
⇒ (R ⊔ S) ≡ (S ⊔ R)
,! 6 (()E: 5) ¡

(R ⊔ S) ≡ (S ⊔ R) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀R∀S (R ⊔ S) ≡ (S ⊔ R) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! 7. Inclusion in Dyadic Unions, Left. ¡

⊦ ∀R∀S R ⫅ (R ⊔ S) ¡

R,S ,! 1 (Prem) ¡

x,y ,! 2 (Prem) ¡

R[x,y] ,! 3 (Prem) ¡

R[x,y] ∨ S[x,y] ,! 4 (∨I: 3) ¡

(R[x,y] ∨ S[x,y] ⇒ (R ⊔ S)[x,y]) ,! 5 (∀E: P4) ¡

R[x,y] ∨ S[x,y] ⇒ (R ⊔ S)[x,y] ,! 6 (()E: 5) ¡

(R ⊔ S)[x,y] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R[x,y] ⇒ (R ⊔ S)[x,y] ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

(R[x,y] ⇒ (R ⊔ S)[x,y]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀x∀y (R[x,y] ⇒ (R ⊔ S)[x,y]) ,! 10 (∀I: 2,9) ¡

R ⫅ (R ⊔ S) ,! 11 ($I: C1.1,10) ¡

∀R∀S R ⫅ (R ⊔ S) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **8. Inclusion in Dyadic Unions, Right.** ¡

⊢ ∀R∀S R ⫅ (S ⊔ R) ¡

R,S ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ (R ⊔ S) ,! 2 (∀E: P7) ¡

(R ⊔ S) ⫅ (S ⊔ R) ,! 3 (∀E: P5) ¡

R ⫅ (R ⊔ S) & (R ⊔ S) ⫅ (S ⊔ R) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(R ⫅ (R ⊔ S) & (R ⊔ S) ⫅ (S ⊔ R) ⇒ R ⫅ (S ⊔ R))
,! 5 (∀E: C1.4) ¡

R ⫅ (R ⊔ S) & (R ⊔ S) ⫅ (S ⊔ R) ⇒ R ⫅ (S ⊔ R)
,! 6 (()E: 5) ¡

R ⫅ (S ⊔ R) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀R∀S R ⫅ (S ⊔ R) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **9. Inclusion of Dyadic Unions.** ¡

⊢ ∀R∀S∀T (R ⫅ T & S ⫅ T ⇒ (R ⊔ S) ⫅ T) ¡

R,S,T ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ T & S ⫅ T ,! 2 (Prem) ¡

R ⫅ T ,! 3 (&E) ¡

S ⫅ T ,! 4 (&E) ¡

x,y ,! 5 (Prem) ¡

(R ⊔ S)[x,y] ,! 6 (Prem) ¡

((R ⊔ S)[x,y] ⇒ R[x,y] ∨ S[x,y])
,! 7 (∀E: P3) ¡

(R ⊔ S)[x,y] ⇒ R[x,y] ∨ S[x,y] ,! 8 (()E) ¡

R[x,y] ∨ S[x,y] ,! 9 (⇒E) ¡

∀x∀y (R[x,y] ⇒ T[x,y]) ,! 10 (𝕊E: C1.1,3) ¡

(R[x,y] ⇒ T[x,y]) ,! 11 (∀E: 10) ¡

R[x,y] ⇒ T[x,y] ,! 12 (()E: 11) ¡

∀x∀y (S[x,y] ⇒ T[x,y]) ,! 13 (𝕊E: C1.1,4) ¡

(R[x,y] ⇒ S[x,y]) ,! 14 (∀E: 13) ¡

R[x,y] ⇒ S[x,y] ,! 15 (()E: 14) ¡

T[x,y] ,! 16 (∨E: 9,12,15) ¡

(R ⊔ S)[x,y] ⇒ T[x,y] ,! 17 (⇒I: 6,16) ¡

((R ⊔ S)[x,y] ⇒ T[x,y]) ,! 18 (()I: 17) ¡

∀x∀y ((R ⊔ S)[x,y] ⇒ T[x,y]) ,! 19 (∀I: 5,18) ¡

(R ⊔ S) ⫅ T ,! 20 (𝕊I: C1.1,19) ¡

R ⫅ T & S ⫅ T ⇒ (R ⊔ S) ⫅ T ,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(R ⫅ T & S ⫅ T ⇒ (R ⊔ S) ⫅ T) ,! 22 (()I: 21) ¡

∀R∀S∀T (R ⫅ T & S ⫅ T ⇒ (R ⊔ S) ⫅ T) ! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! 10. Idempotency of Dyadic Union (Relative to Equivalence). ¡

⊦ ∀R (R ⊔ R) ≡ R ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ (R ⊔ R) ,! 2 (∀E: P7) ¡

R ⫅ R ,! 3 (∀E: C1.3) ¡

R ⫅ R & R ⫅ R ,! 4 (&I: 3,3) ¡

(R ⫅ R & R ⫅ R ⇒ (R ⊔ R) ⫅ R) ,! 5 (∀E: P9) ¡

R ⫅ R & R ⫅ R ⇒ (R ⊔ R) ⫅ R ,! 6 (()E: 5) ¡

(**R** ⊔ **R**) ⫅ **R** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**R** ⊔ **R**) ⫅ **R** & **R** ⫅ (**R** ⊔ **R**) ,! 8 (&I: 2,7) ¡

((**R** ⊔ **R**) ⫅ **R** & **R** ⫅ (**R** ⊔ **R**) ⇒ (**R** ⊔ **R**) ≡ **R**)
,! 9 (∀E: C1.6) ¡

(**R** ⊔ **R**) ⫅ **R** & **R** ⫅ (**R** ⊔ **R**) ⇒ (**R** ⊔ **R**) ≡ **R**
,! 10 (()E: 9) ¡

(**R** ⊔ **R**) ≡ **R** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

∀R (R ⊔ R) ≡ R ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **11.** P11 states that dyadic unions maintain inclusion, for both both positions. It corresponds to II2.32. ¡

⊦ ∀R∀S∀T∀U (R ⫅ S & T ⫅ U ⇒ (R ⊔ T) ⫅ (S ⊔ U)) ¡

R,**S**,**T**,**U** ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ **S** & **T** ⫅ **U** ,! 2 (Prem) ¡

R ⫅ **S** ,! 3 (&E: 2) ¡

S ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 4 (∀E: P7) ¡

R ⫅ **S** & **S** ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 5 (&I: 3,4) ¡

(**R** ⫅ **S** & **S** ⫅ (**S** ⊔ **U**) ⇒ **R** ⫅ (**S** ⊔ **U**))
,! 6 (∀E: C1.4) ¡

R ⫅ **S** & **S** ⫅ (**S** ⊔ **U**) ⇒ **R** ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 7 (()E: 6) ¡

R ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

T ⫅ **U** ,! 9 (&E: 2) ¡

U ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 10 (∀E: P8) ¡

T ⫅ **U** & **U** ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 11 (&I: 9,10) ¡

(**T** ⫅ **U** & **U** ⫅ (**S** ⊔ **U**) ⇒ **T** ⫅ (**S** ⊔ **U**))
,! 12 (∀E: C1.4) ¡

T ⫅ **U** & **U** ⫅ (**S** ⊔ **U**) ⇒ **T** ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 13 (()E: 12) ¡

T ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

R ⫅ (**S** ⊔ **U**) & **T** ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 15 (&I: 8,14) ¡

(**R** ⫅ (**S** ⊔ **U**) & **T** ⫅ (**S** ⊔ **U**) ⇒ (**R** ⊔ **T**) ⫅ (**S** ⊔ **U**))

,! 16 (∀E: P9) ¡

R ⫅ (**S** ⊔ **U**) & **T** ⫅ (**S** ⊔ **U**) ⇒ (**R** ⊔ **T**) ⫅ (**S** ⊔ **U**)
,! 17 (()E: 16) ¡

(**R** ⊔ **T**) ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

R ⫅ **S** & **T** ⫅ **U** ⇒ (**R** ⊔ **T**) ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(**R** ⫅ **S** & **T** ⫅ **U** ⇒ (**R** ⊔ **T**) ⫅ (**S** ⊔ **U**))
,! 20 (()I: 19) ¡

∀R∀S∀T∀U (R ⫅ S & T ⫅ U ⇒ (R ⊔ T) ⫅ (S ⊔ U))
! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! P12, P13, and P14 state that dyadic unions maintain equivalence, for both positions (P12), for the left position only (P13), and for the right position (P14). They correspond to II2.35,II2.36, and II2.37, respectively. ¡

! **12.** P12 is proven as a corollary to P11. ¡

⊢ ∀R∀S∀T∀U (R ≣ S & T ≣ U ⇒ (R ⊔ T) ≣ (S ⊔ U)) ¡

R,**S**,**T**,**U** ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ **S** & **T** ≣ **U** ,! 2 (Prem) ¡

R ≣ **S** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**R** ≣ **S** ⇒ **R** ⫅ **S** & **S** ⫅ **R**) ,! 4 (∀E: C1.11) ¡

R ≣ **S** ⇒ **R** ⫅ **S** & **S** ⫅ **R** ,! 5 (()E: 4) ¡

R ⫅ **S** & **S** ⫅ **R** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

R ⫅ **S** ,! 7 (&E: 6) ¡

S ⫅ **R** ,! 8 (&E: 6) ¡

T ≣ **U** ,! 9 (&E: 2) ¡

(**T** ≣ **U** ⇒ **T** ⫅ **U** & **U** ⫅ **T**) ,! 10 (∀E: C1.11) ¡

T ≣ **U** ⇒ **T** ⫅ **U** & **U** ⫅ **T** ,! 11 (()E: 10) ¡

T ⫅ **U** & **U** ⫅ **T** ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

T ⫅ **U** ,! 13 (&E: 12) ¡

U ⫅ **T** ,! 14 (&E: 12) ¡

R ⫅ **S** & **T** ⫅ **U** ,! 15 (&I: 7,13) ¡

(**R** ⫅ **S** & **T** ⫅ **U** ⇒ (**R** ⊔ **T**) ⫅ (**S** ⊔ **U**))
,! 16 (∀E: P11) ¡

R ⫅ **S** & **T** ⫅ **U** ⇒ (**R** ⊔ **T**) ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 17 (()E: 16) ¡

(**R** ⊔ **T**) ⫅ (**S** ⊔ **U**) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

S ⫅ **R** & **U** ⫅ **T** ,! 19 (&I: 8,14) ¡

(**S** ⫅ **R** & **U** ⫅ **T** ⇒ (**S** ⊔ **U**) ⫅ (**R** ⊔ **T**))
,! 20 (∀E: P11) ¡

S ⫅ **R** & **U** ⫅ **T** ⇒ (**S** ⊔ **U**) ⫅ (**R** ⊔ **T**) ,! 21 (()E: 20) ¡

(**S** ⊔ **U**) ⫅ (**R** ⊔ **T**) ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

(**R** ⊔ **T**) ⫅ (**S** ⊔ **U**) & (**S** ⊔ **U**) ⫅ (**R** ⊔ **T**)
,! 23 (&I: 18,22) ¡

((**R** ⊔ **T**) ⫅ (**S** ⊔ **U**) & (**S** ⊔ **U**) ⫅ (**R** ⊔ **T**)
⇒ (**R** ⊔ **T**) ≣ (**S** ⊔ **U**))
,! 24 (∀E: C1.6) ¡

(**R** ⊔ **T**) ⫅ (**S** ⊔ **U**) & (**S** ⊔ **U**) ⫅ (**R** ⊔ **T**)
⇒ (**R** ⊔ **T**) ≣ (**S** ⊔ **U**)
,! 25 (()E: 24) ¡

(**R** ⊔ **T**) ≣ (**S** ⊔ **U**) ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

R ≣ **S** & **T** ≣ **U** ⇒ (**R** ⊔ **T**) ≣ (**S** ⊔ **U**) ,! 27 (⇒I: 2,26) ¡

(**R** ≣ **S** & **T** ≣ **U** ⇒ (**R** ⊔ **T**) ≣ (**S** ⊔ **U**))
,! 28 (()I: 27) ¡

∀R∀S∀T∀U (R ≣ S & T ≣ U ⇒ (R ⊔ T) ≣ (S ⊔ U))
! 29 (∀I: 1,28) ¡

▯

! P13 and P14 are corollaries to P12. ¡

! **13.** ¡

⊦ ∀R∀S∀T (R ≣ S ⇒ (R ⊔ T) ≣ (S ⊔ T)) ¡

R,S,T ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ **S** ,! 2 (Prem) ¡

T ≣ **T** ,! 3 (∀E: C1.7) ¡

R ≣ **S** & **T** ≣ **T** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ≣ **S** & **T** ≣ **T** ⇒ (**R** ⊔ **T**) ≣ (**S** ⊔ **T**))

,! 5 (∀E: P12) ¡

R ≣ S & T ≣ T ⇒ (R ⊔ T) ≣ (S ⊔ T) ,! 6 (()E: 5) ¡

(R ⊔ T) ≣ (S ⊔ T) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R ≣ S ⇒ (R ⊔ T) ≣ (S ⊔ T) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**R ≣ S ⇒ (R ⊔ T) ≣ (S ⊔ T)**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀S∀T (R ≣ S ⇒ (R ⊔ T) ≣ (S ⊔ T)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **14.** ¡

⊦ ∀R∀S∀T (R ≣ S ⇒ (T ⊔ R) ≣ (T ⊔ S)) ¡

R,S,T ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ S ,! 2 (Prem) ¡

T ≣ T ,! 3 (∀E: C1.7) ¡

T ≣ T & R ≣ S ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**T ≣ T & R ≣ S ⇒ (T ⊔ R) ≣ (T ⊔ S)**)
,! 5 (∀E: P12) ¡

T ≣ T & R ≣ S ⇒ (T ⊔ R) ≣ (T ⊔ S) ,! 6 (()E: 5) ¡

(T ⊔ R) ≣ (T ⊔ S) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R ≣ S ⇒ (T ⊔ R) ≣ (T ⊔ S) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**R ≣ S ⇒ (T ⊔ R) ≣ (T ⊔ S)**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀S∀T (R ≣ S ⇒ (T ⊔ R) ≣ (T ⊔ S)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! P15, P16, and P17 state more assertions on the theme that dyadic unions maintain equivalence. ¡

! **15.** ¡

⊦ ∀R∀S∀T∀U∀V (T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U & S ≣ V ⇒ T ≣ (U ⊔ V)) ¡

R,S,T,U,V ,! 1 (Prem) ¡

T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U & S ≣ V ,! 2 (Prem) ¡

T ≣ (R ⊔ S) ,! 3 (&E: 2) ¡

R ≣ U & S ≣ V ,! 4 (&E: 2) ¡

(R ≣ U & S ≣ V ⇒ (R ⊔ S) ≣ (U ⊔ V))
,! 5 (∀E: P12) ¡

R ≣ U & S ≣ V ⇒ (R ⊔ S) ≣ (U ⊔ V) ,! 6 (()E: 5) ¡

(R ⊔ S) ≣ (U ⊔ V) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

T ≣ (R ⊔ S) & (R ⊔ S) ≣ (U ⊔ V) ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(T ≣ (R ⊔ S) & (R ⊔ S) ≣ (U ⊔ V) ⇒ T ≣ (U ⊔ V))
,! 9 (∀E: C1.15) ¡

T ≣ (R ⊔ S) & (R ⊔ S) ≣ (U ⊔ V) ⇒ T ≣ (U ⊔ V)
,! 10 (()E: 9) ¡

T ≣ (U ⊔ V) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U & S ≣ V ⇒ T ≣ (U ⊔ V)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U & S ≣ V ⇒ T ≣ (U ⊔ V))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀T∀U∀V (T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U & S ≣ V ⇒ T ≣ (U ⊔ V))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **16.** ¡

⊢ ∀R∀S∀T∀U (T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U ⇒ T ≣ (U ⊔ S)) ¡

R,S,T,U ,! 1 (Prem) ¡

T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U ,! 2 (Prem) ¡

S ≣ S ,! 3 (∀E: C1.7) ¡

T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U & S ≣ S ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U & S ≣ S ⇒ T ≣ (U ⊔ S))
,! 5 (∀E: P15) ¡

T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U & S ≣ S ⇒ T ≣ (U ⊔ S)
,! 6 (()E: 5) ¡

T ≣ (U ⊔ S) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U ⇒ T ≣ (U ⊔ S) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U ⇒ T ≣ (U ⊔ S)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀S∀T∀U (T ≣ (R ⊔ S) & R ≣ U ⇒ T ≣ (U ⊔ S))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **17.** ¡

⊦ ∀R∀S∀T∀U (T ≣ (S ⊔ R) & R ≣ U ⇒ T ≣ (S ⊔ U)) ¡

R,S,T,U ,! 1 (Prem) ¡

T ≣ (S ⊔ R) & R ≣ U ,! 2 (Prem) ¡

S ≣ S ,! 3 (∀E: C1.7) ¡

T ≣ (S ⊔ R) & S ≣ S & R ≣ U ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(T ≣ (S ⊔ R) & S ≣ S & R ≣ U ⇒ T ≣ (S ⊔ U))
,! 5 (∀E: P15) ¡

T ≣ (S ⊔ R) & S ≣ S & R ≣ U ⇒ T ≣ (S ⊔ U)
,! 6 (()E: 5) ¡

T ≣ (S ⊔ U) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

T ≣ (S ⊔ R) & R ≣ U ⇒ T ≣ (S ⊔ U) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(T ≣ (S ⊔ R) & R ≣ U ⇒ T ≣ (S ⊔ U)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀S∀T∀U (T ≣ (S ⊔ R) & R ≣ U ⇒ T ≣ (S ⊔ U))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **18.** P18 is a lemma, which will be used in a future chapter. ¡

⊦ ∀R∀S ((R ⊔ S) ⊔ S) ≣ (R ⊔ S) ¡

R,S ,! 1 (Prem) ¡

(R ⊔ S) ⫅ ((R ⊔ S) ⊔ S) ,! 2 (∀E: P7) ¡

(R ⊔ S) ⫅ (R ⊔ S) ,! 3 (∀E: C1.3) ¡

S ⫅ (R ⊔ S) ,! 4 (∀E: P8) ¡

(R ⊔ S) ⫅ (R ⊔ S) & S ⫅ (R ⊔ S) ,! 5 (&I: 3,4) ¡

((R ⊔ S) ⫅ (R ⊔ S) & S ⫅ (R ⊔ S)
⇒ ((R ⊔ S) ⊔ S) ⫅ (R ⊔ S))
,! 6 (∀E: P9) ¡

(R ⊔ S) ⫅ (R ⊔ S) & S ⫅ (R ⊔ S) ⇒ ((R ⊔ S) ⊔ S) ⫅ (R ⊔ S)
,! 7 (()E: 6) ¡

((R ⊔ S) ⊔ S) ⫅ (R ⊔ S) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

((**R** ⊔ **S**) ⊔ **S**) ⊆ (**R** ⊔ **S**) & (**R** ⊔ **S**) ⊆ ((**R** ⊔ **S**) ⊔ **S**)
,! 9 (&I: 2,8) ¡

(((**R** ⊔ **S**) ⊔ **S**) ⊆ (**R** ⊔ **S**) & (**R** ⊔ **S**) ⊆ ((**R** ⊔ **S**) ⊔ **S**)
⇒ ((**R** ⊔ **S**) ⊔ **S**) ≡ (**R** ⊔ **S**))
,! 10 (∀E: C1.6) ¡

((**R** ⊔ **S**) ⊔ **S**) ⊆ (**R** ⊔ **S**) & (**R** ⊔ **S**) ⊆ ((**R** ⊔ **S**) ⊔ **S**)
⇒ ((**R** ⊔ **S**) ⊔ **S**) ≡ (**R** ⊔ **S**)
,! 11 (()E: 10) ¡

((**R** ⊔ **S**) ⊔ **S**) ≡ (**R** ⊔ **S**) ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

∀R∀S ((R ⊔ S) ⊔ S) ≡ (R ⊔ S) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯