!CHAPTER 8

SINGLETON PREDICATES¡

! In this chapter singleton predicates, which are predicates satisfied by one and only one thing, are introduced. $(\mathbf{a}^{\bullet})$ is satisfied by one and only one thing, **a**. ¡

! $^{\bullet}$ is used to represent singleton predicates. ¡

! **1.** ¡

$\mathbb{D}$ $^{\bullet}$; $(\mathbf{a}^{\bullet})$; ; $\{a : a = \mathbf{a}\}$ ¡

! Of propositions P2 through P5, P3 and P5 are the most important. P3 says that the only thing satisfying a singleton predicate is that thing used to define the predicate. P5 asserts that the thing used to define the predicate, satisfies it. ¡

! **2.** ¡

$\vdash \forall a \forall x\ (\ (a^{\bullet})[x] \Leftrightarrow x = a\ )$ ¡

$\mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$\forall x\ (\ \{a : a = \mathbf{a}\}[x] \Leftrightarrow x = \mathbf{a}\ )$,! 2 (Pred) ¡

$\forall x\ (\ (\mathbf{a}^{\bullet})[x] \Leftrightarrow x = \mathbf{a}\ )$,! 3 ($\mathbb{D}$I: P1,2) ¡

$\forall a \forall x\ (\ (a^{\bullet})[x] \Leftrightarrow x = a\ )$! 4 ($\forall$I: 1,3) ¡

▯

! **3.** ¡

$\vdash \forall a \forall x\ (\ (a^{\bullet})[x] \Rightarrow x = a\ )$ ¡

$\mathbf{a},\mathbf{x}$,! 1 (Prem) ¡

$(\ (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}\ )$,! 2 ($\forall$E: P2) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 3 (()E: 2) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 4 ($\Leftrightarrow$E: 3) ¡

$(\ (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}\ )$,! 5 (()I: 4) ¡

$\forall a \forall x\ (\ (a^{\bullet})[x] \Rightarrow x = a\ )$! 6 ($\forall$I: 1,5) ¡

▯

! **4.** ¡

$\vdash \forall a \forall x\ (\ x = a \Rightarrow (a^{\bullet})[x]\ )$ ¡

$\mathbf{a},\mathbf{x}$,! 1 (Prem) ¡

$(\ (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}\ )$,! 2 ($\forall$E: P2) ¡

$(\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 3 (()E: 2) ¡

$\mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}]$,! 4 (⇔E: 3) ¡

$(\mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}])$,! 5 (()I: 4) ¡

$\forall a \forall x (x = a \Rightarrow (a^\bullet)[x])$! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! **5.** ¡

$\vdash \forall a\, (a^\bullet)[a]$ ¡

$\mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{a} = \mathbf{a}$,! 2 (=I) ¡

$(\mathbf{a} = \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{a}])$,! 3 (∀E: P4) ¡

$\mathbf{a} = \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{a}]$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{a}]$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$\forall a\, (a^\bullet)[a]$! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! **6.** This is the second half of Leibniz's Law of Indiscernibles, the first half already having been proven in I3. While philosophically important, it is never used. ¡

$\vdash \forall x \forall y (\forall P(P[x] \Leftrightarrow P[y]) \Rightarrow x = y)$ ¡

$\mathbf{x},\mathbf{y}$,! 1 (Prem) ¡

$\forall P(P[\mathbf{x}] \Leftrightarrow P[\mathbf{y}])$,! 2 (Prem) ¡

$((\mathbf{y}^\bullet)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow (\mathbf{y}^\bullet)[\mathbf{y}])$,! 3 (∀E: 2) ¡

$(\mathbf{y}^\bullet)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow (\mathbf{y}^\bullet)[\mathbf{y}]$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{y}^\bullet)[\mathbf{y}] \Rightarrow (\mathbf{y}^\bullet)[\mathbf{x}]$,! 5 (⇔E: 4) ¡

$(\mathbf{y}^\bullet)[\mathbf{y}]$,! 6 (∀E: P5) ¡

$(\mathbf{y}^\bullet)[\mathbf{x}]$,! 7 (⇒E: 4,5) ¡

$((\mathbf{y}^\bullet)[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y})$,! 8 (∀E: P3) ¡

$(\mathbf{y}^\bullet)[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,! 9 (()E: 8) ¡

$\mathbf{x} = \mathbf{y}$,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

$\forall P(P[\mathbf{x}] \Leftrightarrow P[\mathbf{y}]) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

$(\forall P(P[\mathbf{x}] \Leftrightarrow P[\mathbf{y}]) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y})$,! 12 (()I: 11) ¡

$\forall x \forall y (\forall P(P[x] \Leftrightarrow P[y]) \Rightarrow x = y)$! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **7.** P7 is the contrapositive of P3. ¡

$\vdash \forall a \forall x (\neg x = a \Rightarrow \neg (a^{\bullet})[x])$ ¡

a,**x** ,! 1 (Prem) ¡

$\neg \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}]$,! 3 (Prem) ¡

$((\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a})$,! 4 (∀E: P3) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 5 (()E: 4) ¡

$\mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

$\mathfrak{F}$,! 7 ($\mathfrak{F}$I: 2,6) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathfrak{F}$,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

$\neg (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}]$,! 9 (¬I: 8) ¡

$\neg \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow \neg (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}]$,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

$(\neg \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow \neg (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}])$,! 11 (()I: 10) ¡

$\forall a \forall x (\neg x = a \Rightarrow \neg (a^{\bullet})[x])$! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **8.** P8 is the same as P7, except it switches the order of the terms in the formula before the implication. ¡

$\vdash \forall a \forall x (\neg a = x \Rightarrow \neg (a^{\bullet})[x])$ ¡

a,**x** ,! 1 (Prem) ¡

$\neg \mathbf{a} = \mathbf{x}$,! 2 (Prem) ¡

$(\neg \mathbf{a} = \mathbf{x} \Rightarrow \neg \mathbf{x} = \mathbf{a})$,! 3 (∀E: I3.3) ¡

$\neg \mathbf{a} = \mathbf{x} \Rightarrow \neg \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 4 (()E: 3) ¡

$\neg \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\neg \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow \neg (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}])$,! 6 (∀E: P7) ¡

$\neg \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow \neg (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}]$,! 7 (()E: 6) ¡

¬ (a•)[x] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

¬ a = x ⇒ ¬ (a•)[x] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(¬ a = x ⇒ ¬ (a•)[x]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀a∀x (¬ a = x ⇒ ¬ (a•)[x]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **9.** P9 is the contrapositive of P4. ¡

⊦ ∀a∀x (¬ (a•)[x] ⇒ ¬ x = a) ¡

a,x ,! 1 (Prem) ¡

¬ (a•)[x] ,! 2 (Prem) ¡

x = a ,! 3 (Prem) ¡

¬ (a•)[a] ,! 4 (=E) ¡

(a•)[a] ,! 5 (∀E: P5) ¡

𝔉 ,! 6 (𝔉I: 2,5) ¡

x = a ⇒ 𝔉 ,! 7 (⇒I: 3,6) ¡

¬ x = a ,! 8 (¬I: 7) ¡

¬ (a•)[x] ⇒ ¬ x = a ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(¬ (a•)[x] ⇒ ¬ x = a) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀a∀x (¬ (a•)[x] ⇒ ¬ x = a) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **10.** P10 is the same as P8, except it switches the order of the terms in the formula after the implication. ¡

⊦ ∀a∀x (¬ (a•)[x] ⇒ ¬ a = x) ¡

a,x ,! 1 (Prem) ¡

¬ (a•)[x] ,! 2 (Prem) ¡

(¬ (a•)[x] ⇒ ¬ x = a) ,! 3 (∀E: P9) ¡

¬ (a•)[x] ⇒ ¬ x = a ,! 4 (()E: 3) ¡

¬ x = a ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(¬ x = a ⇒ ¬ a = x) ,! 6 (∀E: I3.3) ¡

¬ x = a ⇒ ¬ a = x ,! 7 (()E: 6) ¡

¬ a = x ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

¬ (a•)[x] ⇒ ¬ a = x ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(¬ (a•)[x] ⇒ ¬ a = x) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀a∀x (¬ (a•)[x] ⇒ ¬ a = x) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **11.** ¡

⊢ ∀a ¬ (a•) ≡ ϕ ¡

a ,! 1 (Prem) ¡

(a•)[a] ,! 2 (∀E: P5) ¡

∃x (a•)[x] ,! 3 (∃I: 2) ¡

(∃x (a•)[x] ⇒ ¬ (a•) ≡ ϕ) ,! 4 (∀E: C5.7) ¡

∃x (a•)[x] ⇒ ¬ (a•) ≡ ϕ ,! 5 (()E: 4) ¡

¬ (a•) ≡ ϕ ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

∀a ¬ (a•) ≡ ϕ ! 7 (∀I: 1,6) ¡

▯

! **12.** ¡

⊢ ∀P∀a ((a•) ⊆ P ⇒ P[a]) ¡

P,a ,! 1 (Prem) ¡

(a•) ⊆ P ,! 2 (Prem) ¡

(a•)[a] ,! 3 (∀E: P5) ¡

(a•)[a] & (a•) ⊆ P ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((a•)[a] & (a•) ⊆ P ⇒ P[a]) ,! 5 (∀E: C1.2) ¡

(a•)[a] & (a•) ⊆ P ⇒ P[a] ,! 6 (()E: 5) ¡

P[a] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(a•) ⊆ P ⇒ P[a] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((a•) ⊆ P ⇒ P[a]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀a ((a•) ⊆ P ⇒ P[a]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **13.** P13 is often used. ¡

⊦ ∀P∀a (P[a] ⇒ (a•) ⊆ P) ¡

P,**a** ,! 1 (Prem) ¡

P[**a**] ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

(**a**•)[**x**] ,! 4 (Prem) ¡

((**a**•)[**x**] ⇒ **x** = **a**) ,! 5 (∀E: P3) ¡

(**a**•)[**x**] ⇒ **x** = **a** ,! 6 (()E: 5) ¡

x = **a** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P[**x**] ,! 8 (=E: 2,7) ¡

(**a**•)[**x**] ⇒ **P**[**x**] ,! 9 (⇒I: 4,8) ¡

((**a**•)[**x**] ⇒ **P**[**x**]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀x ((**a**•)[x] ⇒ **P**[x]) ,! 11 (∀I: 3,10) ¡

(**a**•) ⊆ **P** ,! 12 (𝕊I: C1.1,11) ¡

P[**a**] ⇒ (**a**•) ⊆ **P** ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(**P**[**a**] ⇒ (**a**•) ⊆ **P**) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀P∀a (P[a] ⇒ (a•) ⊆ P) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **14.** P14 is a corollary of P13. ¡

⊦ ∀P∀Q∀a (Q[a] & Q ⊆ P ⇒ (a•) ⊆ P) ¡

P,**Q**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

Q[**a**] & **Q** ⊆ **P** ,! 2 (Prem) ¡

Q[**a**] ,! 3 (&E: 2) ¡

Q ⊆ **P** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**Q**[**a**] ⇒ (**a**•) ⊆ **Q**) ,! 5 (∀E: P13) ¡

Q[**a**] ⇒ (**a**•) ⊆ **Q** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**a**•) ⊆ **Q** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**a**•) ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P** ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**a**•) ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P** ⇒ (**a**•) ⊆ **P**) ,! 9 (∀E: C1.5) ¡

(**a**•) ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P** ⇒ (**a**•) ⊆ **P** ,! 10 (()E: 9) ¡

(**a**•) ⊆ **P** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

Q[**a**] & **Q** ⊆ **P** ⇒ (**a**•) ⊆ **P** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**Q**[**a**] & **Q** ⊆ **P** ⇒ (**a**•) ⊆ **P**) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀a (Q[a] & Q ⊆ P ⇒ (a•) ⊆ P) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **15.** ¡

⊦ ∀P∀a∀x (P[x] & P ⊆ (a•) ⇒ x = a) ¡

P,**a**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

P[**x**] & **P** ⊆ (**a**•) ,! 2 (Prem) ¡

(**P**[**x**] & **P** ⊆ (**a**•) ⇒ (**a**•)[**x**]) ,! 3 (∀E: C1.2) ¡

P[**x**] & **P** ⊆ (**a**•) ⇒ (**a**•)[**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

(**a**•)[**x**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**a**•)[**x**] ⇒ **x** = **a**) ,! 6 (∀E: P3) ¡

(**a**•)[**x**] ⇒ **x** = **a** ,! 7 (()E: 6) ¡

x = **a** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P[**x**] & **P** ⊆ (**a**•) ⇒ **x** = **a** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P**[**x**] & **P** ⊆ (**a**•) ⇒ **x** = **a**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀a∀x (P[x] & P ⊆ (a•) ⇒ x = a) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **16.** ¡

⊦ ∀P∀a (∀x(P[x] ⇒ x = a) ⇔ P ⊆ (a•)) ¡

P,**a** ,! 1 (Prem) ¡

∀x(**P**[x] ⇒ x = **a**) ,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{x}$,! 3 (Prem) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]$,! 4 (Prem) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a})$,! 5 ($\forall$E: 2) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 6 (()E: 5) ¡

$\mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 7 ($\Rightarrow$E: 4,6) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{a}]$,! 8 ($\forall$E: P5) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}]$,! 9 (=E: 7,8) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}]$,! 10 ($\Rightarrow$I: 4,9) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}])$,! 11 (()I: 10) ¡

$\forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet})[x])$,! 12 ($\forall$I: 3,11) ¡

$\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 13 ($\mathbb{S}$I: C1.1,12) ¡

$\forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow x = \mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 14 ($\Rightarrow$I: 2,13) ¡

$\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 15 (Prem) ¡

$\mathbf{x}$,! 16 (Prem) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]$,! 17 (Prem) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 18 (&I: 15,17) ¡

$(\ \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}\ )$,! 19 ($\forall$E: P15) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 20 (()E: 19) ¡

$\mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 21 ($\Rightarrow$E: 18,20) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 22 ($\Rightarrow$I: 17,21) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a})$,! 23 (()I: 22) ¡

$\forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow x = \mathbf{a})$,! 24 ($\forall$I: 16,23) ¡

$\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow x = \mathbf{a})$,! 25 ($\Rightarrow$I: 15,24) ¡

$\forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow x = \mathbf{a}) \Leftrightarrow \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 26 ($\Leftrightarrow$I: 14,25) ¡

$(\ \forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow x = \mathbf{a}) \Leftrightarrow \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})\ )$,! 27 (()I: 26) ¡

$\forall P \forall a\ (\ \forall x(P[x] \Rightarrow x = a) \Leftrightarrow P \subseteq (a^{\bullet})\ )$! 28 ($\forall$I: 1,27) ¡

$\square$

! **17.** ¡

⊢ ∀P∀a (P ≡ (a•) ⇒ P[a]) ¡

P,**a** ,! 1 (Prem) ¡

(indented) **P** ≡ (**a**•) ,! 2 (Prem) ¡

(**a**•)[**a**] ,! 3 (∀E: P5) ¡

(**a**•)[**a**] & **P** ≡ (**a**•) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**a**•)[**a**] & **P** ≡ (**a**•) ⇒ **P**[**a**]) ,! 5 (∀E: C1.36) ¡

(**a**•)[**a**] & **P** ≡ (**a**•) ⇒ **P**[**a**] ,! 6 (()E: 5) ¡

P[**a**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ (**a**•) ⇒ **P**[**a**] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ (**a**•) ⇒ **P**[**a**]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀a (P ≡ (a•) ⇒ P[a]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **18.** ¡

⊢ ∀P∀a∀x (P[x] & P ≡ (a•) ⇒ x = a) ¡

P,**a**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

P[**x**] & **P** ≡ (**a**•) ,! 2 (Prem) ¡

(**P**[**x**] & **P** ≡ (**a**•) ⇒ (**a**•)[**x**]) ,! 3 (∀E: C1.35) ¡

P[**x**] & **P** ≡ (**a**•) ⇒ (**a**•)[**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

(**a**•)[**x**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**a**•)[**x**] ⇒ **x** = **a**) ,! 6 (∀E: P3) ¡

(**a**•)[**x**] ⇒ **x** = **a** ,! 7 (()E: 6) ¡

x = **a** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P[**x**] & **P** ≡ (**a**•) ⇒ **x** = **a** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P**[**x**] & **P** ≡ (**a**•) ⇒ **x** = **a**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀a∀x (P[x] & P ≡ (a•) ⇒ x = a) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **19.** ¡

⊢ ∀P∀a (P ≡ (a•) ⇒ ∀x (P[x] ⇔ x = a)) ¡

P,a ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ (a•) ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

P[x] ,! 4 (Prem) ¡

P[x] & P ≡ (a•) ,! 5 (&I: 2,4) ¡

(P[x] & P ≡ (a•) ⇒ x = a) ,! 6 (∀E: P18) ¡

P[x] & P ≡ (a•) ⇒ x = a ,! 7 (()E: 6) ¡

x = a ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P[x] ⇒ x = a ,! 9 (⇒I: 4,8) ¡

x = a ,! 10 (Prem) ¡

(P ≡ (a•) ⇒ P[a]) ,! 11 (∀E: P17) ¡

P ≡ (a•) ⇒ P[a] ,! 12 (()E: 11) ¡

P[a] ,! 13 (⇒E: 2,12) ¡

P[x] ,! 14 (=E: 10,13) ¡

x = a ⇒ P[x] ,! 15 (⇒I: 10,14) ¡

P[x] ⇔ x = a ,! 16 (⇔I: 9,15) ¡

(P[x] ⇔ x = a) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀x (P[x] ⇔ x = a) ,! 18 (∀I: 3,17) ¡

P ≡ (a•) ⇒ ∀x (P[x] ⇔ x = a) ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(P ≡ (a•) ⇒ ∀x (P[x] ⇔ x = a)) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀P∀a (P ≡ (a•) ⇒ ∀x (P[x] ⇔ x = a)) ! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **20.** ¡

⊢ ∀P∀a (P ≡ (a•) ⇒ P[a] & ∀x (P[x] ⇒ x = a)) ¡

P,a ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ (a•) ,! 2 (Prem) ¡

(P ≡ (a•) ⇒ P[a]) ,! 3 (∀E: P17) ¡

P ≡ (a•) ⇒ P[a] ,! 4 (()E: 3) ¡

P[a] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(P ≡ (a•) ⇒ ∀x (P[x] ⇔ x = a)) ,! 6 (∀E: P19) ¡

P ≡ (a•) ⇒ ∀x (P[x] ⇔ x = a) ,! 7 (()E: 6) ¡

∀x (P[x] ⇔ x = a) ,! 8 (⇒E: 2,7) ¡

x ,! 9 (Prem) ¡

(P[x] ⇔ x = a) ,! 10 (∀E: 8) ¡

P[x] ⇔ x = a ,! 11 (()E: 10) ¡

P[x] ⇒ x = a ,! 12 (⇔E: 11) ¡

(P[x] ⇒ x = a) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀x (P[x] ⇒ x = a) ,! 14 (∀I: 9,13) ¡

P[a] & ∀x (P[x] ⇒ x = a) ,! 15 (&I: 5,14) ¡

P ≡ (a•) ⇒ P[a] & ∀x (P[x] ⇒ x = a) ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(P ≡ (a•) ⇒ P[a] & ∀x (P[x] ⇒ x = a))
,! 17 (()I: 16) ¡

∀P∀a (P ≡ (a•) ⇒ P[a] & ∀x (P[x] ⇒ x = a))
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **21.** ¡

⊦ ∀P∀a (P[a] & P ⊆ (a•) ⇒ P ≡ (a•)) ¡

P,a ,! 1 (Prem) ¡

P[a] & P ⊆ (a•) ,! 2 (Prem) ¡

P[a] ,! 3 (&E: 2) ¡

P ⊆ (a•) ,! 4 (&E: 2) ¡

(P[a] ⇒ (a•) ⊆ P) ,! 5 (∀E: P13) ¡

P[a] ⇒ (a•) ⊆ P ,! 6 (()E: 5) ¡

(a•) ⊆ P ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

$\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \;\&\; (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P}$,! 8 (&I: 4,7) ¡

$(\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \;\&\; (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 9 (∀E: C1.8) ¡

$\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \;\&\; (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 10 (()E: 9) ¡

$\mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}] \;\&\; \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{a}] \;\&\; \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 13 (()I: 12) ¡

$\forall P \forall a \; (P[a] \;\&\; P \subseteq (a^{\bullet}) \Rightarrow P \equiv (a^{\bullet}))$! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **22.** ¡

$\vdash \forall P \forall a \; (P[a] \;\&\; \forall x(P[x] \Rightarrow x = a) \Rightarrow P \equiv (a^{\bullet}))$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}] \;\&\; \forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow x = \mathbf{a})$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 3 (&E: 2) ¡

$\forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow x = \mathbf{a})$,! 4 (&E: 2) ¡

$(\forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow x = \mathbf{a}) \Leftrightarrow \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 5 (∀E: P16) ¡

$\forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow x = \mathbf{a}) \Leftrightarrow \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 6 (()E: 5) ¡

$\forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow x = \mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 7 (⇔E: 6) ¡

$\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}] \;\&\; \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 9 (&I: 3,8) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{a}] \;\&\; \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 10 (∀E: P21) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}] \;\&\; \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 11 (()E: 10) ¡

$\mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}] \;\&\; \forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow x = \mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{a}] \;\&\; \forall x(\mathbf{P}[x] \Rightarrow x = \mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 14 (()I: 13) ¡

$\forall P \forall a \; (P[a] \;\&\; \forall x(P[x] \Rightarrow x = a) \Rightarrow P \equiv (a^{\bullet}))$
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **23. The First Squeeze Theorem.** ¡

$\vdash \forall P \forall a \ (P \subseteq (a^{\bullet}) \Rightarrow P \equiv \phi \vee P \equiv (a^{\bullet}))$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{a}$	,! 1 (Prem)	¡
$\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$	,! 2 (Prem)	¡
$(\mathbf{P} \equiv \phi \vee \neg \mathbf{P} \equiv \phi)$	,! 3 (∀E: C1.48)	¡
$\mathbf{P} \equiv \phi \vee \neg \mathbf{P} \equiv \phi$	,! 4 (()E: 3)	¡
$\mathbf{P} \equiv \phi$	,! 5 (Prem)	¡
$\mathbf{P} \equiv \phi \vee \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$	,! 6 (∨I: 5)	¡
$\mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{P} \equiv \phi \vee \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$	,! 7 (⇒I: 5,6)	¡
$\neg \mathbf{P} \equiv \phi$	,! 8 (Prem)	¡
$(\neg \mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \exists x\ \mathbf{P}[x])$	,! 9 (∀E: C5.16)	¡
$\neg \mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \exists x\ \mathbf{P}[x]$	,! 10 (()E: 9)	¡
$\exists x\ \mathbf{P}[x]$	,! 11 (⇒E: 8,10)	¡
$\mathbf{P}[\mathbf{x}]$	,! 12 (∃E: 11)	¡
$\mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$	,! 13 (&I: 2,11)	¡
$(\mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a})$	,! 14 (∀E: P15)	¡
$\mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 15 (()E: 14)	¡
$\mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 16 (⇒E: 13,15)	¡
$\mathbf{P}[\mathbf{a}]$	,! 17 (=E: 12,16)	¡
$\mathbf{P}[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$	,! 18 (&I: 2,17)	¡
$(\mathbf{P}[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet}))$	,! 19 (∀E: P21)	¡
$\mathbf{P}[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$	,! 20 (()E: 19)	¡
$\mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$	,! 21 (⇒E: 18,20)	¡
$\mathbf{P} \equiv \phi \vee \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$	,! 22 (∨I: 21)	¡
$\neg \mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{P} \equiv \phi \vee \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$	,! 23 (⇒I: 8,22)	¡
$\mathbf{P} \equiv \phi \vee \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$	,! 24 (∨E: 4,7,23)	¡
$\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \mathbf{P} \equiv \phi \vee \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$	,! 25 (⇒I: 2,24)	¡

$(\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow \mathbf{P} \equiv \phi \vee \mathbf{P} \equiv (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 26 (()I: 25) ¡

$\forall P \forall a \ (P \subseteq (a^{\bullet}) \Rightarrow P \equiv \phi \vee P \equiv (a^{\bullet}))$! 27 (∀I: 1,26) ¡

▯

! **24.** ¡

$\vdash \forall a \forall b \ (a = b \Rightarrow (a^{\bullet}) \equiv (b^{\bullet}))$ ¡

$\mathbf{a},\mathbf{b}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{a}]$,! 3 (∀E: P5) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{b}]$,! 4 (=E: 2,3) ¡

$(\mathbf{b}^{\bullet})[\mathbf{a}]$,! 5 (=E: 2,3) ¡

$((\mathbf{b}^{\bullet})[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{b}^{\bullet}))$,! 6 (∀E: P13) ¡

$(\mathbf{b}^{\bullet})[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{b}^{\bullet})$,! 7 (()E: 6) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{b}^{\bullet})$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{b}] \ \& \ (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{b}^{\bullet})$,! 9 (&I: 4,8) ¡

$((\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{b}] \ \& \ (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{b}^{\bullet}) \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \equiv (\mathbf{b}^{\bullet}))$
,! 10 (∀E: P21) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{b}] \ \& \ (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{b}^{\bullet}) \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \equiv (\mathbf{b}^{\bullet})$,! 11 (()E: 10) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet}) \equiv (\mathbf{b}^{\bullet})$,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \equiv (\mathbf{b}^{\bullet})$,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

$(\mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \equiv (\mathbf{b}^{\bullet}))$,! 14 (()I: 13) ¡

$\forall a \forall b \ (a = b \Rightarrow (a^{\bullet}) \equiv (b^{\bullet}))$! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **25.** ¡

$\vdash \forall a \forall b \ ((a^{\bullet}) \equiv (b^{\bullet}) \Rightarrow a = b)$ ¡

$\mathbf{a},\mathbf{b}$,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet}) \equiv (\mathbf{b}^{\bullet})$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{a}]$,! 3 (∀E: P5) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{a}] \ \& \ (\mathbf{a}^{\bullet}) \equiv (\mathbf{b}^{\bullet})$,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**a**•)[**a**] & (**a**•) ≡ (**b**•) ⇒ (**b**•)[**a**]) ,! 5 (∀E: C1.35) ¡

(**a**•)[**a**] & (**a**•) ≡ (**b**•) ⇒ (**b**•)[**a**] ,! 6 (()E: 5) ¡

(**b**•)[**a**] ,! 7 (⇒E: 5,7) ¡

((**b**•)[**a**] ⇒ **a** = **b**) ,! 8 (∀E: P3) ¡

(**b**•)[**a**] ⇒ **a** = **b** ,! 9 (()E: 8) ¡

a = **b** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(**a**•) ≡ (**b**•) ⇒ **a** = **b** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

((**a**•) ≡ (**b**•) ⇒ **a** = **b**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀a∀b ((a•) ≡ (b•) ⇒ a = b) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! Two propositions about complements are placed here, so that the second (P27) can be used by P40. ¡

! **26.** ¡

⊢ ∀a∀x (((a•)^C)[x] ⇔ ¬ x = a) ¡

a,**x** ,! 1 (Prem) ¡

(((**a**•)^C)[**x**] ⇔ ¬ (**a**•)[**x**]) ,! 2 (∀E: C4.2) ¡

((**a**•)^C)[**x**] ⇔ ¬ (**a**•)[**x**] ,! 3 (()E: 2) ¡

((**a**•)^C)[**x**] ,! 4 (Prem) ¡

((**a**•)^C)[**x**] ⇒ ¬ (**a**•)[**x**] ,! 5 (⇔E: 3) ¡

¬ (**a**•)[**x**] ,! 6 (⇒E: 4,5) ¡

(¬ (**a**•)[**x**] ⇒ ¬ **x** = **a**) ,! 7 (∀E: P9) ¡

¬ (**a**•)[**x**] ⇒ ¬ **x** = **a** ,! 8 (()E: 7) ¡

¬ **x** = **a** ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

((**a**•)^C)[**x**] ⇒ ¬ **x** = **a** ,! 10 (⇒I: 4,9) ¡

¬ **x** = **a** ,! 11 (Prem) ¡

(¬ **x** = **a** ⇒ ¬ (**a**•)[**x**]) ,! 12 (∀E: P7) ¡

¬ **x** = **a** ⇒ ¬ (**a**•)[**x**] ,! 13 (()E: 12) ¡

$\neg\ (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}]$,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

$\neg\ (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}] \Rightarrow ((\mathbf{a}^{\bullet})^{C})[\mathbf{x}]$,! 15 (⇔E: 3) ¡

$((\mathbf{a}^{\bullet})^{C})[\mathbf{x}]$,! 16 (⇒E: 14,15) ¡

$\neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow ((\mathbf{a}^{\bullet})^{C})[\mathbf{x}]$,! 17 (⇒I: 11,16) ¡

$((\mathbf{a}^{\bullet})^{C})[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 18 (⇔I: 10,17) ¡

$(\ ((\mathbf{a}^{\bullet})^{C})[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a}\ )$,! 19 (()I: 18) ¡

$\forall a \forall x\ (\ ((a^{\bullet})^{C})[x] \Leftrightarrow \neg\ x = a\ )$! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **27.** ¡

$\vdash \forall P \forall a\ (\ \neg\ P[a] \Rightarrow (a^{\bullet}) \subseteq (P^{C})\ )$ ¡

P,**a** ,! 1 (Prem) ¡

$\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 2 (Prem) ¡

$(\ \neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P}^{C})[\mathbf{a}]\ )$,! 3 (∀E: C4.4) ¡

$\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P}^{C})[\mathbf{a}]$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{P}^{C})[\mathbf{a}]$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\ (\mathbf{P}^{C})[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{P}^{C})\ )$,! 6 (∀E: P13) ¡

$(\mathbf{P}^{C})[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{P}^{C})$,! 7 (()E: 6) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{P}^{C})$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{P}^{C})$,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

$(\ \neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{P}^{C})\ )$,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall P \forall a\ (\ \neg\ P[a] \Rightarrow (a^{\bullet}) \subseteq (P^{C})\ )$! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! P28 through P39 are propositions about singletons and unions. ¡

! **28.** ¡

$\vdash \forall P \forall a \forall x\ (\ (P \cup (a^{\bullet}))[x] \Leftrightarrow P[x] \vee x = a\ )$ ¡

P,**a**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

$(\ (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{x}]\ )$,! 2 (∀E: C2.2) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}]$	,! 3 (()E: 2)	¡
$(\ (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}\ )$	,! 4 (∀E: P2)	¡
$(\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 5 (()E: 4)	¡
$\quad (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))[\mathbf{x}]$	,! 6 (Prem)	¡
$\quad (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}]$	,! 7 (⇔E: 3)	¡
$\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}]$	,! 8 (⇒E: 6,7)	¡
$\quad\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}]$	,! 9 (Prem)	¡
$\quad\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 10 (∨I: 9)	¡
$\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 11 (⇒I: 9,10)	¡
$\quad\quad (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}]$	,! 12 (Prem)	¡
$\quad\quad (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 13 (⇔E: 5)	¡
$\quad\quad \mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 14 (⇒E: 12,13)	¡
$\quad\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 15 (∨I: 14)	¡
$\quad (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 16 (⇒I: 12,15)	¡
$\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 17 (∨E: 8,11,16)	¡
$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 18 (⇒I: 6,17)	¡
$\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 19 (Prem)	¡
$\quad\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}]$	,! 20 (Prem)	¡
$\quad\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}]$	,! 21 (∨I: 20)	¡
$\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}]$	,! 22 (⇒I: 20,21)	¡
$\quad\quad \mathbf{x} = \mathbf{a}$	,! 23 (Prem)	¡
$\quad\quad \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}]$	,! 24 (⇔E: 5)	¡
$\quad\quad (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}]$	,! 25 (⇒E: 23,24)	¡
$\quad\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}]$	,! 26 (∨I: 25)	¡
$\quad \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}]$	,! 27 (⇒I: 23,26)	¡
$\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}]$	,! 28 (∨E: 19,22,23)	¡
$\quad \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))[\mathbf{x}]$	,! 29 (⇔E: 3)	¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 30 ($\Rightarrow$E: 29) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 31 ($\Rightarrow$I: 19,30) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 32 ($\Leftrightarrow$I: 18,31) ¡

$(\ (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}\ )$,! 33 (()I: 32) ¡

$\forall P \forall a \forall x\ (\ (P \cup (a^{\bullet}))[x] \Leftrightarrow P[x] \vee x = a\ )$! 34 ($\forall$I: 1,33) ¡

▯

! **29.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall a\ (\ \forall x(Q[x] \Leftrightarrow P[x] \vee x = a) \Rightarrow Q \equiv (P \cup (a^{\bullet}))\ )$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$\forall x(\mathbf{Q}[x] \Leftrightarrow \mathbf{P}[x] \vee x = \mathbf{a})$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{x}$,! 3 (Prem) ¡

$(\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a})$,! 4 ($\forall$E: 2) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 5 (()E: 4) ¡

$(\ (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}\ )$,! 6 ($\forall$E: P28) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 7 (()E: 6) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 8 (Prem) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 9 ($\Leftrightarrow$E: 5) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 10 ($\Rightarrow$E: 8,9) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 11 ($\Leftrightarrow$E: 7) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 12 ($\Rightarrow$E: 10,11) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 13 ($\Rightarrow$I: 8,12) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 14 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 15 ($\Leftrightarrow$E: 7) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 16 ($\Rightarrow$E: 14,15) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 17 ($\Leftrightarrow$E: 5) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 18 ($\Rightarrow$E: 16,17) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 19 ($\Rightarrow$I: 14,18) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 20 ($\Leftrightarrow$I: 13,19) ¡

$(\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}])$,! 21 (()I: 20) ¡

$\forall x (\mathbf{Q}[x] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[x])$,! 22 ($\forall$I: 3,21) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 23 ($\mathbb{S}$I: C1.7,22) ¡

$\forall x(\mathbf{Q}[x] \Leftrightarrow \mathbf{P}[x] \vee x = \mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 24 ($\Rightarrow$I: 2,23) ¡

$(\forall x(\mathbf{Q}[x] \Leftrightarrow \mathbf{P}[x] \vee x = \mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})))$
,! 25 (()I: 24) ¡

$\forall P \forall Q \forall a (\forall x(Q[x] \Leftrightarrow P[x] \vee x = a) \Rightarrow Q \equiv (P \cup (a^{\bullet})))$
! 26 ($\forall$I: 1,25) ¡

▯

! **30.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall a (Q \equiv (P \cup (a^{\bullet})) \Rightarrow \forall x(Q[x] \Leftrightarrow P[x] \vee x = a))$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{x}$,! 3 (Prem) ¡

$\forall x (\mathbf{Q}[x] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[x])$,! 4 ($\mathbb{S}$E: C1.7,2) ¡

$(\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}])$,! 5 ($\forall$E: 4) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 6 (()E: 5) ¡

$((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a})$,! 7 ($\forall$E: P28) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 8 (()E: 7) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 9 (Prem) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 10 ($\Leftrightarrow$E: 6) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 11 ($\Rightarrow$E: 9,10) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 12 ($\Leftrightarrow$E: 8) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 13 ($\Rightarrow$E: 11,12) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 14 ($\Rightarrow$I: 9,13) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \vee \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 15 (Prem) ¡

P[x] ∨ x = a ⇒ (P ∪ (a•))[x] ,! 16 (⇔E: 8) ¡

(P ∪ (a•))[x] ,! 17 (⇒E: 15,16) ¡

(P ∪ (a•))[x] ⇒ Q[x] ,! 18 (⇔E: 6) ¡

Q[x] ,! 19 (⇒E: 17,18) ¡

P[x] ∨ x = a ⇒ Q[x] ,! 20 (⇒I: 15,19) ¡

Q[x] ⇔ P[x] ∨ x = a ,! 21 (⇔I: 14,20) ¡

(Q[x] ⇔ P[x] ∨ x = a) ,! 22 (()I: 21) ¡

∀x(Q[x] ⇔ P[x] ∨ x = a) ,! 23 (∀I: 3,22) ¡

Q ≡ (P ∪ (a•)) ⇒ ∀x(Q[x] ⇔ P[x] ∨ x = a)
,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

(Q ≡ (P ∪ (a•)) ⇒ ∀x(Q[x] ⇔ P[x] ∨ x = a))
,! 25 (()I: 24) ¡

∀P∀Q∀a (Q ≡ (P ∪ (a•)) ⇒ ∀x(Q[x] ⇔ P[x] ∨ x = a))
! 26 (∀I: 1,25) ¡

▯

! **31.** ¡

⊢ ∀P∀a {x : P[x] ∨ x = a} ≡ (P ∪ (a•)) ¡

P,a ,! 1 (Prem) ¡

(∀x ({s : P[s] ∨ s = a}[x] ⇔ P[x] ∨ x = a)
⇒ {s : P[s] ∨ s = a} ≡ (P ∪ (a•)))
! 2 (∀E: P29) ¡

∀x ({s : P[s] ∨ s = a}[x] ⇔ P[x] ∨ x = a)
⇒ {s : P[s] ∨ s = a} ≡ (P ∪ (a•))
! 3 (()E: 2) ¡

∀x ({s : P[s] ∨ s = a}[x] ⇔ P[x] ∨ x = a)
,! 4 (Pred) ¡

{s : P[s] ∨ s = a} ≡ (P ∪ (a•)) ,! 5 (⇒E: 3,4) ¡

{x : P[x] ∨ x = a} ≡ (P ∪ (a•)) ,! 6 (Exch: 5) ¡

∀P∀a {x : P[x] ∨ x = a} ≡ (P ∪ (a•)) ! 7 (∀I: 1,6) ¡

▯

! **32.** ¡

⊦ ∀P∀a (P ∪ (a•))[a] ¡

P,**a** ,! 1 (Prem) ¡

(**a**•) ⊆ (**P** ∪ (**a**•)) ,! 2 (∀E: C2.13) ¡

((**a**•) ⊆ (**P** ∪ (**a**•)) ⇒ (**P** ∪ (**a**•))[**a**]) ,! 3 (∀E: P12) ¡

(**a**•) ⊆ (**P** ∪ (**a**•)) ⇒ (**P** ∪ (**a**•))[**a**] ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∪ (**a**•))[**a**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀P∀a (P ∪ (a•))[a] ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **33.** ¡

⊦ ∀P∀a ((a•) ∪ P)[a] ¡

P,**a** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∪ (**a**•))[**a**] ,! 2 (∀E: P32) ¡

(**P** ∪ (**a**•)) ≡ ((**a**•) ∪ **P**) ,! 3 (∀E: C2.16) ¡

(**P** ∪ (**a**•))[**a**] & (**P** ∪ (**a**•)) ≡ ((**a**•) ∪ **P**)
,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∪ (**a**•))[**a**] & (**P** ∪ (**a**•)) ≡ ((**a**•) ∪ **P**) ⇒ ((**a**•) ∪ **P**)[**a**])
,! 5 (∀E: C1.35) ¡

(**P** ∪ (**a**•))[**a**] & (**P** ∪ (**a**•)) ≡ ((**a**•) ∪ **P**) ⇒ ((**a**•) ∪ **P**)[**a**]
,! 6 (()E: 5) ¡

((**a**•) ∪ **P**)[**a**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀P∀a ((a•) ∪ P)[a] ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **34.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀a (Q ≡ (P ∪ (a•)) ⇒ Q[a]) ¡

P,**Q**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ (**P** ∪ (**a**•)) ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∪ (**a**•))[**a**] ,! 3 (∀E: P32) ¡

(**P** ∪ (**a**•))[**a**] & **Q** ≡ (**P** ∪ (**a**•)) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∪ (**a**•))[**a**] & **Q** ≡ (**P** ∪ (**a**•)) ⇒ **Q**[**a**])

,! 5 (∀E: C1.36) ¡

(P ∪ (a•))[a] & Q ≡ (P ∪ (a•)) ⇒ Q[a]

,! 6 (()E: 5) ¡

Q[a] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ (P ∪ (a•)) ⇒ Q[a] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(Q ≡ (P ∪ (a•)) ⇒ Q[a]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀a (Q ≡ (P ∪ (a•)) ⇒ Q[a]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **35.** ¡

⊦ ∀P∀a (P[a] ⇒ (P ∪ (a•)) ≡ P) ¡

P,a ,! 1 (Prem) ¡

P[a] ,! 2 (Prem) ¡

(P[a] ⇒ (a•) ⊆ P) ,! 3 (∀E: P13) ¡

P[a] ⇒ (a•) ⊆ P ,! 4 (()E: 3) ¡

(a•) ⊆ P ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((a•) ⊆ P ⇒ (P ∪ (a•)) ≡ P) ,! 6 (∀E: C2.26) ¡

(a•) ⊆ P ⇒ (P ∪ (a•)) ≡ P ,! 7 (()E: 6) ¡

(P ∪ (a•)) ≡ P ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P[a] ⇒ (P ∪ (a•)) ≡ P ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(P[a] ⇒ (P ∪ (a•)) ≡ P) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀a (P[a] ⇒ (P ∪ (a•)) ≡ P) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **36.** ¡

⊦ ∀P∀a ((P ∪ (a•)) ≡ P ∨ ¬ P[a]) ¡

P,a ,! 1 (Prem) ¡

(P[a] ∨ ¬ P[a]) ,! 2 (∀E: I3.15) ¡

P[a] ∨ ¬ P[a] ,! 3 (()E: 2) ¡

P[a] ,! 4 (Prem) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P})$,! 5 ($\forall$E: P35) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P}$,! 6 (()E: 5) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P}$,! 7 ($\Rightarrow$E: 4,6) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 8 ($\vee$I: 7) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 9 ($\Rightarrow$I: 4,8) ¡

$\neg \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 10 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 11 ($\vee$I: 10) ¡

$\neg \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 12 ($\Rightarrow$I: 10,11) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 13 ($\vee$E: 3,9,12) ¡

$((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P}[\mathbf{a}])$,! 14 (()I: 13) ¡

$\forall P \forall a ((P \cup (a^{\bullet})) \equiv P \vee \neg P[a])$! 15 ($\forall$I: 1,14) ¡

▯

! **37.** ¡

$\vdash \forall P \forall a \neg (P \cup (a^{\bullet})) \equiv \phi$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{a}]$,! 2 ($\forall$E: P32) ¡

$\exists x (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[x]$,! 3 ($\exists$I: 2) ¡

$(\exists x (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[x] \Rightarrow \neg (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi)$
,! 4 ($\forall$E: C5.7) ¡

$\exists x (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[x] \Rightarrow \neg (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi$,! 5 (()E: 4) ¡

$\neg (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi$,! 6 ($\Rightarrow$E: 3,5) ¡

$\forall P \forall a \neg (P \cup (a^{\bullet})) \equiv \phi$! 7 ($\forall$I: 1,6) ¡

▯

! **38.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q (Q \subset P \Rightarrow \exists a(\neg Q[a] \,\&\, (Q \cup (a^{\bullet})) \subseteq P))$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \exists x(\mathbf{P}[x] \,\&\, \neg \mathbf{Q}[x]))$,! 3 ($\forall$E: C1.60) ¡

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \exists x(\mathbf{P}[x] \ \& \ \neg \ \mathbf{Q}[x])$,! 4 (()E: 3) ¡

$\exists x(\mathbf{P}[x] \ \& \ \neg \ \mathbf{Q}[x])$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{a}] \ \& \ \neg \ \mathbf{Q}[\mathbf{a}])$,! 6 ($\exists$E: 5) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}] \ \& \ \neg \ \mathbf{Q}[\mathbf{a}]$,! 7 (()E: 6) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 8 (&E: 7) ¡

$\neg \ \mathbf{Q}[\mathbf{a}]$,! 9 (&E: 7) ¡

$(\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \ )$,! 10 ($\forall$E: C1.50) ¡

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$,! 11 (()E: 10) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$,! 12 ($\Rightarrow$E: 2,11) ¡

$(\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P} \ )$,! 13 ($\forall$E: P13) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P}$,! 14 (()E: 13) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P}$,! 15 ($\Rightarrow$E: 8,14) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \ \& \ (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P}$,! 16 (&I: 12,15) ¡

$(\ \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \ \& \ (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P} \ )$
,! 17 ($\forall$E: C2.14) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \ \& \ (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P}$,! 18 (()E: 17) ¡

$(\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P}$,! 19 ($\Rightarrow$E: 16,18) ¡

$\neg \ \mathbf{Q}[\mathbf{a}] \ \& \ (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P}$,! 20 (&I: 9,19) ¡

$(\neg \ \mathbf{Q}[\mathbf{a}] \ \& \ (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P})$,! 21 (()I: 20) ¡

$\exists a(\neg \ \mathbf{Q}[a] \ \& \ (\mathbf{Q} \cup (a^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P})$,! 22 ($\exists$I: 21) ¡

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \exists a(\neg \ \mathbf{Q}[a] \ \& \ (\mathbf{Q} \cup (a^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P})$,! 23 ($\Rightarrow$I: 2,22) ¡

$(\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \exists a(\neg \ \mathbf{Q}[a] \ \& \ (\mathbf{Q} \cup (a^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P}) \ )$
,! 24 (()I: 23) ¡

$\forall P \forall Q \ (\ Q \subset P \Rightarrow \exists a(\neg \ Q[a] \ \& \ (Q \cup (a^{\bullet})) \subseteq P) \ )$
! 25 ($\forall$I: 1,23) ¡

▯

! **39. The Second Squeeze Theorem.** The proof given appeals to the First Squeeze Theorem (P23). ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall a \ (\ P \subseteq Q \ \& \ Q \subseteq (P \cup (a^{\bullet})) \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv (P \cup (a^{\bullet})) \ )$

¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$ & $\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$,! 3 (&E: 2) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 4 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \Rightarrow (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \subseteq ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus \mathbf{P}))$
,! 5 (∀E: C7.28) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \Rightarrow (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \subseteq ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus \mathbf{P})$
,! 6 (()E: 5) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \subseteq ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus \mathbf{P})$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus \mathbf{P}) \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 8 (∀E: C7.71) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \subseteq ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus \mathbf{P})$ & $((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus \mathbf{P}) \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$
,! 9 (&I: 7,8) ¡

$((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \subseteq ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus \mathbf{P})$ & $((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus \mathbf{P}) \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$
$\Rightarrow (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 10 (∀E: C1.5) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \subseteq ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus \mathbf{P})$ & $((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus \mathbf{P}) \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$
$\Rightarrow (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$
,! 11 (()E: 10) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

$((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv \phi \vee (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 13 (∀E: P23) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \subseteq (\mathbf{a}^{\bullet}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv \phi \vee (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$
,! 14 (()E: 13) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv \phi \vee (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv \phi$,! 16 (Prem) ¡

$((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P})$,! 17 (∀E: C7.53) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$,! 18 (()E: 17) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$,! 20 (&I: 3,19) ¡

$(\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{Q} \equiv \mathbf{P})$,! 21 (∀E: C1.8) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{Q} \equiv \mathbf{P}$,! 22 (()E: 21) ¡

$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{P}$,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$,! 24 (∨I: 23) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$,! 25 (⇒I: 16,24) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{a}^\bullet)$,! 26 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \cup \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q})$,! 27 (∀E: C7.65) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \cup \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q}$,! 28 (()E: 27) ¡

$((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \cup \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q}$,! 29 (⇒E: 3,28) ¡

$((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{a}^\bullet) \Rightarrow ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \cup \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)))$
,! 30 (∀E: C2.38) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{a}^\bullet) \Rightarrow ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \cup \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$
,! 31 (()E: 30) ¡

$((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \cup \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$,! 32 (⇒E: 26,31) ¡

$((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \cup \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q} \;\&\; ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \cup \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$
,! 33 (&I: 29,32) ¡

$(((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \cup \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q} \;\&\; ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \cup \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$
$\Rightarrow \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)))$
,! 34 (∀E: C1.19) ¡

$((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \cup \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q} \;\&\; ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \cup \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$
$\Rightarrow \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$
,! 35 (()E: 34) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$,! 36 (⇒E: 33,35) ¡

$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$,! 37 (∨I: 36) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{a}^\bullet) \Rightarrow \mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$
,! 38 (⇒I: 26,37) ¡

$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$,! 39 (∨E: 15,25,38)
¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \;\&\; \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \Rightarrow \mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$
,! 40 (⇒I: 2,39) ¡

$(\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \;\&\; \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \Rightarrow \mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)))$
,! 41 (()I: 40) ¡

$\forall P \forall Q \forall a \; (P \subseteq Q \;\&\; Q \subseteq (P \cup (a^\bullet)) \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv (P \cup (a^\bullet)))$

! 42 (∀I: 1,41) ¡

▯

! P40 through P46 are propositions are singletons and intersections. ¡

! **40.** ¡

$\vdash$ ∀P∀a (¬ P[a] ⇒ (P ∩ (a•)) ≡ ϕ) ¡

P,**a** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **P**[**a**] ,! 2 (Prem) ¡

(¬ **P**[**a**] ⇒ (**a**•) ⊆ (**P**ᶜ)) ,! 3 (∀E: P27) ¡

¬ **P**[**a**] ⇒ (**a**•) ⊆ (**P**ᶜ) ,! 4 (()E: 3) ¡

(**a**•) ⊆ (**P**ᶜ) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**a**•) ⊆ (**P**ᶜ) ⇒ (**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ) ,! 6 (∀E: C5.45) ¡

(**a**•) ⊆ (**P**ᶜ) ⇒ (**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ ,! 7 (()E: 6) ¡

(**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

¬ **P**[**a**] ⇒ (**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(¬ **P**[**a**] ⇒ (**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀a (¬ P[a] ⇒ (P ∩ (a•)) ≡ ϕ) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **41.** ¡

$\vdash$ ∀P∀Q∀a (¬ P[a] & Q ⊆ P ⇒ (Q ∩ (a•)) ≡ ϕ) ¡

P,**Q**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **P**[**a**] & **Q** ⊆ **P** ,! 2 (Prem) ¡

¬ **P**[**a**] ,! 3 (&E: 2) ¡

Q ⊆ **P** ,! 4 (&E: 2) ¡

(¬ **P**[**a**] ⇒ (**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ) ,! 5 (∀E: P40) ¡

¬ **P**[**a**] ⇒ (**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ & **Q** ⊆ **P** ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((P ∩ (a•)) ≡ ϕ & Q ⊆ P ⇒ (Q ∩ (a•)) ≡ ϕ)
,! 9 (∀E: C5.37) ¡

(P ∩ (a•)) ≡ ϕ & Q ⊆ P ⇒ (Q ∩ (a•)) ≡ ϕ
,! 10 (()E: 9) ¡

(Q ∩ (a•)) ≡ ϕ ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

¬ P[a] & Q ⊆ P ⇒ (Q ∩ (a•)) ≡ ϕ ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(¬ P[a] & Q ⊆ P ⇒ (Q ∩ (a•)) ≡ ϕ) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀a (¬ P[a] & Q ⊆ P ⇒ (Q ∩ (a•)) ≡ ϕ)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **42.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀a (¬ P[a] & Q ⊆ (a•) ⇒ (Q ∩ P) ≡ ϕ) ¡

P,**Q**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **P**[**a**] & **Q** ⊆ (**a**•) ,! 2 (Prem) ¡

¬ **P**[**a**] ,! 3 (&E: 2) ¡

Q ⊆ (**a**•) ,! 4 (&E: 2) ¡

(¬ **P**[**a**] ⇒ (**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ) ,! 5 (∀E: P40) ¡

¬ **P**[**a**] ⇒ (**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ & **Q** ⊆ (**a**•) ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ & **Q** ⊆ (**a**•) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ)
,! 9 (∀E: C5.38) ¡

(**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ & **Q** ⊆ (**a**•) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ
,! 10 (()E: 9) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ) ,! 12 (∀E: C3.17) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 13 (()E: 12) ¡

(**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

¬ **P**[**a**] & **Q** ⊆ (**a**•) ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(¬ **P**[**a**] & **Q** ⊆ (**a**•) ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ) ,! 16 (()I: 15) ¡

$\forall P \forall Q \forall a \; (\neg P[a] \;\&\; Q \subseteq (a^{\bullet}) \Rightarrow (Q \cap P) \equiv \phi \;)$
! 17 ($\forall$I: 1,16) ¡

▯

! **43.** ¡

$\vdash \forall a \forall b \; (\neg a = b \Rightarrow ((a^{\bullet}) \cap (b^{\bullet})) \equiv \phi \;)$ ¡

$\mathbf{a},\mathbf{b}$,! 1 (Prem) ¡

$\neg \mathbf{a} = \mathbf{b}$,! 2 (Prem) ¡

$(\neg \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \neg (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{b}] \;)$,! 3 ($\forall$E: P8) ¡

$\neg \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \neg (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{b}]$,! 4 (()E: 3) ¡

$\neg (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{b}]$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$(\neg (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{b}] \Rightarrow ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cap (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv \phi \;)$,! 6 ($\forall$E: P40) ¡

$\neg (\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{b}] \Rightarrow ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cap (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv \phi$,! 7 (()E: 6) ¡

$((\mathbf{a}^{\bullet}) \cap (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv \phi$,! 8 ($\Rightarrow$E: 5,7) ¡

$\neg \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cap (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv \phi$,! 9 ($\Rightarrow$I: 2,8) ¡

$(\neg \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cap (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv \phi \;)$,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall a \forall b \; (\neg a = b \Rightarrow ((a^{\bullet}) \cap (b^{\bullet})) \equiv \phi \;)$! 11 ($\forall$I: 1,10) ¡

▯

! **44.** ¡

$\vdash \forall P \forall a \; ((P \cap (a^{\bullet})) \equiv \phi \Rightarrow \neg P[a] \;)$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{a}]$,! 3 ($\forall$E: P5) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{a}] \;\&\; (\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi$,! 4 (&I: 2,3) ¡

$((\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{a}] \;\&\; (\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi \Rightarrow \neg \mathbf{P}[\mathbf{a}] \;)$
,! 5 ($\forall$E: C5.24) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet})[\mathbf{a}] \;\&\; (\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi \Rightarrow \neg \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 6 (()E: 5) ¡

$\neg \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 7 ($\Rightarrow$E: 4,6) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi \Rightarrow \neg \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 8 ($\Rightarrow$I: 2,7) ¡

((**P** ∩ (**a**•)) ≡ ϕ ⇒ ¬ **P**[**a**]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀a ((P ∩ (a•)) ≡ ϕ ⇒ ¬ P[a]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **45.** ¡

⊦ ∀a∀b (((a•) ∩ (b•)) ≡ ϕ ⇒ ¬ a = b) ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

((**a**•) ∩ (**b**•)) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

(((**a**•) ∩ (**b**•)) ≡ ϕ ⇒ ¬ (**a**•)[**b**]) ,! 3 (∀E: P44) ¡

((**a**•) ∩ (**b**•)) ≡ ϕ ⇒ ¬ (**a**•)[**b**] ,! 4 (()E: 3) ¡

¬ (**a**•)[**b**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(¬ (**a**•)[**b**] ⇒ ¬ **a** = **b**) ,! 6 (∀E: P10) ¡

¬ (**a**•)[**b**] ⇒ ¬ **a** = **b** ,! 7 (()E: 6) ¡

¬ **a** = **b** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

((**a**•) ∩ (**b**•)) ≡ ϕ ⇒ ¬ **a** = **b** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(((**a**•) ∩ (**b**•)) ≡ ϕ ⇒ ¬ **a** = **b**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀a∀b (((a•) ∩ (b•)) ≡ ϕ ⇒ ¬ a = b) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **46.** ¡

⊦ ∀a∀b (¬ a = b ⇔ ((a•) ∩ (b•)) ≡ ϕ) ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

(¬ **a** = **b** ⇒ ((**a**•) ∩ (**b**•)) ≡ ϕ) ,! 2 (∀E: P43) ¡

¬ **a** = **b** ⇒ ((**a**•) ∩ (**b**•)) ≡ ϕ ,! 3 (()E: 2) ¡

(((**a**•) ∩ (**b**•)) ≡ ϕ ⇒ ¬ **a** = **b**) ,! 4 (∀E: P45) ¡

((**a**•) ∩ (**b**•)) ≡ ϕ ⇒ ¬ **a** = **b** ,! 5 (()E: 4) ¡

¬ **a** = **b** ⇔ ((**a**•) ∩ (**b**•)) ≡ ϕ ,! 6 (⇔I: 3,5) ¡

(¬ **a** = **b** ⇔ ((**a**•) ∩ (**b**•)) ≡ ϕ) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀a∀b (¬ a = b ⇔ ((a•) ∩ (b•)) ≡ ϕ) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

□

! P47 through P67 are propositions about singletons and differences. ¡

! **47.** ¡

⊦ ∀P∀a ¬ (P \ (a•))[a] ¡

P,**a** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** \ (**a**•)) ∩ (**a**•)) ≡ ϕ ,! 2 (∀E: C7.81) ¡

(((**P** \ (**a**•)) ∩ (**a**•)) ≡ ϕ ⇒ ¬ (**P** \ (**a**•))[**a**])
,! 3 (∀E: P40) ¡

((**P** \ (**a**•)) ∩ (**a**•)) ≡ ϕ ⇒ ¬ (**P** \ (**a**•))[**a**]
,! 4 (()E: 3) ¡

¬ (**P** \ (**a**•))[**a**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀P∀a ¬ (P \ (a•))[a] ! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! **48.** ¡

⊦ ∀P∀a∀x ((P \ (a•))[x] ⇔ P[x] & ¬ x = a) ¡

P,**a**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** \ (**a**•))[**x**] ⇔ **P**[**x**] & ¬ (**a**•)[**x**]) ,! 2 (∀E: C7.2) ¡

(**P** \ (**a**•))[**x**] ⇔ **P**[**x**] & ¬ (**a**•)[**x**] ,! 3 (()E: 2) ¡

(**P** \ (**a**•))[**x**] ,! 4 (Prem) ¡

(**P** \ (**a**•))[**x**] ⇒ **P**[**x**] & ¬ (**a**•)[**x**] ,! 5 (⇔E: 3) ¡

P[**x**] & ¬ (**a**•)[**x**] ,! 6 (⇒E: 4,5) ¡

¬ (**a**•)[**x**] ,! 7 (&E: 6) ¡

(¬ (**a**•)[**x**] ⇒ ¬ **x** = **a**) ,! 8 (∀E: P9) ¡

¬ (**a**•)[**x**] ⇒ ¬ **x** = **a** ,! 9 (()E: 8) ¡

¬ **x** = **a** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

P[**x**] ,! 11 (&E: 6) ¡

P[**x**] & ¬ **x** = **a** ,! 12 (&I: 10,11) ¡

(**P** \ (**a**•))[**x**] ⇒ **P**[**x**] & ¬ **x** = **a** ,! 13 (⇒I: 4,12) ¡

P[x] & ¬ x = a ,! 14 (Prem) ¡

¬ x = a ,! 15 (&E: 14) ¡

(¬ x = a ⇒ ¬ (a•)[x]) ,! 16 (∀E: P7) ¡

¬ x = a ⇒ ¬ (a•)[x] ,! 17 (()E: 16) ¡

¬ (a•)[x] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

P[x] ,! 19 (&E: 14) ¡

P[x] & ¬ (a•)[x] ,! 20 (&I: 18,19) ¡

P[x] & ¬ (a•)[x] ⇒ (P \ (a•))[x] ,! 21 (⇔E: P3) ¡

(P \ (a•))[x] ,! 22 (⇒E: 20,21) ¡

P[x] & ¬ x = a ⇒ (P \ (a•))[x] ,! 23 (⇒I: 15,22) ¡

(P \ (a•))[x] ⇔ P[x] & ¬ x = a ,! 24 (⇔I: 13,23) ¡

((P \ (a•))[x] ⇔ P[x] & ¬ x = a) ,! 25 (()I: 24) ¡

∀P∀a∀x ((P \ (a•))[x] ⇔ P[x] & ¬ x = a)

! 26 (∀I: 1,25) ¡

□

! **49.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀a (P[a] & ¬ Q[a] ⇒ (a•) ⊆ (P \ Q)) ¡

P,Q,a ,! 1 (Prem) ¡

P[a] & ¬ Q[a] ,! 2 (Prem) ¡

P[a] ,! 3 (&E) ¡

¬ Q[a] ,! 4 (&E) ¡

(P[a] ⇒ (a•) ⊆ P) ,! 5 (∀E: P13) ¡

P[a] ⇒ (a•) ⊆ P ,! 6 (()E: 5) ¡

(a•) ⊆ P ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(¬ Q[a] ⇒ (a•) ⊆ (Q^C)) ,! 8 (∀E: P27) ¡

¬ Q[a] ⇒ (a•) ⊆ (Q^C) ,! 9 (()E: 8) ¡

(a•) ⊆ (Q^C) ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

(a•) ⊆ P & (a•) ⊆ (Q^C) ,! 11 (&I: 7,10) ¡

($(\mathbf{a}^\bullet) \subseteq \mathbf{P}$ & $(\mathbf{a}^\bullet) \subseteq (\mathbf{Q}^C) \Rightarrow (\mathbf{a}^\bullet) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$)
,! 12 (∀E: C7.24) ¡

$(\mathbf{a}^\bullet) \subseteq \mathbf{P}$ & $(\mathbf{a}^\bullet) \subseteq (\mathbf{Q}^C) \Rightarrow (\mathbf{a}^\bullet) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$
,! 13 (()E: 12) ¡

$(\mathbf{a}^\bullet) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}]$ & $\neg\, \mathbf{Q}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{a}^\bullet) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

($\mathbf{P}[\mathbf{a}]$ & $\neg\, \mathbf{Q}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{a}^\bullet) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$) ,! 16 (()I: 15) ¡

$\forall P \forall Q \forall a$ ($P[a]$ & $\neg\, Q[a] \Rightarrow (a^\bullet) \subseteq (P \setminus Q)$)
! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **50.** ¡

⊢ $\forall P \forall a$ ($\neg\, P[a] \Rightarrow (P \setminus (a^\bullet)) \equiv P$) ¡

P,a ,! 1 (Prem) ¡

$\neg\, \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 2 (Prem) ¡

($\neg\, \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \phi$) ,! 3 (∀E: P40) ¡

$\neg\, \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \phi$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \phi$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

($(\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$) ,! 6 (∀E: C7.55) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$,! 7 (()E: 6) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$\neg\, \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

($\neg\, \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$) ,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall P \forall a$ ($\neg\, P[a] \Rightarrow (P \setminus (a^\bullet)) \equiv P$) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **51.** ¡

⊢ $\forall a \forall b$ ($\neg\, a = b \Rightarrow ((a^\bullet) \setminus (b^\bullet)) \equiv (a^\bullet)$) ¡

a,b ,! 1 (Prem) ¡

$\neg\, \mathbf{a} = \mathbf{b}$,! 2 (Prem) ¡

($\neg\, \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \neg\, (\mathbf{a}^\bullet)[\mathbf{b}]$) ,! 3 (∀E: P8) ¡

¬ **a** = **b** ⇒ ¬ (**a**•)[**b**] ,! 4 (()E: 3) ¡

¬ (**a**•)[**b**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(¬ (**a**•)[**b**] ⇒ ((**a**•) \ (**b**•)) ≡ (**a**•)) ,! 6 (∀E: P50) ¡

¬ (**a**•)[**b**] ⇒ ((**a**•) \ (**b**•)) ≡ (**a**•) ,! 7 (()E: 6) ¡

((**a**•) \ (**b**•)) ≡ (**a**•) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

¬ **a** = **b** ⇒ ((**a**•) \ (**b**•)) ≡ (**a**•) ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(¬ **a** = **b** ⇒ ((**a**•) \ (**b**•)) ≡ (**a**•)) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀a∀b (¬ a = b ⇒ ((a•) \ (b•)) ≡ (**a**•)) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **52.** ¡

⊢ ∀a∀b (¬ a = b ⇒ ((b•) \ (a•)) ≡ (b•)) ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **a** = **b** ,! 2 (Prem) ¡

(¬ **a** = **b** ⇒ ¬ **b** = **a**) ,! 3 (∀E: I3.3) ¡

¬ **a** = **b** ⇒ ¬ **b** = **a** ,! 4 (()I: 3) ¡

¬ **b** = **a** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(¬ **b** = **a** ⇒ ((**b**•) \ (**a**•)) ≡ (**b**•)) ,! 6 (∀E: P51) ¡

¬ **b** = **a** ⇒ ((**b**•) \ (**a**•)) ≡ (**b**•) ,! 7 (()E: 6) ¡

((**b**•) \ (**a**•)) ≡ (**b**•) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

¬ **a** = **b** ⇒ ((**b**•) \ (**a**•)) ≡ (**b**•) ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(¬ **a** = **b** ⇒ ((**b**•) \ (**a**•)) ≡ (**b**•)) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀a∀b (¬ a = b ⇒ ((b•) \ (a•)) ≡ (b•)) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **53.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀a (∀x(Q[x] ⇔ P[x] & ¬ x = a) ⇒ Q ≡ (P \ (a•))) ¡

P,**Q**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

∀x(**Q**[x] ⇔ **P**[x] & ¬ x = **a**) ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

$(\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \mathbin{\&} \neg\, \mathbf{x} = \mathbf{a})$,! 4 (∀E: 2) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \mathbin{\&} \neg\, \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 5 (()E: 4) ¡

$(\ (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \mathbin{\&} \neg\, \mathbf{x} = \mathbf{a}\ )$,! 6 (∀E: P48) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \mathbin{\&} \neg\, \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 7 (()E: 6) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 8 (Prem) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \mathbin{\&} \neg\, \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 9 (⇔E: 5) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \mathbin{\&} \neg\, \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 10 (⇒E: 8,9) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \mathbin{\&} \neg\, \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 11 (⇔E: 7) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 12 (⇒E: 10,11) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 13 (⇒I: 8,12) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 14 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \mathbin{\&} \neg\, \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 15 (⇔E: 7) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \mathbin{\&} \neg\, \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 16 (⇒E: 14,15) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \mathbin{\&} \neg\, \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 17 (⇔E: 5) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 18 (⇒E: 16,17) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 19 (⇒I: 14,18) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 20 (⇔I: 13,19) ¡

$(\ \mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]\ )$,! 21 (()I: 20) ¡

$\forall x(\ \mathbf{Q}[x] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[x]\ )$,! 22 (∀I: 3,21) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 23 (𝕊I: C1.7,22) ¡

$\forall x(\mathbf{Q}[x] \Leftrightarrow \mathbf{P}[x] \mathbin{\&} \neg\, x = \mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

$(\ \forall x(\mathbf{Q}[x] \Leftrightarrow \mathbf{P}[x] \mathbin{\&} \neg\, x = \mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))\ )$
,! 25 (()I: 24) ¡

$\forall P \forall Q \forall a\ (\ \forall x(Q[x] \Leftrightarrow P[x] \mathbin{\&} \neg\, x = a) \Rightarrow Q \equiv (P \setminus (a^{\bullet}))\ )$
! 26 (∀I: 1,25) ¡

□

! **54.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall a\ (\ Q \equiv (P \setminus (a^{\bullet})) \Rightarrow \forall x(Q[x] \Leftrightarrow P[x]\ \&\ \neg\ x = a)\ )$ ¡

$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{x}$,! 3 (Prem) ¡

$\forall x(\ \mathbf{Q}[x] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[x]\ )$,! 4 (𝕊E: C1.7,2) ¡

$(\ \mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]\ )$,! 5 (∀E: 4) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 6 (()E: 5) ¡

$(\ (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a}\ )$
,! 7 (∀E: P48) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 8 (()E: 7) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 9 (Prem) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 10 (⇔E: 6) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 11 (⇒E: 9,10) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 12 (⇔E: 8) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 13 (⇒E: 11,12) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 14 (⇒I: 9,13) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 15 (Prem) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 16 (⇔E: 8) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}]$,! 17 (⇒E: 15,16) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 18 (⇔E: 6) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 19 (⇒E: 17,18) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 20 (⇒I: 15,19) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a}$,! 21 (⇔I: 14,20) ¡

$(\mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{a})$,! 22 (()I: 21) ¡

$\forall x(\mathbf{Q}[x] \Leftrightarrow \mathbf{P}[x]\ \&\ \neg\ x = \mathbf{a})$,! 23 (∀I: 3,22) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \Rightarrow \forall x(\mathbf{Q}[x] \Leftrightarrow \mathbf{P}[x]\ \&\ \neg\ x = \mathbf{a})$
,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

$(\ \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \Rightarrow \forall x(\ \mathbf{Q}[x] \Leftrightarrow \mathbf{P}[x]\ \&\ \neg\ x = \mathbf{a})\ )$
,! 25 (()I: 24) ¡

$\forall P \forall Q \forall a\ (\ Q \equiv (P \setminus (a^{\bullet})) \Rightarrow \forall x(Q[x] \Leftrightarrow P[x]\ \&\ \neg\ x = a)\ )$
! 26 ($\forall$I: 1,25) ¡

▯

! **55.** There is an alternative proof using P38, but it would require additional lemmas to be clean. ¡

$\vdash \forall P \forall Q\ (\ Q \subset P \Rightarrow \exists a(P[a]\ \&\ Q \subseteq (P \setminus (a^{\bullet})))\ )$ ¡

$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}$,! 2 (Prem) ¡

$(\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \exists x(\mathbf{P}[x]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[x])\ )$,! 3 ($\forall$E: C1.60) ¡

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \exists x(\mathbf{P}[x]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[x])$,! 4 (()E: 3) ¡

$\exists x(\mathbf{P}[x]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[x])$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{a}]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{a}])$,! 6 ($\exists$E: 5) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{a}]$,! 7 (()E: 6) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 8 (&E: 7) ¡

$(\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}\ )$,! 9 ($\forall$E: C1.50) ¡

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$,! 10 (()E: 9) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$,! 11 ($\Rightarrow$E: 2,10) ¡

$(\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})\ )$,! 12 ($\forall$E: P49) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 13 (()E: 12) ¡

$(\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 14 ($\Rightarrow$E: 7,13) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}\ \&\ (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 15 (&I: 11,14) ¡

$(\ \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}\ \&\ (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))\ )$
,! 16 ($\forall$E: C7.26) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}\ \&\ (\mathbf{a}^{\bullet}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 17 (()E: 16) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 18 ($\Rightarrow$E: 14,17) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 19 (&I: 8,18) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})))$,! 20 (()I: 19) ¡

$\exists a(\mathbf{P}[a]\ \&\ \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \setminus (a^{\bullet})))$,! 21 ($\exists$I: 20) ¡

Q ⊂ P ⇒ ∃a(P[a] & Q ⊆ (P \ (a•))) ,! 22 (⇒I: 2,21) ¡

(Q ⊂ P ⇒ ∃a(P[a] & Q ⊆ (P \ (a•)))) ,! 23 (()I: 22) ¡

∀P∀Q (Q ⊂ P ⇒ ∃a(P[a] & Q ⊆ (P \ (a•))))
! 24 (∀I: 1,23) ¡

▯

! **56.** ¡

⊢ ∀P∀a (P[a] ⇒ ((P \ (a•)) ∪ (a•)) ≡ P) ¡

P,a ,! 1 (Prem) ¡

P[a] ,! 2 (Prem) ¡

(P[a] ⇒ (a•) ⊆ P) ,! 3 (∀E: P13) ¡

P[a] ⇒ (a•) ⊆ P ,! 4 (()E: 3) ¡

(a•) ⊆ P ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((a•) ⊆ P ⇒ ((P \ (a•)) ∪ (a•)) ≡ P)
,! 6 (∀E: C7.65) ¡

(a•) ⊆ P ⇒ ((P \ (a•)) ∪ (a•)) ≡ P
,! 7 (()E: 6) ¡

((P \ (a•)) ∪ (a•)) ≡ P ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P[a] ⇒ ((P \ (a•)) ∪ (a•)) ≡ P ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(P[a] ⇒ ((P \ (a•)) ∪ (a•)) ≡ P) ,! 13 (()I: 9) ¡

∀P∀a (P[a] ⇒ ((P \ (a•)) ∪ (a•)) ≡ P)
! 14 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **57.** ¡

⊢ ∀P∀a (P[a] ⇒ (P ≡ (P \ (a•)) ∪ (a•))) ¡

P,a ,! 1 (Prem) ¡

P[a] ,! 2 (Prem) ¡

(P[a] ⇒ ((P \ (a•)) ∪ (a•)) ≡ P) ,! 3 (∀E: P56) ¡

P[a] ⇒ ((P \ (a•)) ∪ (a•)) ≡ P ,! 4 (()E: 3) ¡

((P \ (a•)) ∪ (a•)) ≡ P ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \cup (\mathbf{a}^\bullet)))$
,! 6 (∀E: C1.10) ¡

$((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \cup (\mathbf{a}^\bullet))$
,! 7 (()E: 6) ¡

$\mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \cup (\mathbf{a}^\bullet))$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \cup (\mathbf{a}^\bullet))$,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \cup (\mathbf{a}^\bullet)))$,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall P \forall a\ (P[a] \Rightarrow P \equiv ((P \setminus (a^\bullet)) \cup (a^\bullet)))$
! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **58.** ¡

$\vdash \forall P \forall a\ (P[a] \Rightarrow \forall x\ (P[x] \Leftrightarrow (P \setminus (a^\bullet))[x] \vee x = a))$ ¡

P,a ,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \cup (\mathbf{a}^\bullet)))$,! 3 (∀E: P57) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \cup (\mathbf{a}^\bullet))$,! 4 (()E: 3) ¡

$\mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \cup (\mathbf{a}^\bullet))$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \cup (\mathbf{a}^\bullet))$
$\Rightarrow \forall x\ (\mathbf{P}[x] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))[x] \vee x = \mathbf{a}))$
,! 6 (∀E: P30) ¡

$\mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \cup (\mathbf{a}^\bullet))$
$\Rightarrow \forall x\ (\mathbf{P}[x] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))[x] \vee x = \mathbf{a})$
,! 7 (()E: 6) ¡

$\forall x\ (\mathbf{P}[x] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))[x] \vee x = \mathbf{a})$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \forall x\ (\mathbf{P}[x] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))[x] \vee x = \mathbf{a})$
,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

$(\mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \forall x\ (\mathbf{P}[x] \Leftrightarrow (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))[x] \vee x = \mathbf{a}))$
,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall P \forall a\ (P[a] \Rightarrow \forall x\ (P[x] \Leftrightarrow (P \setminus (a^\bullet))[x] \vee x = a))$
! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **59.** ¡

$\vdash \forall P \forall a\ (\ \neg\ P[a] \Rightarrow ((P \cup (a^{\bullet})) \setminus (a^{\bullet})) \equiv P\ )$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 2 (Prem) ¡

$(\ \neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi\ )$,! 3 (∀E: P40) ¡

$\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\ (\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P}\ )$
,! 6 (∀E: C7.75) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P}$
,! 7 (()E: 6) ¡

$((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P}$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P}$,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

$(\ \neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P}\ )$,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall P \forall a\ (\ \neg\ P[a] \Rightarrow ((P \cup (a^{\bullet})) \setminus (a^{\bullet})) \equiv P\ )$
! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **60.** A proof appealing to P59 is given, although it is long. ¡

$\vdash \forall P \forall a\ (\ \neg\ P[a] \Rightarrow (((a^{\bullet}) \cup P) \setminus (a^{\bullet})) \equiv P\ )$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 2 (Prem) ¡

$(\ \neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))\ )$,! 3 (∀E: P59) ¡

$\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 4 (()E: 3) ¡

$\mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\ \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P}\ )$
,! 6 (∀E: C1.10) ¡

$\mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P}$
,! 7 (()E: 6) ¡

$((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv \mathbf{P}$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup \mathbf{P})$,! 9 (∀E: C2.16) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv ((\mathbf{a}^\bullet) \cup \mathbf{P})$ & $((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$
,! 10 (&I: 8,9) ¡

($(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv ((\mathbf{a}^\bullet) \cup \mathbf{P})$ & $((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$
$\Rightarrow (((\mathbf{a}^\bullet) \cup \mathbf{P}) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$)
,! 11 (∀E: C7.42) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv ((\mathbf{a}^\bullet) \cup \mathbf{P})$ & $((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$
$\Rightarrow (((\mathbf{a}^\bullet) \cup \mathbf{P}) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$
,! 12 (()E: 11) ¡

$(((\mathbf{a}^\bullet) \cup \mathbf{P}) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

$\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (((\mathbf{a}^\bullet) \cup \mathbf{P}) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

($\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow (((\mathbf{a}^\bullet) \cup \mathbf{P}) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv \mathbf{P}$) ,! 15 (()I: 14) ¡

$\forall P \forall a$ ($\neg\ P[a] \Rightarrow (((a^\bullet) \cup P) \setminus (a^\bullet)) \equiv P$)
! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **61.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall a$ ($Q \equiv (P \cup (a^\bullet))$ & $\neg\ P[a] \Rightarrow P \equiv (Q \setminus (a^\bullet))$) ¡

P,**Q**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$ & $\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$,! 3 (&E: 2) ¡

$\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 4 (&E: 2) ¡

($\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$),! 5 (∀E: P59) ¡

$\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$,! 6 (()E: 5) ¡

$\mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$ & $\mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$
,! 8 (&I: 3,7) ¡

($\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$ & $\mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$
$\Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$)
,! 9 (∀E: C7.47) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet))$ & $\mathbf{P} \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$
$\Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$
,! 10 (()E: 9) ¡

$\mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))\ \&\ \neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

$(\ \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))\ \&\ \neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))\ )$
,! 13 (()I: 12) ¡

$\forall P \forall Q \forall a\ (\ Q \equiv (P \cup (a^{\bullet}))\ \&\ \neg\ P[a] \Rightarrow P \equiv (Q \setminus (a^{\bullet}))\ )$
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! P62 and P63 are permutations of the theme that two things,minus one of these things, is the other thing. ¡

! **62.** ¡

$\vdash \forall a \forall b\ (\ \neg\ a = b \Rightarrow (((a^{\bullet}) \cup (b^{\bullet})) \setminus (a^{\bullet})) \equiv (b^{\bullet})\ )$ ¡

a,b ,! 1 (Prem) ¡

$\neg\ \mathbf{a} = \mathbf{b}$,! 2 (Prem) ¡

$(\ \neg\ \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \neg\ (\mathbf{b}^{\bullet})[\mathbf{a}]\ )$,! 3 (∀E: P7) ¡

$\neg\ \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \neg\ (\mathbf{b}^{\bullet})[\mathbf{a}]$,! 4 (()E: 3) ¡

$\neg\ (\mathbf{b}^{\bullet})[\mathbf{a}]$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\ \neg\ (\mathbf{b}^{\bullet})[\mathbf{a}] \Rightarrow (((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{b}^{\bullet})\ )$
,! 6 (∀E: P60) ¡

$\neg\ (\mathbf{b}^{\bullet})[\mathbf{a}] \Rightarrow (((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{b}^{\bullet})$
,! 7 (()E: 6) ¡

$(((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{b}^{\bullet})$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$\neg\ \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow (((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{b}^{\bullet})$
,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

$(\ \neg\ \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow (((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{b}^{\bullet})\ )$
,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall a \forall b\ (\ \neg\ a = b \Rightarrow (((a^{\bullet}) \cup (b^{\bullet})) \setminus (a^{\bullet})) \equiv (b^{\bullet})\ )$
! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **63.** ¡

$\vdash \forall a \forall b\ (\ \neg\ a = b \Rightarrow (((b^{\bullet}) \cup (a^{\bullet})) \setminus (a^{\bullet})) \equiv (b^{\bullet})\ )$ ¡

a,b ,! 1 (Prem) ¡

$\neg\ \mathbf{a} = \mathbf{b}$,! 2 (Prem) ¡

$(\neg \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow (((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (\mathbf{b}^\bullet))$
,! 3 (∀E: P62) ¡

$\neg \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow (((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (\mathbf{b}^\bullet)$
,! 4 (()E: 3) ¡

$(((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (\mathbf{b}^\bullet)$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$
,! 6 (∀E: C7.68) ¡

$(((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$
$\& \ (((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (\mathbf{b}^\bullet)$
,! 7 (&I: 5,6) ¡

$(\ (((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$
$\& \ (((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (\mathbf{b}^\bullet)$
$\Rightarrow (((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (\mathbf{b}^\bullet) \ )$
,! 8 (∀E: C1.15) ¡

$(((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet))$
$\& \ (((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (\mathbf{b}^\bullet)$
$\Rightarrow (((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (\mathbf{b}^\bullet)$
,! 9 (()E: 8) ¡

$(((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (\mathbf{b}^\bullet)$,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

$\neg \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow (((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (\mathbf{b}^\bullet)$
,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

$(\neg \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow (((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)) \setminus (\mathbf{a}^\bullet)) \equiv (\mathbf{b}^\bullet))$
,! 12 (()I: 11) ¡

$\forall a \forall b \ (\neg a = b \Rightarrow (((b^\bullet) \cup (a^\bullet)) \setminus (a^\bullet)) \equiv (b^\bullet))$
! 3 (∀I: 1,12) ¡

▯

! P64 through P67 are lemmas for future propositions. ¡

! **64.** ¡

$\vdash \forall P \forall a \forall b \ (\neg a = b \ \& \ P[b]$
$\Rightarrow (\ (P \setminus ((a^\bullet) \cup (b^\bullet))) \cup (b^\bullet) \ ) \equiv (P \setminus (a^\bullet)) \ )$ ¡

P,a,b ,! 1 (Prem) ¡

$\neg \mathbf{a} = \mathbf{b} \ \& \ \mathbf{P}[\mathbf{b}]$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{b}]$,! 3 (&E) ¡

$(\ \mathbf{P}[\mathbf{b}] \Rightarrow (\mathbf{b}^\bullet) \subseteq \mathbf{P} \ )$,! 4 (∀E: P13) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{b}] \Rightarrow (\mathbf{b}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P}$,! 5 (()E: 4) ¡

$(\mathbf{b}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P}$,! 6 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$((\mathbf{b}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P}$
$\quad \Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))$
$\quad\quad \equiv (\mathbf{P} \setminus (((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{b}^{\bullet}))))$
,! 7 ($\forall$E: C7.66) ¡

$(\mathbf{b}^{\bullet}) \subseteq \mathbf{P}$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))$
$\quad \equiv (\mathbf{P} \setminus (((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{b}^{\bullet})))$
,! 8 (()E: 7) ¡

$((\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))$
$\equiv (\mathbf{P} \setminus (((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{b}^{\bullet})))$
,! 9 ($\Rightarrow$E: 6,8) ¡

$\neg\ \mathbf{a} = \mathbf{b}$,! 10 (&E: 2) ¡

$(\neg\ \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \neg\ \mathbf{b} = \mathbf{a})$,! 11 ($\forall$E: I3.3) ¡

$\neg\ \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \neg\ \mathbf{b} = \mathbf{a}$,! 12 (()E: 11) ¡

$\neg\ \mathbf{b} = \mathbf{a}$,! 13 ($\Rightarrow$E: 10,12) ¡

$(\neg\ \mathbf{b} = \mathbf{a} \Rightarrow (((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 14 ($\forall$E: P63) ¡

$\neg\ \mathbf{b} = \mathbf{a} \Rightarrow (((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$
,! 15 (()E: 14) ¡

$(((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$,! 16 ($\Rightarrow$E: 13,15) ¡

$(((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$
$\&\ ((\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))$
$\quad \equiv (\mathbf{P} \setminus (((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{b}^{\bullet})))$
,! 17 (&I: 9,16) ¡

$((((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$
$\quad \&\ ((\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))$
$\quad\quad \equiv (\mathbf{P} \setminus (((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{b}^{\bullet})))$
$\quad \Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})))$
,! 18 ($\forall$E: C7.45) ¡

$(((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{a}^{\bullet})$
$\&\ ((\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))$
$\quad \equiv (\mathbf{P} \setminus (((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \setminus (\mathbf{b}^{\bullet})))$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 19 (()E: 18) ¡

$(\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}) \ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$

,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

$\neg \ \mathbf{a} = \mathbf{b} \ \& \ \mathbf{P}[\mathbf{b}]$
$\Rightarrow (\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}) \ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$

,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

$(\ \neg \ \mathbf{a} = \mathbf{b} \ \& \ \mathbf{P}[\mathbf{b}]$
$\Rightarrow (\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}) \ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \ )$

,! 22 (()I: 21) ¡

$\forall P \forall a \forall b \ (\ \neg \ a = b \ \& \ P[b]$
$\Rightarrow (\ (P \setminus ((a^{\bullet}) \cup (b^{\bullet}))) \cup (b^{\bullet}) \ ) \equiv (P \setminus (a^{\bullet})) \ )$

! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! **65.** ¡

$\vdash \forall P \forall a \forall b \ (\ \neg \ a = b \ \& \ P[a] \Rightarrow$
$(\ (P \setminus ((a^{\bullet}) \cup (b^{\bullet}))) \cup (a^{\bullet}) \ ) \equiv (P \setminus (b^{\bullet})) \ )$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{a},\mathbf{b}$,! 1 (Prem) ¡

$\neg \ \mathbf{a} = \mathbf{b} \ \& \ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 2 (Prem) ¡

$\neg \ \mathbf{a} = \mathbf{b}$,! 3 (&E: 2) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 4 (&E: 2) ¡

$(\ \neg \ \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \neg \ \mathbf{b} = \mathbf{a} \ )$,! 5 (∀E: I3.3) ¡

$\neg \ \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \neg \ \mathbf{b} = \mathbf{a}$,! 6 (()E: 5) ¡

$\neg \ \mathbf{b} = \mathbf{a}$,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

$\neg \ \mathbf{b} = \mathbf{a} \ \& \ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 8 (&I: 4,7) ¡

$(\ \neg \ \mathbf{b} = \mathbf{a} \ \& \ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$
$\Rightarrow (\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{b}^{\bullet}) \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{a}^{\bullet}) \ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{b}^{\bullet})) \ )$

,! 9 (∀E: P64) ¡

$\neg \ \mathbf{b} = \mathbf{a} \ \& \ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$
$\Rightarrow (\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{b}^{\bullet}) \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{a}^{\bullet}) \ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{b}^{\bullet}))$

,! 10 (()E: 9) ¡

$(\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{b}^{\bullet}) \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{a}^{\bullet}) \ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{b}^{\bullet}))$

,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

$((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv ((\mathbf{b}^{\bullet}) \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 12 (∀E: C2.16) ¡

$(\ ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet})) \equiv ((\mathbf{b}^{\bullet}) \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))$
$\Rightarrow (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^{\bullet}) \cup (\mathbf{b}^{\bullet}))) \equiv (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{b}^{\bullet}) \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))) \ )$

,! 13 ($\forall$E: C7.37) ¡

$((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet)) \equiv ((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet))$
$\Rightarrow (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet))) \equiv (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)))$
,! 14 (()E: 13) ¡

$(\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet))) \equiv (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)))$
,! 15 ($\Rightarrow$E: 12,14) ¡

$(\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet))) \equiv (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)))$
$\&\ (\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet))) \cup (\mathbf{a}^\bullet)\ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{b}^\bullet))$
,! 16 (&I: 11,15) ¡

$(\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet))) \equiv (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)))$
$\&\ (\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet))) \cup (\mathbf{a}^\bullet)\ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{b}^\bullet))$
$\Rightarrow (\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet))) \cup (\mathbf{a}^\bullet)\ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{b}^\bullet))\ )$
,! 17 ($\forall$E: C2.48) ¡

$(\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet))) \equiv (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet)))$
$\&\ (\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{b}^\bullet) \cup (\mathbf{a}^\bullet))) \cup (\mathbf{a}^\bullet)\ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{b}^\bullet))$
$\Rightarrow (\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet))) \cup (\mathbf{a}^\bullet)\ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{b}^\bullet))$
,! 18 (()E: 17) ¡

$(\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet))) \cup (\mathbf{a}^\bullet)\ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{b}^\bullet))$
,! 19 ($\Rightarrow$E: 16,18) ¡

$\neg\ \mathbf{a} = \mathbf{b}\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$
$\Rightarrow (\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet))) \cup (\mathbf{a}^\bullet)\ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{b}^\bullet))$
,! 20 ($\Rightarrow$I: 2,19) ¡

$(\ \neg\ \mathbf{a} = \mathbf{b}\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$
$\Rightarrow (\ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{a}^\bullet) \cup (\mathbf{b}^\bullet))) \cup (\mathbf{a}^\bullet)\ ) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{b}^\bullet))\ )$
,! 21 (()I: 20) ¡

$\forall P \forall a \forall b\ (\ \neg\ a = b\ \&\ P[a]$
$\Rightarrow (\ (P \setminus ((a^\bullet) \cup (b^\bullet))) \cup (a^\bullet)\ ) \equiv (P \setminus (b^\bullet))\ )$
! 22 ($\forall$I: 1,21) ¡

□

! **66.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall a\ (\ Q[a]\ \&\ Q \subseteq P$
$\Rightarrow ((P \setminus Q) \cup (a^\bullet)) \equiv (P \setminus (Q \setminus (a^\bullet)))\ )$ ¡

$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{a}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$,! 2 (Prem) ¡

$(\ \mathbf{Q}[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow (\mathbf{a}^\bullet) \subseteq \mathbf{P}\ )$,! 3 ($\forall$E: P14) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow (\mathbf{a}^\bullet) \subseteq \mathbf{P}$,! 4 (()E: 3) ¡

(a•) ⊆ P ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((a•) ⊆ P ⇒ ((P \ Q) ∪ (a•)) ≡ (P \ (Q \ (a•))))
,! 6 (∀E: C7.66) ¡

(a•) ⊆ P ⇒ ((P \ Q) ∪ (a•)) ≡ (P \ (Q \ (a•)))
,! 7 (()E: 6) ¡

((P \ Q) ∪ (a•)) ≡ (P \ (Q \ (a•))) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

Q[a] & Q ⊆ P ⇒ ((P \ Q) ∪ (a•)) ≡ (P \ (Q \ (a•)))
,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(Q[a] & Q ⊆ P ⇒ ((P \ Q) ∪ (a•)) ≡ (P \ (Q \ (a•))))
,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q∀a (Q[a] & Q ⊆ P
⇒ ((P \ Q) ∪ (a•)) ≡ (P \ (Q \ (a•))))
! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **67.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀a (Q[a] ⇒ (P ∪ Q) ≡ ((P ∪ (Q \ (a•))) ∪ (a•))) ¡

P,Q,a ,! 1 (Prem) ¡

Q[a] ,! 2 (Prem) ¡

((P ∪ (Q \ (a•))) ∪ (a•)) ≡ (P ∪ ((Q \ (a•)) ∪ (a•)))
,! 3 (∀E: C2.54) ¡

(Q[a] ⇒ Q ≡ ((Q \ (a•)) ∪ (a•))) ,! 4 (∀E: P57) ¡

Q[a] ⇒ Q ≡ ((Q \ (a•)) ∪ (a•)) ,! 5 (()E: 4) ¡

Q ≡ ((Q \ (a•)) ∪ (a•)) ,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

(Q ≡ ((Q \ (a•)) ∪ (a•))
⇒ (P ∪ Q) ≡ (P ∪ ((Q \ (a•)) ∪ (a•))))
,! 7 (∀E: C2.37) ¡

Q ≡ ((Q \ (a•)) ∪ (a•))
⇒ (P ∪ Q) ≡ (P ∪ ((Q \ (a•)) ∪ (a•)))
,! 8 (()E: 7) ¡

(P ∪ Q) ≡ (P ∪ ((Q \ (a•)) ∪ (a•))) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(P ∪ Q) ≡ (P ∪ ((Q \ (a•)) ∪ (a•)))
& ((P ∪ (Q \ (a•))) ∪ (a•)) ≡ (P ∪ ((Q \ (a•)) ∪ (a•)))
,! 10 (&I: 3,9) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv (\mathbf{P} \cup ((\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \cup (\mathbf{a}^{\bullet})))$
$\quad \& \ ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{P} \cup ((\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \cup (\mathbf{a}^{\bullet})))$
$\quad \Rightarrow (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \ )$

,! 11 (∀E: C1.17) ¡

$(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv (\mathbf{P} \cup ((\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \cup (\mathbf{a}^{\bullet})))$
$\& \ ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \equiv (\mathbf{P} \cup ((\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \cup (\mathbf{a}^{\bullet})))$
$\Rightarrow (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))$

,! 12 (()E: 11) ¡

$(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))$

,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

$\mathbf{Q}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))$

,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

$(\ \mathbf{Q}[\mathbf{a}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv ((\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))) \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \ )$

,! 15 (()I: 14) ¡

$\forall P \forall Q \forall a \ (\ Q[a] \Rightarrow (P \cup Q) \equiv ((P \cup (Q \setminus (a^{\bullet}))) \cup (a^{\bullet})) \ )$

! 16 (∀I: 1,15) ¡

□