!CHAPTER 15

SWITCHINGS¡

! In this chapter switchings are introduced. A switching, written ($\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}$), of a relationship **R** and for things **a** and **b**, is exactly like **R**, except anything which bore **R** to **a** now bears to **b**, and anything which bore **R** to **b** now bears to **a**.

Given the definition of ($\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}$) in terms of a predicate containing three disjuncts involving equality, the Law of the Excluded Middle for Equality, I3.4, is often used. ¡

! **1.** α represents switching. ¡

$$
\mathbb{D}\quad \alpha\ ;\ (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})\ ;\ ;\ \{\, a,b : (\neg\ b = \mathbf{a}\ \&\ \neg\ b = \mathbf{b}\ \&\ \mathbf{R}[a,b]) \lor (\mathbf{R}[a,\mathbf{a}]\ \&\ b = \mathbf{b}) \lor (\mathbf{R}[a,\mathbf{b}]\ \&\ b = \mathbf{a})\,\}
$$
¡

! **2. Fundamental Proposition of Switching.** ¡

$$
\vdash \forall R\forall a\forall b\forall x\forall y\ (\ (R\ \alpha\ a\ b)[x,y] \Leftrightarrow (\neg\ y = a\ \&\ \neg\ y = b\ \&\ R[x,y]) \lor (R[x,a]\ \&\ y = b) \lor (R[x,b]\ \&\ y = a)\ )
$$
¡

R, **a**, **b** ,! 1 (Prem) ¡

$$
\forall x\forall y(\ \{\, a,b : (\neg\ b = \mathbf{a}\ \&\ \neg\ b = \mathbf{b}\ \&\ \mathbf{R}[a,b]) \lor (\mathbf{R}[a,\mathbf{a}]\ \&\ b = \mathbf{b}) \lor (\mathbf{R}[a,\mathbf{b}]\ \&\ b = \mathbf{a})\,\}[x,y] \Leftrightarrow (\neg\ y = \mathbf{a}\ \&\ \neg\ y = \mathbf{b}\ \&\ \mathbf{R}[x,y]) \lor (\mathbf{R}[x,\mathbf{a}]\ \&\ y = \mathbf{b}) \lor (\mathbf{R}[x,\mathbf{b}]\ \&\ y = \mathbf{a})\ )
$$
,! 2 (Pred) ¡

$$
\forall x\forall y(\ (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[x,y] \Leftrightarrow (\neg\ y = \mathbf{a}\ \&\ \neg\ y = \mathbf{b}\ \&\ \mathbf{R}[x,y]) \lor (\mathbf{R}[x,\mathbf{a}]\ \&\ y = \mathbf{b}) \lor (\mathbf{R}[x,\mathbf{b}]\ \&\ y = \mathbf{a})\ )
$$
,! 3 (𝔻I: P1,2) ¡

$$
\forall R\forall a\forall b\forall x\forall y\ (\ (R\ \alpha\ a\ b)[x,y] \Leftrightarrow (\neg\ y = \mathbf{a}\ \&\ \neg\ y = \mathbf{b}\ \&\ \mathbf{R}[x,y]) \lor (\mathbf{R}[x,\mathbf{a}]\ \&\ y = \mathbf{b}) \lor (\mathbf{R}[x,\mathbf{b}]\ \&\ y = \mathbf{a})\ )
$$
! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **3. Fundamental Proposition of Switching, First Half.** ¡

$$
\vdash \forall R\forall a\forall b\forall x\forall y\ (\ (R\ \alpha\ a\ b)[x,y] \Rightarrow (\neg\ y = a\ \&\ \neg\ y = b\ \&\ R[x,y]) \lor (R[x,a]\ \&\ y = b)
$$

∨ (R[x,b] & y = a)) ¡

R,**a**,**b**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇔ (¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**))
,! 2 (∀E: P2) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇔ (¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 3 (()E: 2) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ (¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 4 (⇔E: 3) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ (¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**))
,! 5 (()I: 4) ¡

∀R∀a∀b∀x∀y ((R α a b)[x,y] ⇒ (¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a))
! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! 4. Fundamental Proposition of Switching, Second Half. ¡

⊢ ∀R∀a∀b∀x∀y ((¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
⇒ (R α a b)[x,y]) ¡

R,**a**,**b**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇔ (¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**))
,! 2 (∀E: P2) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇔ (¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 3 (()E: 2) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**])

∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
⇒ (R α a b)[x,y]
,! 4 (⇔E: 3) ¡

((¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
⇒ (R α a b)[x,y])
,! 5 (()I: 4) ¡

∀R∀a∀b∀x∀y ((¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
⇒ (R α a b)[x,y])
! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! P5 and P6 are proved early, so that they can be used in the proofs of P9 and P12. ¡

! **5. Symmetry of Switching Around Inclusion.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b (R α a b) ⫅ (R α b a) ¡

R,a,b ,! 1 (Prem) ¡

x,y ,! 2 (Prem) ¡

(R α a b)[x,y] ,! 3 (Prem) ¡

((R α a b)[x,y] ⇒ (¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a))
,! 4 (∀E: P3) ¡

(R α a b)[x,y] ⇒ (¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
,! 5 (()E: 4) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y]) ,! 7 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y] ,! 8 (()E: 7) ¡

¬ y = a ,! 9 (&E: 8) ¡

¬ y = b ,! 10 (&E: 8) ¡

R[**x**,**y**] ,! 11 (&E: 8) ¡

¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** ,! 12 (&I: 9,10) ¡

¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**] ,! 13 (&I: 11,12) ¡

(¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

(¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
,! 15 (∨I: 14) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**])
⇒ (¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
,! 16 (⇒I: 7,15) ¡

(**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 17 (Prem) ¡

(**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**) ,! 18 (Prem) ¡

(¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
,! 19 (∨I: 18) ¡

(**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
⇒ (¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
,! 20 (⇒I: 18,19) ¡

(**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**) ,! 21 (Prem) ¡

(¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 22 (∨I: 21) ¡

(¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
,! 23 (∨I: 22) ¡

(**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
⇒ (¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
,! 24 (⇒I: 21,23) ¡

(¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)

,! 25 (∨E: 17,20,24) ¡

(**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
⇒ (¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)

,! 26 (⇒I: 17,25) ¡

(¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)

,! 27 (∨E: 6,16,26) ¡

((¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
⇒ (**R** α **b** **a**)[**x**,**y**])

,! 28 (∀E: P4) ¡

(¬ **y** = **b** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**])
∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
∨ (**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
⇒ (**R** α **b** **a**)[**x**,**y**]

,! 29 (()E: 28) ¡

(**R** α **b** **a**)[**x**,**y**] ,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ (**R** α **b** **a**)[**x**,**y**] ,! 31 (⇒I: 3,30) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ (**R** α **b** **a**)[**x**,**y**])

,! 32 (()I: 31) ¡

∀x∀y ((**R** α **a** **b**)[x,y] ⇒ (**R** α **b** **a**)[x,y])

,! 33 (∀I: 2,32) ¡

(**R** α **a** **b**) ⫅ (**R** α **b** **a**) ,! 34 (𝕊I: C1.1,33) ¡

∀R∀a∀b (R α a b) ⫅ (R α b a) ! 35 (∀I: 1,34) ¡

▯

! 6. Symmetry of Switching (Around Equivalence). ¡

⊢ ∀R∀a∀b (R α a b) ≡ (R α b a) ¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

(R α a b) ⫅ (R α b a) ,! 2 (∀E: P5) ¡

(R α b a) ⫅ (R α a b) ,! 3 (∀E: P5) ¡

(R α a b) ⫅ (R α b a) & (R α b a) ⫅ (R α a b)
,! 4 (&I: 2,3) ¡

((R α a b) ⫅ (R α b a) & (R α b a) ⫅ (R α a b)
⇒ (R α a b) ≣⊏(R α b a))
,! 5 (∀E: C1.6) ¡

(R α a b) ⫅ (R α b a) & (R α b a) ⫅ (R α a b)
⇒ (R α a b) ≣ (R α b a)
,! 6 (()E: 5) ¡

(R α a b) ≣ (R α b a) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀R∀a∀b (R α a b) ≣ (R α b a) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! P7 through P9 state consequences of P4. ¡

! **7.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b∀x∀y (¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y] ⇒ (R α a b)[x,y])
¡

R,a,b,x,y ,! 1 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y] ,! 2 (Prem) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y]) ,! 3 (()I: 2) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
,! 4 (∨I: 3) ¡

((¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
⇒ (R α a b)[x,y])
,! 5 (∀E: P4) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
⇒ (R α a b)[x,y]
,! 6 (()E: 5) ¡

(R α a b)[x,y] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y] ⇒ (R α a b)[x,y]

,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**] ⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**])
,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀a∀b∀x∀y (¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y] ⇒ (R α a b)[x,y])
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **8.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b∀x (R[x,a] ⇒ (R α a b)[x,b]) ¡

R,**a**,**b**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

R[**x**,**a**] ,! 2 (Prem) ¡

b = **b** ,! 3 (=I) ¡

R[**x**,**a**] & **b** = **b** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R**[**x**,**a**] & **b** = **b**) ,! 5 (()I: 4) ¡

(¬ **b** = **a** & ¬ **b** = **b** & **R**[**x**,**b**])
∨ (**R**[**x**,**a**] & **b** = **b**)
∨ (**R**[**x**,**b**] & **b** = **a**)
,! 6 (∨I: 5) ¡

((¬ **b** = **a** & ¬ **b** = **b** & **R**[**x**,**b**])
∨ (**R**[**x**,**a**] & **b** = **b**)
∨ (**R**[**x**,**b**] & **b** = **a**)
⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**b**])
,! 7 (∀E: P4) ¡

(¬ **b** = **a** & ¬ **b** = **b** & **R**[**x**,**b**])
∨ (**R**[**x**,**a**] & **b** = **b**)
∨ (**R**[**x**,**b**] & **b** = **a**)
⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**b**]
,! 8 (()E: 7) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

R[**x**,**a**] ⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(**R**[**x**,**a**] ⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**b**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀R∀a∀b∀x (R[x,a] ⇒ (R α a b)[x,b]) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **9.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b∀x (R[x,b] ⇒ (R α a b)[x,a]) ¡

R,a,b,x ,! 1 (Prem) ¡

R[x,b] ,! 2 (Prem) ¡

(R[x,b] ⇒ (R α b a)[x,a]) ,! 3 (∀E: P8) ¡

R[x,b] ⇒ (R α b a)[x,a] ,! 4 (()E: 3) ¡

(R α b a)[x,a] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(R α a b) ≡ (R α b a) ,! 6 (∀E: P6) ¡

(R α b a)[x,a] & (R α a b) ≡ (R α b a)
,! 7 (&I: 5,6) ¡

((R α b a)[x,a] & (R α a b) ≡ (R α b a)
⇒ (R α a b)[x,a])
,! 8 (∀E: C1.21) ¡

(R α b a)[x,a] & (R α a b) ≡ (R α b a) ⇒ (R α a b)[x,a]
,! 9 (()E: 8) ¡

(R α a b)[x,a] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

R[x,b] ⇒ (R α a b)[x,a] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(R[x,b] ⇒ (R α a b)[x,a]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀R∀a∀b∀x (R[x,b] ⇒ (R α a b)[x,a]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! P10 through P12 state consequences of P3. ¡

! **10.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b∀x∀y (¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y] ⇒ R[x,y])
¡

R,a,b,x,y ,! 1 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y] ,! 2 (Prem) ¡

¬ y = a ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ y = b ,! 4 (&E: 2) ¡

(R α a b)[x,y] ,! 5 (&E: 2) ¡

((R α a b)[x,y] ⇒ (¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a))
,! 6 (∀E: P3) ¡

(R α a b)[x,y] ⇒ (¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])

∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
,! 7 (()E: 6) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y]) ,! 9 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y] ,! 10 (()E: 9) ¡

R[x,y] ,! 11 (&E: 10) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y]) ⇒ R[x,y]
,! 12 (⇒I: 9,11) ¡

(R[x,a] & y = b) ∨ (R[x,b] & y = a),! 13 (Prem) ¡

¬ R[x,y] ,! 14 (Prem) ¡

(R[x,a] & y = b) ,! 15 (Prem) ¡

R[x,a] & y = b ,! 16 (()E: 15) ¡

y = b ,! 17 (&E: 16) ¡

𝔉 ,! 18 (𝔉I: 4,17) ¡

(R[x,a] & y = b) ⇒ 𝔉 ,! 19 (⇒I: 15,18) ¡

(R[x,b] & y = a) ,! 20 (Prem) ¡

R[x,b] & y = a ,! 21 (()E: 20) ¡

y = a ,! 22 (&E: 21) ¡

𝔉 ,! 23 (𝔉I: 3,22) ¡

(R[x,b] & y = a) ⇒ 𝔉 ,! 24 (⇒I: 20,23) ¡

𝔉 ,! 25 (∨E: 13,19,24)
¡

¬ R[x,y] ⇒ 𝔉 ,! 26 (⇒I: 14,25) ¡

¬¬ R[x,y] ,! 27 (¬I: 26) ¡

R[x,y] ,! 28 (¬E: 27) ¡

(R[x,a] & y = b) ∨ (R[x,b] & y = a) ⇒ R[x,y]
,! 29 (⇒I: 13,28) ¡

R[x,y] ,! 30 (∨E: 8,12,29) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y] ⇒ R[x,y]
,! 31 (⇒I: 2,30) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y] ⇒ R[x,y])
,! 32 (()I: 31) ¡

∀R∀a∀b∀x∀y (¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y] ⇒ R[x,y])
! 33 (∀I: 1,32) ¡

▯

! **11.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b∀x ((R α a b)[x,a] ⇒ R[x,b]) ¡

R,a,b,x ,! 1 (Prem) ¡

(R α a b)[x,a] ,! 2 (Prem) ¡

((R α a b)[x,a] ⇒ (¬ a = a & ¬ a = b & R[x,a])
∨ (R[x,a] & a = b)
∨ (R[x,b] & a = a))
,! 3 (∀E: P3) ¡

(R α a b)[x,a] ⇒ (¬ a = a & ¬ a = b & R[x,a])
∨ (R[x,a] & a = b)
∨ (R[x,b] & a = a)
,! 4 (()E: 3) ¡

(¬ a = a & ¬ a = b & R[x,a])
∨ (R[x,a] & a = b)
∨ (R[x,b] & a = a)
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(¬ a = a & ¬ a = b & R[x,a]) ,! 6 (Prem) ¡

¬ a = a & ¬ a = b & R[x,a] ,! 7 (()E: 6) ¡

¬ R[x,b] ,! 8 (Prem) ¡

¬ a = a ,! 9 (&E: 7) ¡

a = a ,! 10 (=I) ¡

ℑ ,! 11 (ℑI: 9,10) ¡

¬ R[x,b] ⇒ ℑ ,! 12 (⇒I: 8,11) ¡

¬¬ R[x,b] ,! 13 (¬I: 12) ¡

R[x,b] ,! 14 (¬E: 13) ¡

(¬ a = a & ¬ a = b & R[x,a]) ⇒ R[x,b]
,! 15 (⇒I: 6,14) ¡

(R[x,a] & a = b) ∨ (R[x,b] & a = a),! 16 (Prem) ¡

(R[x,a] & a = b) ,! 17 (Prem) ¡

R[x,a] & a = b ,! 18 (()E: 17) ¡

R[x,a] ,! 19 (&E: 18) ¡

a = b ,! 20 (&E: 18) ¡

R[x,b] ,! 21 (=E: 19,20) ¡

(R[x,a] & a = b) ⇒ R[x,b] ,! 22 (⇒I: 17,21) ¡

(R[x,b] & a = a) ,! 23 (Prem) ¡

R[x,b] & a = a ,! 24 (()E: 23) ¡

R[x,b] ,! 25 (&E: 24) ¡

(R[x,b] & a = a) ⇒ R[x,b] ,! 26 (⇒I: 23,25) ¡

R[x,b] ,! 27 (∨E: 16,22,26) ¡

(R[x,a] & a = b) ∨ (R[x,b] & a = a) ⇒ R[x,b]
,! 28 (⇒I: 16,27) ¡

R[x,b] ,! 29 (∨E: 5,15,28) ¡

(R α a b)[x,a] ⇒ R[x,b] ,! 30 (⇒I: 2,29) ¡

((R α a b)[x,a] ⇒ R[x,b]) ,! 31 (()I: 30) ¡

∀R∀a∀b∀x ((R α a b)[x,a] ⇒ R[x,b]) ! 32 (∀I: 1,31) ¡

▯

! **12.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b∀x ((R α a b)[x,b] ⇒ R[x,a]) ¡

R,a,b,x ,! 1 (Prem) ¡

(R α a b)[x,b] ,! 2 (Prem) ¡

(R α b a) ≣ (R α a b) ,! 3 (∀E: P6) ¡

(R α a b)[x,b] & (R α b a) ≣ (R α a b)
,! 4 (&I: 2,3) ¡

((R α a b)[x,b] & (R α b a) ≣ (R α a b)
⇒ (R α b a)[x,b])
,! 5 (∀E: C1.21) ¡

(R α a b)[x,b] & (R α b a) ≣ (R α a b) ⇒ (R α b a)[x,b]

,! 6 (()E: 5) ¡

(R α b a)[x,b] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

((R α b a)[x,b] ⇒ R[x,a]) ,! 8 (∀E: P11) ¡

(R α b a)[x,b] ⇒ R[x,a] ,! 9 (()E: 8) ¡

R[x,a] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(R α a b)[x,b] ⇒ R[x,a] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

((R α a b)[x,b] ⇒ R[x,a]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀R∀a∀b∀x ((R α a b)[x,b] ⇒ R[x,a]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **13.** Switching maintains inclusion. ¡

⊢ ∀R∀S∀a∀b (R ⫅ S ⇒ (R α a b) ⫅ (S α a b)) ¡

R,S,a,b ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ S ,! 2 (Prem) ¡

x,y ,! 3 (Prem) ¡

(R α a b)[x,y] ,! 4 (Prem) ¡

((R α a b)[x,y] ⇒ (¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a))
,! 5 (∀E: P3) ¡

(R α a b)[x,y] ⇒ (¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
,! 6 (()E: 5) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y])
∨ (R[x,a] & y = b)
∨ (R[x,b] & y = a)
,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y]) ,! 8 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y] ,! 9 (()E: 8) ¡

¬ y = a & ¬ y = b ,! 10 (&E: 9) ¡

R[x,y] ,! 11 (&E: 9) ¡

R[x,y] & R ⫅ S ,! 12 (&I: 2,11) ¡

(**R**[**x**,**y**] & **R** ⫅ **S** ⇒ **S**[**x**,**y**]) ,! 13 (∀E: C1.2) ¡

R[**x**,**y**] & **R** ⫅ **S** ⇒ **S**[**x**,**y**] ,! 14 (()E: 13) ¡

S[**x**,**y**] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **S**[**x**,**y**] ,! 16 (&I: 10,15) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **S**[**x**,**y**]) ,! 17 (()I: 16) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **S**[**x**,**y**])
∨ (**S**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**S**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 18 (∨I: 17) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**])
⇒ (¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **S**[**x**,**y**])
∨ (**S**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**S**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 19 (⇒I: 8,18) ¡

(**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**) ∨ (**R**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 20 (Prem) ¡

(**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**) ,! 21 (Prem) ¡

R[**x**,**a**] & **y** = **b** ,! 22 (()E: 21) ¡

R[**x**,**a**] ,! 23 (&E: 22) ¡

y = **b** ,! 24 (&E: 22) ¡

R[**x**,**a**] & **R** ⫅ **S** ,! 25 (&I: 2,23) ¡

(**R**[**x**,**a**] & **R** ⫅ **S** ⇒ **S**[**x**,**a**]) ,! 26 (∀E: C1.2) ¡

R[**x**,**a**] & **R** ⫅ **S** ⇒ **S**[**x**,**a**] ,! 27 (()E: 26) ¡

S[**x**,**a**] ,! 28 (⇒E: 25,27) ¡

S[**x**,**a**] & **y** = **b** ,! 29 (&I: 24,28) ¡

(**S**[**x**,**a**] & **y** = **b**) ,! 30 (()I: 29) ¡

(**S**[**x**,**a**] & **y** = **b**) ∨ (**S**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 31 (∨I: 30) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **S**[**x**,**y**])
∨ (**S**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**S**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 32 (∨I: 31) ¡

(**R**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
⇒ (¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **S**[**x**,**y**])

∨ (S[x,a] & y = b)
∨ (S[x,b] & y = a)
,! 33 (⇒I: 21,32) ¡

(R[x,b] & y = a) ,! 34 (Prem) ¡

R[x,b] & y = a ,! 35 (()E: 34) ¡

R[x,b] ,! 36 (&E: 35) ¡

y = a ,! 37 (&E: 35) ¡

R[x,b] & R ⫅ S ,! 38 (&I: 2,36) ¡

(R[x,b] & R ⫅ S ⇒ S[x,b]) ,! 39 (∀E: C1.2) ¡

R[x,b] & R ⫅ S ⇒ S[x,b] ,! 40 (()E: 39) ¡

S[x,b] ,! 41 (⇒E: 38,40) ¡

S[x,b] & y = a ,! 42 (&I: 37,41) ¡

(S[x,b] & y = a) ,! 43 (()I: 42) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & S[x,y])
∨ (S[x,a] & y = b)
∨ (S[x,b] & y = a)
,! 44 (∨I: 43) ¡

(R[x,b] & y = a)
⇒ (¬ y = a & ¬ y = b & S[x,y])
∨ (S[x,a] & y = b)
∨ (S[x,b] & y = a)
,! 45 (⇒I: 34,44) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & S[x,y])
∨ (S[x,a] & y = b)
∨ (S[x,b] & y = a)
,! 46 (∨E: 20,33,45)
¡

(R[x,a] & y = b) ∨ (R[x,b] & y = a)
⇒ (¬ y = a & ¬ y = b & S[x,y])
∨ (S[x,a] & y = b)
∨ (S[x,b] & y = a)
,! 47 (⇒I: 20,46) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & S[x,y])
∨ (S[x,a] & y = b)
∨ (S[x,b] & y = a)
,! 48 (∨E: 7,19,47) ¡

((¬ y = a & ¬ y = b & S[x,y])

∨ (**S**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**S**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
⇒ (**S** α **a** **b**)[**x**,**y**])
,! 49 (∀E: P4) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **S**[**x**,**y**])
∨ (**S**[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ (**S**[**x**,**b**] & **y** = **a**)
⇒ (**S** α **a** **b**)[**x**,**y**]
,! 50 (()E: 49) ¡

(**S** α **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 51 (⇒E: 48,50) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ (**S** α **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 52 (⇒I: 4,51) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ (**S** α **a** **b**)[**x**,**y**])
,! 53 (()I: 52) ¡

∀x∀y ((**R** α **a** **b**)[x,y] ⇒ (**S** α **a** **b**)[x,y])
,! 54 (∀I: 3,53) ¡

(**R** α **a** **b**) ⫅ (**S** α **a** **b**) ,! 55 (⫅I: C1.1,54) ¡

R ⫅ **S** ⇒ (**R** α **a** **b**) ⫅ (**S** α **a** **b**) ,! 56 (⇒I: 55) ¡

(**R** ⫅ **S** ⇒ (**R** α **a** **b**) ⫅ (**S** α **a** **b**)) ,! 57 (()I: 56) ¡

∀R∀S∀a∀b (R ⫅ S ⇒ (R α a b) ⫅ (S α a b))
! 58 (∀I: 1,57) ¡

▯

! **14.** Switching maintains equivalence. ¡

⊢ ∀R∀S∀a∀b (R ≣ S ⇒ (R α a b) ≣ (S α b a)) ¡

R,**S**,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ **S** ,! 2 (Prem) ¡

(**R** ≣ **S** ⇒ **R** ⫅ **S** & **S** ⫅ **R**) ,! 3 (∀E: C1.11) ¡

R ≣ **S** ⇒ **R** ⫅ **S** & **S** ⫅ **R** ,! 4 (()E: 3) ¡

R ⫅ **S** & **S** ⫅ **R** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

R ⫅ **S** ,! 6 (&E: 5) ¡

S ⫅ **R** ,! 7 (&E: 5) ¡

(**R** ⫅ **S** ⇒ (**R** α **a** **b**) ⫅ (**S** α **a** **b**)) ,! 8 (∀E: P13) ¡

R ⫅ **S** ⇒ (**R** α **a** **b**) ⫅ (**S** α **a** **b**) ,! 9 (()E: 8) ¡

(**R** α **a** **b**) ⫅ (**S** α **a** **b**) ,! 10 (⇒E: 6,9) ¡

(**S** ⫅ **R** ⇒ (**S** α **a** **b**) ⫅ (**R** α **a** **b**)) ,! 11 (∀E: P13) ¡

S ⫅ **R** ⇒ (**S** α **a** **b**) ⫅ (**R** α **a** **b**) ,! 12 (()E: 11) ¡

(**S** α **a** **b**) ⫅ (**R** α **a** **b**) ,! 13 (⇒E: 7,12) ¡

(**R** α **a** **b**) ⫅ (**S** α **a** **b**) & (**S** α **a** **b**) ⫅ (**R** α **a** **b**)
,! 14 (&I: 10,13) ¡

((**R** α **a** **b**) ⫅ (**S** α **a** **b**) & (**S** α **a** **b**) ⫅ (**R** α **a** **b**)
⇒ (**R** α **a** **b**) ≣ (**S** α **a** **b**)) ,! 15 (∀E: C1.6) ¡

(**R** α **a** **b**) ⫅ (**S** α **a** **b**) & (**S** α **a** **b**) ⫅ (**R** α **a** **b**)
⇒ (**R** α **a** **b**) ≣ (**S** α **a** **b**)
,! 16 (()E: 15) ¡

(**R** α **a** **b**) ≣ (**S** α **a** **b**) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

R ≣ **S** ⇒ (**R** α **a** **b**) ≣ (**S** α **a** **b**) ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(**R** ≣ **S** ⇒ (**R** α **a** **b**) ≣ (**S** α **a** **b**)) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀R∀S∀a∀b (R ≣ S ⇒ (R α a b) ≣ (S α a b))
! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **15. Bipotency of Switchings Relative to Inclusion.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b ((R α a b) α a b) ⫅ R ¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

x,**y** ,! 2 (Prem) ¡

((**R** α **a** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 3 (Prem) ¡

(((**R** α **a** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**]
⇒ (¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**])
∨ ((**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ ((**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] & **y** = **a**))
,! 4 (∀E: P3) ¡

((**R** α **a** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**]
⇒ (¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**])
∨ ((**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] & **y** = **b**)
∨ ((**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 5 (()E: 4) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**])
∨ ((**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] & **y** = **b**)

$\vee$ ((**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**])
,! 7 (Prem) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**]
,! 8 (()E: 7) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**])
,! 9 (∀E: P10) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**]
,! 10 (()E: 9) ¡

R[**x**,**y**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**]) ⇒ **R**[**x**,**y**]
,! 12 (⇒I: 7,11) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] & **y** = **b**) $\vee$ ((**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] & **y** = **a**)
,! 13 (Prem) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] & **y** = **b**) ,! 14 (Prem) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] & **y** = **b** ,! 15 (()E: 14) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ,! 16 (&E: 15) ¡

y = **b** ,! 17 (&E: 15) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ⇒ **R**[**x**,**b**]) ,! 18 (∀E: P11) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ⇒ **R**[**x**,**b**] ,! 19 (()E: 18) ¡

R[**x**,**b**] ,! 20 (⇒E: 16,19) ¡

R[**x**,**y**] ,! 21 (=E: 17,20) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] & **y** = **b**) ⇒ **R**[**x**,**y**]
,! 22 (⇒I: 14,21) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] & **y** = **a**) ,! 23 (Prem) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] & **y** = **a** ,! 24 (()E: 23) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] ,! 25 (&E: 24) ¡

y = **a** ,! 26 (&E: 24) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] ⇒ **R**[**x**,**a**]) ,! 27 (∀E: P12) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] ⇒ **R**[**x**,**a**] ,! 28 (()E: 27) ¡

R[**x**,**a**] ,! 29 (⇒E: 25,28) ¡

R[**x**,**y**] ,! 30 (=E: 26,29) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] & **y** = **a**) ⇒ **R**[**x**,**y**]
,! 31 (⇒I: 23,30) ¡

R[**x**,**y**] ,! 32 (∨E: 13,22,31)
¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] & **y** = **b**) ∨ ((**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] & **y** = **a**)
⇒ **R**[**x**,**y**]
,! 33 (⇒I: 13,32) ¡

R[**x**,**y**] ,! 34 (∨E: 6,12,33) ¡

((**R** α **a** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ,! 35 (⇒I: 3,34) ¡

(((**R** α **a** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**]) ,! 36 (()I: 35) ¡

∀x∀y (((**R** α **a** **b**) α **a** **b**)[x,y] ⇒ **R**[x,y])
,! 37 (∀I: 1,36) ¡

((**R** α **a** **b**) α **a** **b**) ⫅ **R** ,! 38 (𝕊I: C1.1,37) ¡

∀R∀a∀b ((R α a b) α a b) ⫅ R ! 39 (∀I: 1,38) ¡

▯

! **16. Bipotency of Switchings Relative to Inclusiveness.**
¡

⊢ ∀R∀a∀b R ⫅ ((R α a b) α a b) ¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

x,**y** ,! 2 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 3 (Prem) ¡

(**y** = **a** ∨ ¬ **y** = **a**) ,! 4 (∀E: I3.4) ¡

y = **a** ∨ ¬ **y** = **a** ,! 5 (()E: 4) ¡

y = **a** ,! 6 (Prem) ¡

R[**x**,**a**] ,! 7 (=E: 3,6) ¡

(**R**[**x**,**a**] ⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**b**]) ,! 8 (∀E: P8) ¡

R[**x**,**a**] ⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] ,! 9 (()E: 8) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] ⇒ ((**R** α **a** **b**) α **a** **b**)[**x**,**a**])

,! 11 (∀E: P9) ¡

(R α a b)[x,b] ⇒ ((R α a b) α a b)[x,a]
,! 12 (()E: 11) ¡

((R α a b) α a b)[x,a] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

((R α a b) α a b)[x,y] ,! 14 (=E: 6,13) ¡

y = a ⇒ ((R α a b) α a b)[x,y] ,! 15 (⇒I: 6,14) ¡

¬ y = a ,! 16 (Prem) ¡

(y = b ∨ ¬ y = b) ,! 17 (∀E: I3.4) ¡

y = b ∨ ¬ y = b ,! 18 (()E: 17) ¡

y = b ,! 19 (Prem) ¡

R[x,b] ,! 20 (=E: 3,19) ¡

(R[x,b] ⇒ (R α a b)[x,a]) ,! 21 (∀E: P9) ¡

R[x,b] ⇒ (R α a b)[x,a] ,! 22 (()E: 21) ¡

(R α a b)[x,a] ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

((R α a b)[x,a] ⇒ ((R α a b) α a b)[x,b])
,! 24 (∀E: P8) ¡

(R α a b)[x,a] ⇒ ((R α a b) α a b)[x,b]
,! 25 (()E: 24) ¡

((R α a b) α a b)[x,b] ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

((R α a b) α a b)[x,y] ,! 27 (=E: 19,26) ¡

y = b ⇒ ((R α a b) α a b)[x,y] ,! 28 (⇒I: 19,27) ¡

¬ y = b ,! 29 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b ,! 30 (&I: 16,29) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y] ,! 31 (&I: 3,30) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y] ⇒ (R α a b)[x,y])
,! 32 (∀E: P7) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y] ⇒ (R α a b)[x,y]
,! 33 (()E: 32) ¡

(R α a b)[x,y] ,! 34 (⇒E: 31,33) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y]
,! 35 (&I: 30,34) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y]
⇒ ((R α a b) α a b)[x,y])
,! 36 (∀E: P7) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y]
⇒ ((R α a b) α a b)[x,y]
,! 37 (()E: 36) ¡

((R α a b) α a b)[x,y] ,! 38 (⇒E: 35,37) ¡

¬ y = b ⇒ ((R α a b) α a b)[x,y]
,! 39 (⇒I: 29,38) ¡

((R α a b) α a b)[x,y] ,! 40 (∨E: 18,28,39)
¡

¬ y = a ⇒ ((R α a b) α a b)[x,y] ,! 41 (⇒I: 16,40) ¡

((R α a b) α a b)[x,y] ,! 42 (∨E: 5,15,41) ¡

R[x,y] ⇒ ((R α a b) α a b)[x,y] ,! 43 (⇒I: 3,42) ¡

(R[x,y] ⇒ ((R α a b) α a b)[x,y]) ,! 44 (()I: 43) ¡

∀x∀y (R[x,y] ⇒ ((R α a b) α a b)[x,y])
,! 45 (∀I: 1,44) ¡

R ⫅ ((R α a b) α a b) ,! 46 (⫅I: C1.1,45) ¡

∀R∀a∀b R ⫅ ((R α a b) α a b) ! 47 (∀I: 1,46) ¡

□

! 17. Bipotency of Switchings (Relative to Equivalence).
¡

⊢ ∀R∀a∀b ((R α a b) α a b) ≡ R ¡

R,a,b ,! 1 (Prem) ¡

((R α a b) α a b) ⫅ R ,! 2 (∀E: P15) ¡

R ⫅ ((R α a b) α a b) ,! 3 (∀E: P16) ¡

((R α a b) α a b) ⫅ R & R ⫅ ((R α a b) α a b)
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(((R α a b) α a b) ⫅ R & R ⫅ ((R α a b) α a b)
⇒ ((R α a b) α a b) ≡ R)
,! 5 (∀E: C1.6) ¡

((R α a b) α a b) ⫅ R & R ⫅ ((R α a b) α a b)

⇒ ((**R** α **a** **b**) α **a** **b**) ≣ **R**
,! 6 (()E: 5) ¡

((**R** α **a** **b**) α **a** **b**) ≣ **R** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀R∀a∀b ((R α a b) α a b) ≣ R ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! P18 through P23 state consequences of bipotency. ¡

! **18.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b ((R α a b) α b a) ≣ R ¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** α **a** **b**) α **a** **b**) ≣ **R** ,! 2 (∀E: P17) ¡

((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ≣ ((**R** α **a** **b**) α **a** **b**) ,! 3 (∀E: P6) ¡

((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ≣ ((**R** α **a** **b**) α **a** **b**)
& ((**R** α **a** **b**) α **a** **b**) ≣ **R**
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ≣ ((**R** α **a** **b**) α **a** **b**)
& ((**R** α **a** **b**) α **a** **b**) ≣ **R**
⇒ ((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ≣ **R**)
,! 5 (∀E: C1.15) ¡

((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ≣ ((**R** α **a** **b**) α **a** **b**)
& ((**R** α **a** **b**) α **a** **b**) ≣ **R**
⇒ ((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ≣ **R**
,! 6 (()E: 5) ¡

((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ≣ **R** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀R∀a∀b ((R α a b) α b a) ≣ R ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **19.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b R ⫋ ((R α a b) α b a) ¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ≣ **R** ,! 2 (∀E: P18) ¡

(((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ≣ **R** ⇒ **R** ⫋ ((**R** α **a** **b**) α **b** **a**))
,! 3 (∀E: C1.10) ¡

((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ≣ **R** ⇒ **R** ⫋ ((**R** α **a** **b**) α **b** **a**)
,! 4 (()E: 3) ¡

R ⫅ ((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀R∀a∀b R ⫅ ((R α a b) α b a) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **20.** ¡

⊦ ∀R∀S∀a∀b (R ⫅ (S α a b) ⇒ (R α a b) ⫅ S) ¡

R,**S**,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ (**S** α **a** **b**) ,! 2 (Prem) ¡

(**R** ⫅ (**S** α **a** **b**) ⇒ (**R** α **a** **b**) ⫅ ((**S** α **a** **b**) α **a** **b**))
,! 3 (∀E: P13) ¡

R ⫅ (**S** α **a** **b**) ⇒ (**R** α **a** **b**) ⫅ ((**S** α **a** **b**) α **a** **b**)
,! 4 (()E: 3) ¡

(**R** α **a** **b**) ⫅ ((**S** α **a** **b**) α **a** **b**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**S** α **a** **b**) α **a** **b**) ≡ **S** ,! 6 (∀E: P17) ¡

(**R** α **a** **b**) ⫅ ((**S** α **a** **b**) α **a** **b**) & ((**S** α **a** **b**) α **a** **b**) ≡ **S**
,! 7 (&I: 5,6) ¡

((**R** α **a** **b**) ⫅ ((**S** α **a** **b**) α **a** **b**) & ((**S** α **a** **b**) α **a** **b**) ≡ **S**
⇒ (**R** α **a** **b**) ⫅ **S**)
,! 8 (∀E: C1.13) ¡

(**R** α **a** **b**) ⫅ ((**S** α **a** **b**) α **a** **b**) & ((**S** α **a** **b**) α **a** **b**) ≡ **S**
⇒ (**R** α **a** **b**) ⫅ **S**
,! 9 (()E: 8) ¡

(**R** α **a** **b**) ⫅ **S** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

R ⫅ (**S** α **a** **b**) ⇒ (**R** α **a** **b**) ⫅ **S** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(**R** ⫅ (**S** α **a** **b**) ⇒ (**R** α **a** **b**) ⫅ **S**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀R∀S∀a∀b (R ⫅ (S α a b) ⇒ (R α a b) ⫅ S)
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **21.** ¡

⊦ ∀R∀S∀a∀b ((R α a b) ⫅ S ⇒ R ⫅ (S α a b)) ¡

R,**S**,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

(**R** α **a** **b**) ⫅ **S** ,! 2 (Prem) ¡

((R α a b) ⫅ S ⇒ ((R α a b) α a b) ⫅ (S α a b))
,! 3 (∀E: P13) ¡

(R α a b) ⫅ S ⇒ ((R α a b) α a b) ⫅ (S α a b)
,! 4 (()E: 3) ¡

((R α a b) α a b) ⫅ (S α a b) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

R ⫅ ((R α a b) α a b) ,! 6 (∀E: P16) ¡

R ⫅ ((R α a b) α a b) & ((R α a b) α a b) ⫅ (S α a b)
,! 7 (&I: 5,6) ¡

(R ⫅ ((R α a b) α a b) & ((R α a b) α a b) ⫅ (S α a b)
⇒ R ⫅ (S α a b))
,! 8 (∀E: C1.4) ¡

R ⫅ ((R α a b) α a b) & ((R α a b) α a b) ⫅ (S α a b)
⇒ R ⫅ (S α a b)
,! 9 (()E: 8) ¡

R ⫅ (S α a b) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(R α a b) ⫅ S ⇒ R ⫅ (S α a b) ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

((R α a b) ⫅ S ⇒ R ⫅ (S α a b)) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀R∀S∀a∀b ((R α a b) ⫅ S ⇒ R ⫅ (S α a b))
! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **22.** ¡

⊢ ∀R∀S∀a∀b ((R α a b) ≡ S ⇒ (S α a b) ≡ R) ¡

R,S,a,b ,! 1 (Prem) ¡

(R α a b) ≡ S ,! 2 (Prem) ¡

((R α a b) ≡ S ⇒ (R α a b) ⫅ S & S ⫅ (R α a b))
,! 3 (∀E: C1.11) ¡

(R α a b) ≡ S ⇒ (R α a b) ⫅ S & S ⫅ (R α a b)
,! 4 (()E: 3) ¡

(R α a b) ⫅ S & S ⫅ (R α a b) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(R α a b) ⫅ S ,! 6 (&E: 5) ¡

S ⫅ (R α a b) ,! 7 (&E: 5) ¡

((R α a b) ⫅ S ⇒ R ⫅ (S α a b)) ,! 8 (∀E: P20) ¡

(R α a b) ⫅ S ⇒ R ⫅ (S α a b) ,! 9 (()E: 8) ¡

R ⫅ (S α a b) ,! 10 (⇒E: 6,9) ¡

(S ⫅ (R α a b) ⇒ (S α a b) ⫅ R) ,! 11 (∀E: P19) ¡

S ⫅ (R α a b) ⇒ (S α a b) ⫅ R ,! 12 (()E: 11) ¡

(S α a b) ⫅ R ,! 13 (⇒E: 7,12) ¡

(S α a b) ⫅ R & R ⫅ (S α a b) ,! 14 (&I: 10,13) ¡

((S α a b) ⫅ R & R ⫅ (S α a b) ⇒ (S α a b) ≡ R)
,! 15 (∀E: C1.6) ¡

(S α a b) ⫅ R & R ⫅ (S α a b) ⇒ (S α a b) ≡ R
,! 16 (()E: 15) ¡

(S α a b) ≡ R ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

(R α a b) ≡ S ⇒ (S α a b) ≡ R ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

((R α a b) ≡ S ⇒ (S α a b) ≡ R) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀R∀S∀a∀b ((R α a b) ≡ S ⇒ (S α a b) ≡ R)
! 20 (∀I: 1,19) ¡

□

! **23.** P23 can be useful, since only one inclusion can be shown in order to prove equivalence. ¡

⊦ ∀R∀a∀b (R ⫅ (R α a b) ⇒ (R α a b) ≡ R) ¡

R,a,b ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ (R α a b) ,! 2 (Prem) ¡

(R ⫅ (R α a b) ⇒ (R α a b) ⫅ R) ,! 3 (∀E: P20) ¡

R ⫅ (R α a b) ⇒ (R α a b) ⫅ R ,! 4 (()E: 3) ¡

(R α a b) ⫅ R ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(R α a b) ⫅ R & R ⫅ (R α a b) ,! 6 (&I: 2,5) ¡

((R α a b) ⫅ R & R ⫅ (R α a b) ⇒ (R α a b) ≡ R)
,! 7 (∀E: C1.6) ¡

(R α a b) ⫅ R & R ⫅ (R α a b) ⇒ (R α a b) ≡ R
,! 8 (()E: 7) ¡

(R α a b) ≡ R ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

R ⫅ (**R** α **a** **b**) ⇒ (**R** α **a** **b**) ≣ **R** ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(**R** ⫅ (**R** α **a** **b**) ⇒ (**R** α **a** **b**) ≣ **R**) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀R∀a∀b (R ⫅ (R α a b) ⇒ (R α a b) ≣ R)
! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **24.** P24 is a lemma for P25. ¡

⊦ ∀R∀a R ⫅ (R α a a) ¡

R,**a** ,! 1 (Prem) ¡

x,**y** ,! 2 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 3 (Prem) ¡

(**y** = **a** ∨ ¬ **y** = **a**) ,! 4 (∀E: I3.4) ¡

y = **a** ∨ ¬ **y** = **a** ,! 5 (()E: 4) ¡

y = **a** ,! 6 (Prem) ¡

R[**x**,**a**] ,! 7 (=E: 3,6) ¡

(**R**[**x**,**a**] ⇒ (**R** α **a** **a**)[**x**,**a**]) ,! 8 (∀E: P8) ¡

R[**x**,**a**] ⇒ (**R** α **a** **a**)[**x**,**a**] ,! 9 (()E: 8) ¡

(**R** α **a** **a**)[**x**,**a**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(**R** α **a** **a**)[**x**,**y**] ,! 11 (=E: 6,10) ¡

y = **a** ⇒ (**R** α **a** **a**)[**x**,**y**] ,! 12 (⇒I: 6,11) ¡

¬ **y** = **a** ,! 13 (Prem) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **a** ,! 14 (&I: 13,13) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**] ,! 15 (&I: 3,14) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**] ⇒ (**R** α **a** **a**)[**x**,**y**])
,! 16 (∀E: P7) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **a** & **R**[**x**,**y**] ⇒ (**R** α **a** **a**)[**x**,**y**]
,! 17 (()E: 16) ¡

(**R** α **a** **a**)[**x**,**y**] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

¬ **y** = **a** ⇒ (**R** α **a** **a**)[**x**,**y**] ,! 19 (⇒I: 13,18) ¡

(**R** α **a** **a**)[**x**,**y**] ,! 20 (∨E: 5,12,19) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ (**R** α **a** **a**)[**x**,**y**] ,! 21 (⇒I: 3,20) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ (**R** α **a** **a**)[**x**,**y**]) ,! 22 (()I: 21) ¡

∀x∀y (**R**[x,y] ⇒ (**R** α **a** **a**)[x,y]) ,! 23 (∀I: 2,22) ¡

R ⫅ (**R** α **a** **a**) ,! 24 (𝕊I: C1.1,23) ¡

∀R∀a R ⫅ (R α a a) ! 25 (∀I: 1,24) ¡

▯

! **25.** Switching the same object does not change **R** (up to equivalence). ¡

⊢ ∀R∀a (R α a a) ≣ R ¡

R,**a** ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ (**R** α **a** **a**) ,! 2 (∀E: P24) ¡

(**R** ⫅ (**R** α **a** **a**) ⇒ (**R** α **a** **a**) ≣ **R**) ,! 3 (∀E: P23) ¡

R ⫅ (**R** α **a** **a**) ⇒ (**R** α **a** **a**) ≣ **R** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**R** α **a** **a**) ≣ **R** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀R∀a (R α a a) ≣ R ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! P26 and P27 are lemmas for P30. They are asserted separately in part so P26 can be used in the proof of P29. ¡

! **26.** ¡

⊢ ∀R∀S∀a∀b∀x (((R ⊔ S) α a b)[x,a]
⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,a]) ¡

R,**S**,**a**,**b**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** ⊔ **S**)[**x**,**b**] ⇔ **R**[**x**,**b**] ∨ **S**[**x**,**b**]) ,! 2 (∀E: C2.2) ¡

(**R** ⊔ **S**)[**x**,**b**] ⇔ **R**[**x**,**b**] ∨ **S**[**x**,**b**] ,! 3 (()E: 2) ¡

(((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**a**]
⇔ (**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ∨ (**S** α **a** **b**)[**x**,**a**])
,! 4 (∀E: C2.2) ¡

((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**a**]
⇔ (**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ∨ (**S** α **a** **b**)[**x**,**a**]
,! 5 (()E: 4) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**a**] ,! 6 (Prem) ¡

(((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**a**] ⇒ (**R** ⊔ **S**)[**x**,**b**])

,! 7 (∀E: P11) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**a**] ⇒ (**R** ⊔ **S**)[**x**,**b**] ,! 8 (()E: 7) ¡

(**R** ⊔ **S**)[**x**,**b**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(**R** ⊔ **S**)[**x**,**b**] ⇒ **R**[**x**,**b**] ∨ **S**[**x**,**b**] ,! 10 (⇔E: 3) ¡

R[**x**,**b**] ∨ **S**[**x**,**b**] ,! 11 (⇒E: 9,10) ¡

R[**x**,**b**] ,! 12 (Prem) ¡

(**R**[**x**,**b**] ⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**a**]) ,! 13 (∀E: P9) ¡

R[**x**,**b**] ⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ,! 14 (()E: 13) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ∨ (**S** α **a** **b**)[**x**,**a**] ,! 16 (∨I: 15) ¡

R[**x**,**b**] ⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ∨ (**S** α **a** **b**)[**x**,**a**]
,! 17 (⇒I: 12,16) ¡

S[**x**,**b**] ,! 18 (Prem) ¡

(**S**[**x**,**b**] ⇒ (**S** α **a** **b**)[**x**,**a**]) ,! 19 (∀E: P9) ¡

S[**x**,**b**] ⇒ (**S** α **a** **b**)[**x**,**a**] ,! 20 (()E: 19) ¡

(**S** α **a** **b**)[**x**,**a**] ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ∨ (**S** α **a** **b**)[**x**,**a**] ,! 22 (∨I: 21) ¡

S[**x**,**b**] ⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ∨ (**S** α **a** **b**)[**x**,**a**]
,! 23 (⇒I: 18,22) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ∨ (**S** α **a** **b**)[**x**,**a**] ,! 24 (∨E: 11,17,23) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ∨ (**S** α **a** **b**)[**x**,**a**]
⇒ ((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**a**]
,! 25 (⇔E: 5) ¡

((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**a**] ,! 26 (⇒E: 24,25) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**a**] ⇒ ((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**a**]
,! 27 (⇒I: 6,26) ¡

((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**a**] ,! 28 (Prem) ¡

((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**a**]
⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ∨ (**S** α **a** **b**)[**x**,**a**]
,! 29 (⇔E: 5) ¡

(R α a b)[x,a] ∨ (S α a b)[x,a] ,! 30 (⇒E: 28,29) ¡

(R α a b)[x,a] ,! 31 (Prem) ¡

((R α a b)[x,a] ⇒ R[x,b]) ,! 32 (∀E: P11) ¡

(R α a b)[x,a] ⇒ R[x,b] ,! 33 (()E: 32) ¡

R[x,b] ,! 34 (⇒E: 31,33) ¡

R[x,b] ∨ S[x,b] ,! 35 (∨I: 34) ¡

(R α a b)[x,a] ⇒ R[x,b] ∨ S[x,b] ,! 36 (⇒I: 31,35) ¡

(S α a b)[x,a] ,! 37 (Prem) ¡

((S α a b)[x,a] ⇒ S[x,b]) ,! 38 (∀E: P11) ¡

(S α a b)[x,a] ⇒ S[x,b] ,! 39 (()E: 38) ¡

S[x,b] ,! 40 (⇒E: 37,39) ¡

R[x,b] ∨ S[x,b] ,! 41 (∨I: 40) ¡

(S α a b)[x,a] ⇒ R[x,b] ∨ S[x,b] ,! 42 (⇒I: 37,41) ¡

R[x,b] ∨ S[x,b] ,! 43 (∨E: 30,36,42) ¡

R[x,b] ∨ S[x,b] ⇒ (R ⊔ S)[x,b] ,! 44 (⇔E: 3) ¡

(R ⊔ S)[x,b] ,! 45 (⇒E: 43,44) ¡

((R ⊔ S)[x,b] ⇒ ((R ⊔ S) α a b)[x,a])
,! 46 (∀E: P9) ¡

(R ⊔ S)[x,b] ⇒ ((R ⊔ S) α a b)[x,a] ,! 47 (()E: 46) ¡

((R ⊔ S) α a b)[x,a] ,! 48 (⇒E: 45,47) ¡

((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,a] ⇒ ((R ⊔ S) α a b)[x,a]
,! 49 (⇒I: 28,48) ¡

((R ⊔ S) α a b)[x,a] ⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,a]
,! 50 (⇔I: 27,49) ¡

(((R ⊔ S) α a b)[x,a] ⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,a])
,! 51 (()I: 50) ¡

∀R∀S∀a∀b∀x (((R ⊔ S) α a b)[x,a]
⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,a])
! 52 (∀I: 1,51) ¡

▯

! **27.** ¡

⊦ ∀R∀S∀a∀b∀x (((R ⊔ S) α a b)[x,b]
⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,b]) ¡

R,**S**,**a**,**b**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

(((**R** ⊔ **S**) α **b** **a**)[**x**,**b**] ⇔ ((**R** α **b** **a**) ⊔ (**S** α **b** **a**))[**x**,**b**])
,! 2 (∀E: P26) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **b** **a**)[**x**,**b**] ⇔ ((**R** α **b** **a**) ⊔ (**S** α **b** **a**))[**x**,**b**]
,! 3 (()E: 2) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**) ≣ ((**R** ⊔ **S**) α **b** **a**) ,! 4 (∀E: P6) ¡

(**R** α **a** **b**) ≣ (**R** α **b** **a**) ,! 5 (∀E: P6) ¡

(**S** α **a** **b**) ≣ (**S** α **b** **a**) ,! 6 (∀E: P6) ¡

(**R** α **a** **b**) ≣ (**R** α **b** **a**) & (**S** α **a** **b**) ≣ (**S** α **b** **a**)
,! 7 (&I: 5,6) ¡

((**R** α **a** **b**) ≣ (**R** α **b** **a**) & (**S** α **a** **b**) ≣ (**S** α **b** **a**)
⇒ ((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**)) ≣ ((**R** α **b** **a**) ⊔ (**S** α **b** **a**)))
,! 8 (∀E: C2.12) ¡

(**R** α **a** **b**) ≣ (**R** α **b** **a**) & (**S** α **a** **b**) ≣ (**S** α **b** **a**)
⇒ ((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**)) ≣ ((**R** α **b** **a**) ⊔ (**S** α **b** **a**))
,! 9 (()E: 8) ¡

((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**)) ≣ ((**R** α **b** **a**) ⊔ (**S** α **b** **a**))
,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**b**] ,! 11 (Prem) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**b**] & ((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**) ≣ ((**R** ⊔ **S**) α **b** **a**)
,! 12 (&I: 4,11) ¡

(((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**b**] & ((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**) ≣ ((**R** ⊔ **S**) α **b** **a**)
⇒ ((**R** ⊔ **S**) α **b** **a**)[**x**,**b**])
,! 13 (∀E: C1.20) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**b**] & ((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**) ≣ ((**R** ⊔ **S**) α **b** **a**)
⇒ ((**R** ⊔ **S**) α **b** **a**)[**x**,**b**]
,! 14 (()E: 13) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **b** **a**)[**x**,**b**] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **b** **a**)[**x**,**b**] ⇒ ((**R** α **b** **a**) ⊔ (**S** α **b** **a**))[**x**,**b**]
,! 16 (⇔E: 3) ¡

((R α b a) ⊔ (S α b a))[x,b] ,! 17 (⇒E: 16) ¡

((R α b a) ⊔ (S α b a))[x,b]
& ((R α a b) ⊔ (S α a b)) ≡ ((R α b a) ⊔ (S α b a))
,! 18 (&I: 10,17) ¡

(((R α b a) ⊔ (S α b a))[x,b]
& ((R α a b) ⊔ (S α a b)) ≡ ((R α b a) ⊔ (S α b a))
⇒ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,b])
,! 19 (∀E: C1.21) ¡

((R α b a) ⊔ (S α b a))[x,b]
& ((R α a b) ⊔ (S α a b)) ≡ ((R α b a) ⊔ (S α b a))
⇒ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,b]
,! 20 (()E: 19) ¡

((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,b] ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

((R ⊔ S) α a b)[x,b] ⇒ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,b]
,! 22 (⇒I: 11,21) ¡

((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,b] ,! 23 (Prem) ¡

((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,b]
& ((R α a b) ⊔ (S α a b)) ≡ ((R α b a) ⊔ (S α b a))
,! 24 (&I: 10,23) ¡

(((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,b]
& ((R α a b) ⊔ (S α a b)) ≡ ((R α b a) ⊔ (S α b a))
⇒ ((R α b a) ⊔ (S α b a))[x,b])
,! 25 (∀E: C1.20) ¡

((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,b]
& ((R α a b) ⊔ (S α a b)) ≡ ((R α b a) ⊔ (S α b a))
⇒ ((R α b a) ⊔ (S α b a))[x,b]
,! 26 (()E: 25) ¡

((R α b a) ⊔ (S α b a))[x,b] ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

((R α b a) ⊔ (S α b a))[x,b] ⇒ ((R ⊔ S) α b a)[x,b]
,! 28 (⇔E: 3) ¡

((R ⊔ S) α b a)[x,b] ,! 29 (⇒E: 27,28) ¡

((R ⊔ S) α b a)[x,b] & ((R ⊔ S) α a b) ≡ ((R ⊔ S) α b a)
,! 30 (&I: 4,29) ¡

(((R ⊔ S) α b a)[x,b] & ((R ⊔ S) α a b) ≡ ((R ⊔ S) α b a)
⇒ ((R ⊔ S) α a b)[x,b])
,! 31 (∀E: C1.21) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **b** **a**)[**x**,**b**] & ((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**) ≣ ((**R** ⊔ **S**) α **b** **a**)
⇒ ((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**b**]
,! 32 (()E: 31) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**b**] ,! 33 (⇒E: 30,32) ¡

((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**b**] ⇒ ((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**b**]
,! 34 (⇒I: 23,33) ¡

((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**b**] ⇔ ((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**b**]
,! 35 (⇔I: 22,34) ¡

(((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**b**] ⇔ ((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**b**])
,! 36 (()I: 35) ¡

∀R∀S∀a∀b∀x (((R ⊔ S) α a b)[x,b]
⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,b])
! 37 (∀I: 1,36) ¡

▯

! **28.** Switching a union is equivalent to the union of the switchings. ¡

⊦ ∀R∀S∀a∀b ((R ⊔ S) α a b) ≣ ((R α a b) ⊔ (S α a b)) ¡

R,**S**,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

(((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**a**] ⇔ ((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**a**])
,! 2 (∀E: P26) ¡

(((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**b**] ⇔ ((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**b**])
,! 3 (∀E: P27) ¡

x,**y** ,! 4 (Prem) ¡

(**y** = **a** ∨ ¬ **y** = **a**) ,! 5 (∀E: I3.4) ¡

y = **a** ∨ ¬ **y** = **a** ,! 6 (()E: 5) ¡

y = a ,! 7 (Prem) ¡

(((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇔ ((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**y**])
,! 8 (=E: 2,7) ¡

y = a
⇒ (((**R** ⊔ **S**) α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇔ ((**R** α **a** **b**) ⊔ (**S** α **a** **b**))[**x**,**y**])
,! 9 (⇒I: 7,8) ¡

¬ **y = a** ,! 10 (Prem) ¡

(**y** = **b** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 11 (∀E: I3.4) ¡

y = **b** ∨ ¬ **y** = **b** ,! 12 (()E: 11) ¡

y = b ,! 13 (Prem) ¡

(((R ⊔ S) α a b)[x,y]
⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y])
,! 14 (=E: 3,13) ¡

y = b
⇒ (((R ⊔ S) α a b)[x,y]
⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y])
,! 15 (⇒I: 13,14) ¡

¬ y = b ,! 16 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b ,! 17 (&I: 10,16) ¡

((R ⊔ S)[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ S[x,y])
,! 18 (∀E: C2.2) ¡

(R ⊔ S)[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ S[x,y] ,! 19 (()E: 18) ¡

(((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y]
⇔ (R α a b)[x,y] ∨ (S α a b)[x,y])
,! 20 (∀E: C2.2) ¡

((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y]
⇔ (R α a b)[x,y] ∨ (S α a b)[x,y]
,! 21 (()E: 20) ¡

((R ⊔ S) α a b)[x,y] ,! 22 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & ((R ⊔ S) α a b)[x,y]
,! 23 (&I: 17,22) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & ((R ⊔ S) α a b)[x,y]
⇒ (R ⊔ S)[x,y])
,! 24 (∀E: P10) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & ((R ⊔ S) α a b)[x,y]
⇒ (R ⊔ S)[x,y]
,! 25 (()E: 24) ¡

(R ⊔ S)[x,y] ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

(R ⊔ S)[x,y] ⇒ R[x,y] ∨ S[x,y] ,! 27 (⇔E: 19) ¡

R[x,y] ∨ S[x,y] ,! 28 (⇒E: 26,27) ¡

R[x,y] ,! 29 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y] ,! 30 (&I: 17,29) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & R[x,y] ⇒ (R α a b)[x,y])
,! 31 (∀E: P7) ¡

$\neg\ \mathbf{y} = \mathbf{a}\ \&\ \neg\ \mathbf{y} = \mathbf{b}\ \&\ \mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
,! 32 (()E: 31) ¡

$(\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 33 (⇒E: 30,32) ¡

$(\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \vee (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
,! 34 (∨I: 33) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \vee (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
,! 35 (⇒I: 29,34) ¡

$\mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 36 (Prem) ¡

$\neg\ \mathbf{y} = \mathbf{a}\ \&\ \neg\ \mathbf{y} = \mathbf{b}\ \&\ \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 37 (&I: 17,36) ¡

$(\ \neg\ \mathbf{y} = \mathbf{a}\ \&\ \neg\ \mathbf{y} = \mathbf{b}\ \&\ \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]\ )$
,! 38 (∀E: P7) ¡

$\neg\ \mathbf{y} = \mathbf{a}\ \&\ \neg\ \mathbf{y} = \mathbf{b}\ \&\ \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
,! 39 (()E: 38) ¡

$(\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 40 (⇒E: 37,39) ¡

$(\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \vee (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
,! 41 (∨I: 40) ¡

$\mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \vee (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
,! 42 (⇒I: 36,41) ¡

$(\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \vee (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
,! 43 (∨E: 28,35,42)
¡

$(\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \vee (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
$\Rightarrow ((\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}) \sqcup (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}))[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
,! 44 (⇔E: 21) ¡

$((\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}) \sqcup (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}))[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 45 (⇒E: 43,44) ¡

$((\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow ((\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}) \sqcup (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}))[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
,! 46 (⇒I: 22,45) ¡

$((\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}) \sqcup (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}))[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 47 (Prem) ¡

$((\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}) \sqcup (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}))[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
$\Rightarrow (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \vee (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
,! 48 (⇔E: 21) ¡

$(\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \vee (\mathbf{S}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
,! 49 (⇒E: 47,48) ¡

(R α a b)[x,y] ,! 50 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y]
,! 51 (&I: 17,50) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y] ⇒ R[x,y])
,! 52 (∀E: P10) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y] ⇒ R[x,y]
,! 53 (()E: 52) ¡

R[x,y] ,! 54 (⇒E: 51,53) ¡

R[x,y] ∨ S[x,y] ,! 54 (∨I: 54) ¡

(R α a b)[x,y] ⇒ R[x,y] ∨ S[x,y]
,! 56 (⇒I: 50,55) ¡

(S α a b)[x,y] ,! 57 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (S α a b)[x,y]
,! 58 (&I: 17,57) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & (S α a b)[x,y] ⇒ S[x,y])
,! 59 (∀E: P10) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (S α a b)[x,y] ⇒ S[x,y]
,! 60 (()E: 59) ¡

S[x,y] ,! 61 (⇒E: 58,60) ¡

R[x,y] ∨ S[x,y] ,! 62 (∨I: 61) ¡

(S α a b)[x,y] ⇒ R[x,y] ∨ S[x,y]
,! 63 (⇒I: 57,62) ¡

R[x,y] ∨ S[x,y] ,! 64 (∨E: 49,56,63)
¡

R[x,y] ∨ S[x,y] ⇒ (R ⊔ S)[x,y] ,! 65 (⇔E: 19) ¡

(R ⊔ S)[x,y] ,! 66 (⇒E: 64,65) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (R ⊔ S)[x,y]
,! 67 (&I: 17,66) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & (R ⊔ S)[x,y]
⇒ ((R ⊔ S) α a b)[x,y])
,! 68 (∀E: P7) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (R ⊔ S)[x,y]
⇒ ((R ⊔ S) α a b)[x,y]
,! 69 (()E: 68) ¡

((R ⊔ S) α a b)[x,y] ,! 70 (⇒E: 67,69) ¡

((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y] ⇒ ((R ⊔ S) α a b)[x,y]
,! 71 (⇒I: 47,70) ¡

((R ⊔ S) α a b)[x,y] ⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y]
,! 72 (⇔I: 46,71) ¡

(((R ⊔ S) α a b)[x,y]
⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y])
,! 73 (()I: 72) ¡

¬ y = b
⇒ (((R ⊔ S) α a b)[x,y]
⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y])
,! 74 (⇒I: 16,73) ¡

(((R ⊔ S) α a b)[x,y]
⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y])
,! 75 (∨E: 12,15,74)
¡

∀x∀y (((R ⊔ S) α a b)[x,y]
⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y])
,! 76 (()I: 75) ¡

¬ y = a
⇒ (((R ⊔ S) α a b)[x,y] ⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y])
,! 77 (⇒I: 10,76) ¡

(((R ⊔ S) α a b)[x,y] ⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y])
,! 78 (∨E: 6,9,77) ¡

∀x∀y (((R ⊔ S) α a b)[x,y] ⇔ ((R α a b) ⊔ (S α a b))[x,y])
,! 79 (∀I: 4,78) ¡

((R ⊔ S) α a b) ≡ ((R α a b) ⊔ (S α a b))
,! 80 (≡I: C1.5,79) ¡

∀R∀S∀a∀b ((R ⊔ S) α a b) ≡ ((R α a b) ⊔ (S α a b))
! 81 (∀I: 1,80) ¡

□

! **29.** ¡

⊢ ∀R∀S∀T∀U∀V∀a∀b (R ≡ (S ⊔ T) & (S α a b) ≡ U & (T α a b) ≡ V
⇒ (R α a b) ≡ (U ⊔ V)) ¡

R,S,T,U,V,a,b ,! 1 (Prem) ¡

R ≡ (S ⊔ T) & (S α a b) ≡ U & (T α a b) ≡ V
,! 2 (Prem) ¡

R ≣ (S ⊔ T) ,! 3 (&E: 2) ¡

(R ≣ (S ⊔ T) ⇒ (R α a b) ≣ ((S ⊔ T) α a b))
,! 4 (∀E: P14) ¡

R ≣ (S ⊔ T) ⇒ (R α a b) ≣ ((S ⊔ T) α a b)
,! 5 (()E: 4) ¡

(R α a b) ≣ ((S ⊔ T) α a b) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

((S ⊔ T) α a b) ≣ ((S α a b) ⊔ (T α a b))
,! 7 (∀E: P28) ¡

(R α a b) ≣ ((S ⊔ T) α a b)
& ((S ⊔ T) α a b) ≣ ((S α a b) ⊔ (T α a b))
,! 8 (&I: 6,7) ¡

(S α a b) ≣ U & (T α a b) ≣ V ,! 9 (&E: 2) ¡

((S α a b) ≣ U & (T α a b) ≣ V
⇒ ((S α a b) ⊔ (T α a b)) ≣ (U ⊔ V))
,! 10 (∀E: C2.12) ¡

(S α a b) ≣ U & (T α a b) ≣ V
⇒ ((S α a b) ⊔ (T α a b)) ≣ (U ⊔ V)
,! 11 (()E: 10) ¡

((S α a b) ⊔ (T α a b)) ≣ (U ⊔ V) ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(R α a b) ≣ ((S ⊔ T) α a b)
& ((S ⊔ T) α a b) ≣ ((S α a b) ⊔ (T α a b))
& ((S α a b) ⊔ (T α a b)) ≣ (U ⊔ V)
,! 13 (&I: 8,12) ¡

((R α a b) ≣ ((S ⊔ T) α a b)
& ((S ⊔ T) α a b) ≣ ((S α a b) ⊔ (T α a b))
& ((S α a b) ⊔ (T α a b)) ≣ (U ⊔ V)
⇒ (R α a b) ≣ (U ⊔ V))
,! 14 (∀E: C1.19) ¡

(R α a b) ≣ ((S ⊔ T) α a b)
& ((S ⊔ T) α a b) ≣ ((S α a b) ⊔ (T α a b))
& ((S α a b) ⊔ (T α a b)) ≣ (U ⊔ V)
⇒ (R α a b) ≣ (U ⊔ V)
,! 15 (()E: 14) ¡

(R α a b) ≣ (U ⊔ V) ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

R ≣ (S ⊔ T) & (S α a b) ≣ U & (T α a b) ≣ V
⇒ (R α a b) ≣ (U ⊔ V)

,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

(**R** ≣ (**S** ⊔ **T**) & (**S** α **a** **b**) ≣ **U** & (**T** α **a** **b**) ≣ **V**
⇒ (**R** α **a** **b**) ≣ (**U** ⊔ **V**))
,! 18 (()I: 17) ¡

∀R∀S∀T∀U∀V∀a∀b (R ≣ (S ⊔ T) & (S α a b) ≣ U & (T α a b) ≣ V
⇒ (R α a b) ≣ (U ⊔ V))
! 19 (∀I: 1,18) ¡

▯

! **30.** Any switching of our empty relationship is also empty. ¡

⊦ ∀a∀b (Φ α a b) ≣ Φ ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

Φ ⫅ (Φ α **a** **b**) ,! 2 (∀E: C4.6) ¡

(Φ ⫅ (Φ α **a** **b**) ⇒ (Φ α **a** **b**) ≣ Φ) ,! 3 (∀E: P23) ¡

Φ ⫅ (Φ α **a** **b**) ⇒ (Φ α **a** **b**) ≣ Φ ,! 4 (()E: 3) ¡

(Φ α **a** **b**) ≣ Φ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀a∀b (Φ α a b) ≣ Φ ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **31.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b∀y (¬ y = a & ¬ y = b & ((R α a b)^{I})[y] ⇒ (R^{I})[y])
¡

R,**a**,**b**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & ((**R** α **a** **b**)^{I})[**y**] ,! 2 (Prem) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** ,! 3 (&E: 2) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I})[**y**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(((**R** α **a** **b**)^{I})[**y**] ⇒ ∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**])
,! 5 (∀E: C6.3) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I})[**y**] ⇒ ∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**] ,! 6 (()E: 5) ¡

∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 8 (∃E: 7) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 9 (&I: 3,8) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**])
,! 10 (∀E: P10) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**]
,! 11 (()E: 10) ¡

R[**x**,**y**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ (**R**^{I})[**y**]) ,! 13 (∀E: C6.5) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ (**R**^{I})[**y**] ,! 14 (()E: 13) ¡

(**R**^{I})[**y**] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & ((**R** α **a** **b**)^{I})[**y**] ⇒ (**R**^{I})[**y**]
,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & ((**R** α **a** **b**)^{I})[**y**] ⇒ (**R**^{I})[**y**])
,! 17 (()I: 16) ¡

∀R∀a∀b∀y (¬ y = a & ¬ y = b & ((R α a b)^{I})[y] ⇒ (R^{I})[y])
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **32.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b (((R α a b)^{I})[a] ⇒ (R^{I})[b]) ¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I})[**a**] ,! 2 (Prem) ¡

(((**R** α **a** **b**)^{I})[**a**] ⇒ ∃x (**R** α **a** **b**)[x,**a**])
,! 3 (∀E: C6.3) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I})[**a**] ⇒ ∃x (**R** α **a** **b**)[x,**a**] ,! 4 (()E: 3) ¡

∃x (**R** α **a** **b**)[x,**a**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ,! 6 (∃E: 5) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ⇒ **R**[**x**,**b**]) ,! 7 (∀E: P11) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**a**] ⇒ **R**[**x**,**b**] ,! 8 (()E: 7) ¡

R[**x**,**b**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(**R**[**x**,**b**] ⇒ (**R**^{I})[**b**]) ,! 10 (∀E: C6.5) ¡

R[**x**,**b**] ⇒ (**R**^{I})[**b**] ,! 11 (()E: 10) ¡

(**R**^{I})[**b**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I})[**a**] ⇒ (**R**^{I})[**b**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(((**R** α **a** **b**)^{I})[**a**] ⇒ (**R**^{I})[**b**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀R∀a∀b (((R α a b)^{I})[a] ⇒ (R^{I})[b]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **33.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b (((R α a b)^{I})[b] ⇒ (R^{I})[a]) ¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I})[**b**] ,! 2 (Prem) ¡

(((**R** α **a** **b**)^{I})[**b**] ⇒ ∃x (**R** α **a** **b**)[x,**b**])
,! 3 (∀E: C6.3) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I})[**b**] ⇒ ∃x (**R** α **a** **b**)[x,**b**] ,! 4 (()E: 3) ¡

∃x (**R** α **a** **b**)[x,**b**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] ,! 6 (∃E: 5) ¡

((**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] ⇒ **R**[**x**,**a**]) ,! 7 (∀E: P12) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**b**] ⇒ **R**[**x**,**a**] ,! 8 (()E: 7) ¡

R[**x**,**a**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(**R**[**x**,**a**] ⇒ (**R**^{I})[**a**]) ,! 10 (∀E: C6.5) ¡

R[**x**,**a**] ⇒ (**R**^{I})[**a**] ,! 11 (()E: 10) ¡

(**R**^{I})[**a**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I})[**b**] ⇒ (**R**^{I})[**a**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(((**R** α **a** **b**)^{I})[**b**] ⇒ (**R**^{I})[**a**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀R∀a∀b (((R α a b)^{I})[b] ⇒ (R^{I})[a]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! P34 through P36 are the contrapositives of P31 through P33. ¡

! **34.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b∀y (¬ y = a & ¬ y = b & ¬ (R^{I})[y]
⇒ ¬ ((R α a b)^{I})[y]) ¡

R,**a**,**b**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & ¬ (R^{I})[y] ,! 2 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ (R^{I})[y] ,! 4 (&E: 2) ¡

((R α a b)^{I})[y] ,! 5 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & ((R α a b)^{I})[y]
,! 6 (&I: 3,5) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & ((R α a b)^{I})[y] ⇒ (R^{I})[y])
,! 7 (∀E: P31) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & ((R α a b)^{I})[y] ⇒ (R^{I})[y]
,! 8 (()E: 7) ¡

(R^{I})[y] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ℑ ,! 10 (ℑI: 4,9) ¡

((R α a b)^{I})[y] ⇒ ℑ ,! 11 (⇒I: 5,10) ¡

¬ ((R α a b)^{I})[y] ,! 12 (¬I: 11) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & ¬ (R^{I})[y] ⇒ ¬ ((R α a b)^{I})[y]
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & ¬ (R^{I})[y] ⇒ ¬ ((R α a b)^{I})[y])
,! 14 (()I: 13) ¡

∀R∀a∀b∀y (¬ y = a & ¬ y = b & ¬ (R^{I})[y]
⇒ ¬ ((R α a b)^{I})[y])
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **35.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b (¬ (R^{I})[a] ⇒ ¬ ((R α a b)^{I})[b]) ¡

R,a,b ,! 1 (Prem) ¡

¬ (R^{I})[a] ,! 2 (Prem) ¡

((R α a b)^{I})[b] ,! 3 (Prem) ¡

(((R α a b)^{I})[b] ⇒ (R^{I})[a]) ,! 4 (∀E: P33) ¡

((R α a b)^{I})[b] ⇒ (R^{I})[a] ,! 5 (()E: 4) ¡

(R^{I})[a] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ℑ ,! 7 (ℑI: 2,6) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I})[**b**] ⇒ ℑ ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬ ((**R** α **a** **b**)^{I})[**b**] ,! 9 (¬I: 8) ¡

¬ (**R**^{I})[**a**] ⇒ ¬ ((**R** α **a** **b**)^{I})[**b**] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(¬ (**R**^{I})[**a**] ⇒ ¬ ((**R** α **a** **b**)^{I})[**b**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀R∀a∀b (¬ (R^{I})[a] ⇒ ¬ ((R α a b)^{I})[b]) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **36.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b (¬ (R^{I})[b] ⇒ ¬ ((R α a b)^{I})[a]) ¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**R**^{I})[**b**] ,! 2 (Prem) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I})[**a**] ,! 3 (Prem) ¡

(((**R** α **a** **b**)^{I})[**a**] ⇒ (**R**^{I})[**b**]) ,! 4 (∀E: P32) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I})[**a**] ⇒ (**R**^{I})[**b**] ,! 5 (()E: 4) ¡

(**R**^{I})[**b**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ℑ ,! 7 (ℑI: 2,6) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I})[**a**] ⇒ ℑ ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬ ((**R** α **a** **b**)^{I})[**a**] ,! 9 (¬I: 8) ¡

¬ (**R**^{I})[**b**] ⇒ ¬ ((**R** α **a** **b**)^{I})[**a**] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(¬ (**R**^{I})[**b**] ⇒ ¬ ((**R** α **a** **b**)^{I})[**a**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀R∀a∀b (¬ (R^{I})[b] ⇒ ¬ ((R α a b)^{I})[a]) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **37.** ¡

⊦ ∀R∀u∀v∀a∀b (R[u,a] & R[v,b] ⇒ ((R α a b)^{I}) ≡ (R^{I})) ¡

R,**u**,**v**,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

R[**u**,**a**] & **R**[**v**,**b**] ,! 2 (Prem) ¡

R[**u**,**a**] ,! 3 (&E: 2) ¡

R[v,b] ,! 4 (&E: 2) ¡

(∀y(∃x (R α a b)[x,y] ⇔ (R^I)[y]) ⇒ ((R α a b)^I) ≡ (R^I))
,! 5 (∀E: C6.14) ¡

∀y(∃x (R α a b)[x,y] ⇔ (R^I)[y]) ⇒ ((R α a b)^I) ≡ (R^I)
,! 6 (()E: 5) ¡

y ,! 7 (Prem) ¡

((R^I)[y] ⇔ ∃x R[x,y]) ,! 8 (∀E: C6.2) ¡

(R^I)[y] ⇔ ∃x R[x,y] ,! 9 (()E: 8) ¡

∃x (R α a b)[x,y] ,! 10 (Prem) ¡

(y = a ∨ ¬ y = a) ,! 11 (∀E: I3.4) ¡

y = a ∨ ¬ y = a ,! 12 (()E: 11) ¡

y = a ,! 13 (Prem) ¡

R[u,y] ,! 14 (=E: 3,13) ¡

∃x R[x,y] ,! 15 (∃I: 14) ¡

y = a ⇒ ∃x R[x,y] ,! 16 (⇒I: 13,15) ¡

¬ y = a ,! 17 (Prem) ¡

(y = b ∨ ¬ y = b) ,! 18 (∀E: I3.4) ¡

y = b ∨ ¬ y = b ,! 19 (()E: 18) ¡

y = b ,! 20 (Prem) ¡

R[v,y] ,! 21 (=E: 4,20) ¡

∃x R[x,y] ,! 22 (∃I: 21) ¡

y = b ⇒ ∃x R[x,y] ,! 23 (⇒I: 20,22) ¡

¬ y = b ,! 24 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b ,! 25 (&I: 17,24) ¡

(R α a b)[x,y] ,! 26 (∃E: 10) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y]
,! 27 (&I: 25,26) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y] ⇒ R[x,y])
,! 28 (∀E: P10) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y] ⇒ R[x,y]
,! 29 (()E: 28) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$	,! 30 (⇒E: 27,29)	¡
$\exists x\ \mathbf{R}[x,\mathbf{y}]$	,! 31 (∃I: 30)	¡
$\neg\ \mathbf{y} = \mathbf{b} \Rightarrow \exists x\ \mathbf{R}[x,\mathbf{y}]$	,! 32 (⇒I: 24,31)	¡
$\exists x\ \mathbf{R}[x,\mathbf{y}]$	,! 33 (∨E: 19,23,32)	¡
$\neg\ \mathbf{y} = \mathbf{a} \Rightarrow \exists x\ \mathbf{R}[x,\mathbf{y}]$	,! 34 (⇒I: 17,33)	¡
$\exists x\ \mathbf{R}[x,\mathbf{y}]$	,! 35 (∨E: 12,16,34)	¡
$\exists x\ \mathbf{R}[x,\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{I})[\mathbf{y}]$	,! 36 (⇔E: 9)	¡
$(\mathbf{R}^{I})[\mathbf{y}]$	,! 37 (⇒E: 35,36)	¡
$\exists x\ (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[x,\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{I})[\mathbf{y}]$	,! 38 (⇒I: 10,37)	¡
$(\mathbf{R}^{I})[\mathbf{y}]$	,! 39 (Prem)	¡
$(\ \mathbf{y} = \mathbf{a} \vee \neg\ \mathbf{y} = \mathbf{a}\ )$	,! 40 (∀E: I3.4)	¡
$\mathbf{y} = \mathbf{a} \vee \neg\ \mathbf{y} = \mathbf{a}$	,! 41 (()E: 40)	¡
$\mathbf{y} = \mathbf{a}$	,! 42 (Prem)	¡
$(\ \mathbf{R}[\mathbf{v},\mathbf{b}] \Rightarrow (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{v},\mathbf{a}]\ )$	,! 43 (∀E: P9)	¡
$\mathbf{R}[\mathbf{v},\mathbf{b}] \Rightarrow (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{v},\mathbf{a}]$	,! 44 (()E: 43)	¡
$(\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{v},\mathbf{a}]$	,! 45 (⇒E: 4,44)	¡
$(\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{v},\mathbf{y}]$	,! 46 (=E: 42,45)	¡
$\exists x\ (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[x,\mathbf{y}]$	,! 47 (∃I: 46)	¡
$\mathbf{y} = \mathbf{a} \Rightarrow \exists x\ (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[x,\mathbf{y}]$	,! 48 (⇒I: 42,47)	¡
$\neg\ \mathbf{y} = \mathbf{a}$	,! 49 (Prem)	¡
$(\ \mathbf{y} = \mathbf{b} \vee \neg\ \mathbf{y} = \mathbf{b}\ )$	,! 50 (∀E: I3.4)	¡
$\mathbf{y} = \mathbf{b} \vee \neg\ \mathbf{y} = \mathbf{b}$	,! 51 (()E: 50)	¡
$\mathbf{y} = \mathbf{b}$	,! 52 (Prem)	¡
$(\ \mathbf{R}[\mathbf{u},\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{u},\mathbf{b}]\ )$	,! 53 (∀E: P8)	¡
$\mathbf{R}[\mathbf{u},\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{u},\mathbf{b}]$	,! 54 (()E: 53)	¡
$(\mathbf{R}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})[\mathbf{u},\mathbf{b}]$	,! 55 (⇒E: 3,54)	¡

(**R** α **a** **b**)[**u**,**y**] ,! 56 (=E: 52,55) ¡

∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**] ,! 57 (∃I: 56) ¡

y = **b** ⇒ ∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**] ,! 58 (⇒I: 52,57) ¡

¬ **y** = **b** ,! 59 (Prem) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** ,! 60 (&I: 49,59) ¡

(**R**^{I})[**y**] ⇒ ∃x **R**[x,**y**] ,! 61 (⇔E: 9) ¡

∃x **R**[x,**y**] ,! 62 (⇒E: 39,61) ¡

R[**x**,**y**] ,! 63 (∃E: 62) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**] ,! 64 (&I: 60,63) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**] ⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**])
,! 65 (∀E: P7) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & **R**[**x**,**y**] ⇒ (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**]
,! 66 (()E: 65) ¡

(**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 67 (⇒E: 64,66) ¡

∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**] ,! 68 (∃I: 67) ¡

¬ **y** = **b** ⇒ ∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**] ,! 69 (⇒I: 59,68) ¡

∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**] ,! 70 (∨E: 51,58,69)
¡

¬ **y** = **a** ⇒ ∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**] ,! 71 (⇒I: 49,70) ¡

∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**] ,! 72 (∨E: 41,48,71)
¡

(**R**^{I})[**y**] ⇒ ∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**] ,! 73 (⇒I: 39,72) ¡

∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**] ⇔ (**R**^{I})[**y**] ,! 74 (⇔I: 38,73) ¡

(∃x (**R** α **a** **b**)[x,**y**] ⇔ (**R**^{I})[**y**]) ,! 75 (()I: 74) ¡

∀y(∃x (**R** α **a** **b**)[x,y] ⇔ (**R**^{I})[y]) ,! 76 (∀I: 7,75) ¡

((**R** α **a** **b**)^{I}) ≡ (**R**^{I}) ,! 77 (⇒E: 6,76) ¡

R[**u**,**a**] & **R**[**v**,**b**] ⇒ ((**R** α **a** **b**)^{I}) ≡ (**R**^{I}) ,! 78 (⇒I: 2,77) ¡

(**R**[**u**,**a**] & **R**[**v**,**b**] ⇒ ((**R** α **a** **b**)^{I}) ≡ (**R**^{I}))
,! 79 (()I: 78) ¡

∀R∀u∀v∀a∀b (R[u,a] & R[v,b] ⇒ ((R α a b)^{I}) ≡ (R^{I}))

```
                                              ! 80 (∀I: 1,79)    ¡

▯

! P38 through P43 make assertions about switchings of pairing
relationships.                                                   ¡

! 38.                                                            ¡

├ ∀a∀b∀u (u ▪ a) ⫅ ((u ▪ b) α a b)                               ¡

  a,b,u                                      ,! 1 (Prem)         ¡

    x,y                                      ,! 2 (Prem)         ¡

      (u ▪ a)[x,y]                           ,! 3 (Prem)         ¡

      ( (u ▪ a)[x,y] ⇒ x = u & y = a )       ,! 4 (∀E: C12.3)    ¡

      (u ▪ a)[x,y] ⇒ x = u & y = a           ,! 5 (()E: 4)       ¡

      x = u & y = a                          ,! 6 (⇒E: 3,5)      ¡

      x = u                                  ,! 7 (&E: 6)        ¡

      y = a                                  ,! 8 (&E: 6)        ¡

      (u ▪ b)[u,b]                           ,! 9 (∀E: C12.5)    ¡

      ( (u ▪ b)[u,b] ⇒ ((u ▪ b) α a b)[u,a] )
                                             ,! 10 (∀E: P9)      ¡

      (u ▪ b)[u,b] ⇒ ((u ▪ b) α a b)[u,a]
                                             ,! 11 (()E: 10)     ¡

      ((u ▪ b) α a b)[u,a]                   ,! 12 (⇒E: 9,11)    ¡

      ((u ▪ b) α a b)[x,a]                   ,! 13 (=E: 7,12)    ¡

      ((u ▪ b) α a b)[x,y]                   ,! 14 (=E: 8,13)    ¡

    (u ▪ a)[x,y] ⇒ ((u ▪ b) α a b)[x,y]      ,! 15 (⇒I: 3,14)    ¡

    ( (u ▪ a)[x,y] ⇒ ((u ▪ b) α a b)[x,y] )
                                             ,! 16 (()I: 15)     ¡

  ∀x∀y ( (u ▪ a)[x,y] ⇒ ((u ▪ b) α a b)[x,y] )
                                             ,! 17 (∀I: 2,16)    ¡

  (u ▪ a) ⫅ ((u ▪ b) α a b)                  ,! 18 (⫅I: C1.1,17) ¡

∀a∀b∀u (u ▪ a) ⫅ ((u ▪ b) α a b)              ! 19 (∀I: 1,18)    ¡

▯

! 39.                                                            ¡
```

⊦ ∀a∀b∀u ((u ▪ b) α a b) ⫅ (u ▪ a) ¡

a,**b**,**u** ,! 1 (Prem) ¡

(**u** ▪ **b**) ⫅ ((**u** ▪ **a**) α **b** **a**) ,! 2 (∀E: P38) ¡

((**u** ▪ **b**) ⫅ ((**u** ▪ **a**) α **b** **a**)
⇒ ((**u** ▪ **b**) α **a** **b**) ⫅ (**u** ▪ **a**) α **b** **a**) α **a** **b**))
,! 3 (∀E: P13) ¡

(**u** ▪ **b**) ⫅ ((**u** ▪ **a**) α **b** **a**)
⇒ ((**u** ▪ **b**) α **a** **b**) ⫅ (((**u** ▪ **a**) α **b** **a**) α **a** **b**)
,! 4 (()E: 3) ¡

((**u** ▪ **b**) α **a** **b**) ⫅ (((**u** ▪ **a**) α **b** **a**) α **a** **b**)
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(((**u** ▪ **a**) α **b** **a**) α **a** **b**) ≣ (**u** ▪ **a**) ,! 6 (∀E: P18) ¡

((**u** ▪ **b**) α **a** **b**) ⫅ (((**u** ▪ **a**) α **b** **a**) α **a** **b**)
& (((**u** ▪ **a**) α **b** **a**) α **a** **b**) ≣ (**u** ▪ **a**)
,! 7 (&I: 5,6) ¡

(((**u** ▪ **b**) α **a** **b**) ⫅ (((**u** ▪ **a**) α **b** **a**) α **a** **b**)
& (((**u** ▪ **a**) α **b** **a**) α **a** **b**) ≣ (**u** ▪ **a**)
⇒ ((**u** ▪ **b**) α **a** **b**) ⫅ (**u** ▪ **a**))
,! 8 (∀E: C1.13) ¡

((**u** ▪ **b**) α **a** **b**) ⫅ (((**u** ▪ **a**) α **b** **a**) α **a** **b**)
& (((**u** ▪ **a**) α **b** **a**) α **a** **b**) ≣ (**u** ▪ **a**)
⇒ ((**u** ▪ **b**) α **a** **b**) ⫅ (**u** ▪ **a**)
,! 9 (()E: 8) ¡

((**u** ▪ **b**) α **a** **b**) ⫅ (**u** ▪ **a**) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

∀a∀b∀u ((u ▪ b) α a b) ⫅ (u ▪ a) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **40.** ¡

⊦ ∀a∀b∀u ((u ▪ b) α a b) ≣ (u ▪ a) ¡

a,**b**,**u** ,! 1 (Prem) ¡

((**u** ▪ **b**) α **a** **b**) ⫅ (**u** ▪ **a**) ,! 2 (∀E: P39) ¡

(**u** ▪ **a**) ⫅ ((**u** ▪ **b**) α **a** **b**) ,! 3 (∀E: P38) ¡

((**u** ▪ **b**) α **a** **b**) ⫅ (**u** ▪ **a**) & (**u** ▪ **a**) ⫅ ((**u** ▪ **b**) α **a** **b**)
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(((u ▪ b) α a b) ⫋ (u ▪ a) & (u ▪ a) ⫋ ((u ▪ b) α a b)
⇒ ((u ▪ b) α a b) ≣ (u ▪ a))
,! 5 (∀E: C1.6) ¡

((u ▪ b) α a b) ⫋ (u ▪ a) & (u ▪ a) ⫋ ((u ▪ b) α a b)
⇒ ((u ▪ b) α a b) ≣ (u ▪ a)
,! 6 (()E: 5) ¡

((u ▪ b) α a b) ≣ (u ▪ a) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀a∀b∀u ((u ▪ b) α a b) ≣ (u ▪ a) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **41.** ¡

⊢ ∀a∀b∀u ((u ▪ a) α a b) ≣ (u ▪ b) ¡

a,b,u ,! 1 (Prem) ¡

((u ▪ a) α a b) ≣ ((u ▪ a) α b a) ,! 2 (∀E: P6) ¡

((u ▪ a) α b a) ≣ (u ▪ b) ,! 3 (∀E: P40) ¡

((u ▪ a) α a b) ≣ ((u ▪ a) α b a)
& ((u ▪ a) α b a) ≣ (u ▪ b)
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(((u ▪ a) α a b) ≣ ((u ▪ a) α b a)
& ((u ▪ a) α b a) ≣ (u ▪ b)
⇒ ((u ▪ a) α a b) ≣ (u ▪ b))
,! 5 (∀E: C1.15) ¡

((u ▪ a) α a b) ≣ ((u ▪ a) α b a)
& ((u ▪ a) α b a) ≣ (u ▪ b)
⇒ ((u ▪ a) α a b) ≣ (u ▪ b)
,! 6 (()E: 5) ¡

((u ▪ a) α a b) ≣ (u ▪ b) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀a∀b∀u ((u ▪ a) α a b) ≣ (u ▪ b) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **42.** ¡

⊢ ∀a∀b∀u∀v (¬ v = a & ¬ v = b ⇒ (u ▪ v) ⫋ ((u ▪ v) α a b))
¡

a,b,u,v ,! 1 (Prem) ¡

¬ v = a & ¬ v = b ,! 2 (Prem) ¡

x,y ,! 3 (Prem) ¡

(u ▪ v)[x,y] ,! 4 (Prem) ¡

((u ▪ v)[x,y] ⇒ x = u & y = v) ,! 5 (∀E: C12.3) ¡

(u ▪ v)[x,y] ⇒ x = u & y = v ,! 6 (()E: 5) ¡

x = u & y = v ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

y = v ,! 8 (&E: 7) ¡

(u ▪ v)[x,v] ,! 9 (=E: 4,8) ¡

¬ v = a & ¬ v = b & (u ▪ v)[x,v] ,! 10 (&I: 2,9) ¡

(¬ v = a & ¬ v = b & (u ▪ v)[x,v]
⇒ (u ▪ v) α a b)[x,v])
,! 11 (∀E: P7) ¡

¬ v = a & ¬ v = b & (u ▪ v)[x,v] ⇒ (u ▪ v) α a b)[x,v]
,! 12 (()E: 11) ¡

(u ▪ v) α a b)[x,v] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(u ▪ v) α a b)[x,y] ,! 14 (=E: 8,13) ¡

(u ▪ v)[x,y] ⇒ (u ▪ v) α a b)[x,y] ,! 15 (⇒I: 4,14) ¡

((u ▪ v)[x,y] ⇒ (u ▪ v) α a b)[x,y])
,! 16 (()I: 15) ¡

∀x∀y ((u ▪ v)[x,y] ⇒ (u ▪ v) α a b)[x,y])
,! 17 (∀I: 3,16) ¡

(u ▪ v) ⫅ (u ▪ v) α a b) ,! 18 (⫅I: C1.1,17) ¡

¬ v = a & ¬ v = b ⇒ (u ▪ v) ⫅ (u ▪ v) α a b)
,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(¬ v = a & ¬ v = b ⇒ (u ▪ v) ⫅ (u ▪ v) α a b))
,! 20 (()I: 19) ¡

∀a∀b∀u∀v (¬ v = a & ¬ v = b ⇒ (u ▪ v) ⫅ ((u ▪ v) α a b))
! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **43.** ¡

⊢ ∀a∀b∀u∀v (¬ v = a & ¬ v = b ⇒ ((u ▪ v) α a b) ≡ (u ▪ v))
¡

a,b,u,v ,! 1 (Prem) ¡

¬ v = a & ¬ v = b ,! 2 (Prem) ¡

(¬ v = a & ¬ v = b ⇒ (u ■ v) ⫅ ((u ■ v) α a b))
,! 3 (∀E: P42) ¡

¬ v = a & ¬ v = b ⇒ (u ■ v) ⫅ ((u ■ v) α a b)
,! 4 (()E: 3) ¡

(u ■ v) ⫅ ((u ■ v) α a b) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((u ■ v) ⫅ ((u ■ v) α a b) ⇒ ((u ■ v) α a b) ≣ (u ■ v))
,! 6 (∀E: P23) ¡

(u ■ v) ⫅ ((u ■ v) α a b) ⇒ ((u ■ v) α a b) ≣ (u ■ v)
,! 7 (()E: 6) ¡

((u ■ v) α a b) ≣ (u ■ v) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

¬ v = a & ¬ v = b ⇒ ((u ■ v) α a b) ≣ (u ■ v)
,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(¬ v = a & ¬ v = b ⇒ ((u ■ v) α a b) ≣ (u ■ v))
,! 10 (()I: 9) ¡

∀a∀b∀u∀v (¬ v = a & ¬ v = b ⇒ ((u ■ v) α a b) ≣ (u ■ v))
! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **44.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b∀u ((R α a b) ι u a) ⫅ ((R ι u b) α a b) ¡

R,a,b,u ,! 1 (Prem) ¡

x,y ,! 2 (Prem) ¡

((R α a b) ι u a)[x,y] ,! 3 (Prem) ¡

(((R α a b) ι u a)[x,y]
⇒ (R α a b)[x,y] & (¬ x = u ∨ ¬ y = a))
,! 4 (∀E: C14.3) ¡

((R α a b) ι u a)[x,y]
⇒ (R α a b)[x,y] & (¬ x = u ∨ ¬ y = a))
,! 5 (()E: 4) ¡

(R α a b)[x,y] & (¬ x = u ∨ ¬ y = a)
,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(R α a b)[x,y] ,! 7 (&E: 6) ¡

(¬ x = u ∨ ¬ y = a) ,! 8 (&E: 6) ¡

(y = a ∨ ¬ y = a) ,! 9 (∀E: I3.4) ¡

y = a ∨ ¬ y = a ,! 10 (()E: 9) ¡

y = a ,! 11 (Prem) ¡

(R α a b)[x,a] ,! 12 (=E: 7,11) ¡

((R α a b)[x,a] ⇒ R[x,b]) ,! 13 (∀E: P11) ¡

(R α a b)[x,a] ⇒ R[x,b] ,! 14 (()E: 13) ¡

R[x,b] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

(¬ x = u ∨ ¬ y = a) & y = a ,! 16 (&I: 8,11) ¡

((¬ x = u ∨ ¬ y = a) & y = a ⇒ ¬ x = u) ,! 17 (∀E: I3.8) ¡

(¬ x = u ∨ ¬ y = a) & y = a ⇒ ¬ x = u ,! 18 (()E: 17) ¡

¬ x = u ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

¬ x = u ∨ ¬ b = b ,! 20 (∨I: 19) ¡

(¬ x = u ∨ ¬ b = b) ,! 21 (()I: 20) ¡

R[x,b] & (¬ x = u ∨ ¬ b = b) ,! 22 (&I: 15,21) ¡

(R[x,b] & (¬ x = u ∨ ¬ b = b) ⇒ (R ι u b)[x,b]) ,! 23 (∀E: C14.4) ¡

R[x,b] & (¬ x = u ∨ ¬ b = b) ⇒ (R ι u b)[x,b] ,! 24 (()E: 23) ¡

(R ι u b)[x,b] ,! 25 (⇒E: 22,24) ¡

((R ι u b)[x,b] ⇒ ((R ι u b) α a b)[x,a]) ,! 26 (∀E: P9) ¡

(R ι u b)[x,b] ⇒ ((R ι u b) α a b)[x,a] ,! 27 (()E: 26) ¡

((R ι u b) α a b)[x,a] ,! 28 (⇒E: 25,27) ¡

((R ι u b) α a b)[x,y] ,! 29 (=E: 11,28) ¡

y = a ⇒ ((R ι u b) α a b)[x,y] ,! 30 (⇒I: 11,29) ¡

¬ y = a ,! 31 (Prem) ¡

(y = b ∨ ¬ y = b) ,! 32 (∀E: I3.4) ¡

y = b ∨ ¬ y = b ,! 33 (()E: 32) ¡

y = b ,! 34 (Prem) ¡

(R α a b)[x,b] ,! 35 (=E: 7,34) ¡

((R α a b)[x,b] ⇒ R[x,a]) ,! 36 (∀E: P12) ¡

(R α a b)[x,b] ⇒ R[x,a] ,! 37 (()E: 36) ¡

R[x,a] ,! 38 (⇒E: 35,37) ¡

(¬ y = a ⇒ ¬ a = y) ,! 39 (∀E: I3.3) ¡

¬ y = a ⇒ ¬ a = y ,! 40 (()E: 39) ¡

¬ a = y ,! 41 (⇒E: 31,40) ¡

¬ a = b ,! 42 (=E: 34,41) ¡

¬ x = u ∨ ¬ a = b ,! 43 (∨I: 42) ¡

(¬ x = u ∨ ¬ a = b) ,! 44 (()I: 43) ¡

R[x,a] & (¬ x = u ∨ ¬ a = b) ,! 45 (&I: 38,44) ¡

(R[x,a] & (¬ x = u ∨ ¬ a = b) ⇒ (R ι u b)[x,a])
,! 46 (∀E: C14.4) ¡

R[x,a] & (¬ x = u ∨ ¬ a = b) ⇒ (R ι u b)[x,a]
,! 47 (()E: 46) ¡

(R ι u b)[x,a] ,! 48 (⇒E: 45,47) ¡

((R ι u b)[x,a] ⇒ ((R ι u b) α a b)[x,b])
,! 49 (∀E: P8) ¡

(R ι u b)[x,a] ⇒ ((R ι u b) α a b)[x,b]
,! 50 (()E: 49) ¡

((R ι u b) α a b)[x,b] ,! 51 (⇒E: 48,50) ¡

((R ι u b) α a b)[x,y] ,! 52 (=E: 34,51) ¡

y = b ⇒ ((R ι u b) α a b)[x,y] ,! 53 (⇒I: 34,52) ¡

¬ y = b ,! 54 (Prem) ¡

¬ y = a & ¬ y = b ,! 55 (&I: 31,54) ¡

¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y]
,! 56 (&I: 7,55) ¡

(¬ y = a & ¬ y = b & (R α a b)[x,y] ⇒ R[x,y])
,! 57 (∀E: P10) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** α **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**]
,! 58 (()E: 57) ¡

R[**x**,**y**] ,! 59 (⇒E: 56,58) ¡

¬ **x** = **u** ∨ ¬ **y** = **b** ,! 60 (∨I: 54) ¡

(¬ **x** = **u** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 61 (()I: 60) ¡

R[**x**,**y**] & (¬ **x** = **u** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 62 (&I: 59,61) ¡

(**R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **u** ∨ ¬ **y** = **b**) ⇒ (**R** ι **u** **b**)[**x**,**y**])
,! 63 (∀E: C14.4) ¡

R[**x**,**y**] & (¬ **x** = **u** ∨ ¬ **y** = **b**) ⇒ (**R** ι **u** **b**)[**x**,**y**]
,! 64 (()E: 63) ¡

(**R** ι **u** **b**)[**x**,**y**] ,! 65 (⇒E: 62,64) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** ι **u** **b**)[**x**,**y**]
,! 66 (&I: 55,65) ¡

(¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** ι **u** **b**)[**x**,**y**]
⇒ ((**R** ι **u** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**])
,! 67 (∀E: P7) ¡

¬ **y** = **a** & ¬ **y** = **b** & (**R** ι **u** **b**)[**x**,**y**]
⇒ ((**R** ι **u** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**]
,! 68 (()E: 67) ¡

((**R** ι **u** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 69 (⇒E: 66,68) ¡

¬ **y** = **b** ⇒ ((**R** ι **u** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**],! 70 (⇒I: 54,69) ¡

((**R** ι **u** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 71 (∨E: 33,53,70)
¡

¬ **y** = **a** ⇒ ((**R** ι **u** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 72 (⇒I: 31,71) ¡

((**R** ι **u** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 73 (∨E: 10,30,72)
¡

((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**)[**x**,**y**] ⇒ ((**R** ι **u** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**]
,! 74 (⇒I: 3,73) ¡

(((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**)[**x**,**y**] ⇒ ((**R** ι **u** **b**) α **a** **b**)[**x**,**y**])
,! 75 (()I: 74) ¡

∀x∀y (((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**)[x,y] ⇒ ((**R** ι **u** **b**) α **a** **b**)[x,y])
,! 76 (∀I: 2,75) ¡

((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**) ⫅ ((**R** ι **u** **b**) α **a** **b**) ,! 77 (⫅I: C1.1,76) ¡

∀R∀a∀b∀u ((R α a b) ι u a) ≦ ((R ι u b) α a b)
! 78 (∀I: 1,77) ¡

▯

! **45.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b∀u ((R ι u b) α a b) ≡ ((R α a b) ι u a) ¡

R,**a**,**b**,**u** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**) ≦ ((**R** ι **u** **b**) α **a** **b**) ,! 2 (∀E: P44) ¡

(((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**) α **b** **a**)
,! 3 (∀E: P44) ¡

R ≦ ((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ,! 4 (∀E: P19) ¡

(**R** ≦ ((**R** α **a** **b**) α **b** **a**)
⇒ (**R** ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ι **u** **b**))
,! 5 (∀E: C14.10) ¡

R ≦ ((**R** α **a** **b**) α **b** **a**)
⇒ (**R** ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ι **u** **b**)
,! 6 (()E: 5) ¡

(**R** ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ι **u** **b**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**R** ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ι **u** **b**)
& (((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**) α **b** **a**)
,! 8 (&I: 3,7) ¡

((**R** ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ι **u** **b**)
& (((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**) α **b** **a**)
⇒ (**R** ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**) α **b** **a**))
,! 9 (∀E: C1.4) ¡

(**R** ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ι **u** **b**)
& (((**R** α **a** **b**) α **b** **a**) ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**) α **b** **a**)
⇒ (**R** ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**) α **b** **a**)
,! 10 (()E: 9) ¡

(**R** ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**) α **b** **a**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

((**R** ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**) α **b** **a**)
⇒ ((**R** ι **u** **b**) α **b** **a**) ≦ ((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**))
,! 12 (∀E: P20) ¡

(**R** ι **u** **b**) ≦ (((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**) α **b** **a**)
⇒ ((**R** ι **u** **b**) α **b** **a**) ≦ ((**R** α **a** **b**) ι **u** **a**)
,! 13 (()E: 12) ¡

((R ι u b) α b a) ⫅ ((R α a b) ι u a) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

((R ι u b) α a b) ⫅ ((R ι u b) α b a) ,! 15 (∀E: P5) ¡

((R ι u b) α a b) ⫅ ((R ι u b) α b a)
& ((R ι u b) α b a) ⫅ ((R α a b) ι u a)
,! 16 (&I: 14,15) ¡

(((R ι u b) α a b) ⫅ ((R ι u b) α b a)
& ((R ι u b) α b a) ⫅ ((R α a b) ι u a)
⇒ ((R ι u b) α a b) ⫅ ((R α a b) ι u a))
,! 17 (∀E: C1.4) ¡

((R ι u b) α a b) ⫅ ((R ι u b) α b a)
& ((R ι u b) α b a) ⫅ ((R α a b) ι u a)
⇒ ((R ι u b) α a b) ⫅ ((R α a b) ι u a)
,! 18 (()E: 17) ¡

((R ι u b) α a b) ⫅ ((R α a b) ι u a) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

((R ι u b) α a b) ⫅ ((R α a b) ι u a)
& ((R α a b) ι u a) ⫅ ((R ι u b) α a b)
,! 20 (&I: 2,19) ¡

(((R ι u b) α a b) ⫅ ((R α a b) ι u a)
& ((R α a b) ι u a) ⫅ ((R ι u b) α a b)
⇒ ((R ι u b) α a b) ≣ ((R α a b) ι u a))
,! 21 (∀E: C1.6) ¡

((R ι u b) α a b) ⫅ ((R α a b) ι u a)
& ((R α a b) ι u a) ⫅ ((R ι u b) α a b)
⇒ ((R ι u b) α a b) ≣ ((R α a b) ι u a)
,! 22 (()E: 21) ¡

((R ι u b) α a b) ≣ ((R α a b) ι u a) ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

∀R∀a∀b∀u ((R ι u b) α a b) ≣ ((R α a b) ι u a)
! 24 (∀I: 1,23) ¡

□